数理解析研究所講究録
第698巻 1989年 127-145

抽象的準線型発展方程式について

岡山大教育　実方宣洋（Nobuhiro Sanekata）

T. Kato [5] の意味の準線型発展方程式の初期値問題

(CP)　$du/dt + A(t,u)u = f(t,u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0)=u_0$

について考察する．本稿では準線型双曲系の初期値問題 ([7; Example 2.3]) をモデルにして [10] の結果を一般化する．以下の条件を置く．

(X)　$(X, |\cdot|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ は Banach 空間で Y は X の中に稠密かつ連続的に埋め込まれている．//

(N)　Y の開集合 $W\ (\neq \phi)$ と区間 $I=[0,T_0]$ が存在し，任意の $t \in I$, $w \in W$ に対して X のノルム $|\cdot|_{(t,w)}$ で次の (i), (ii) を満たすものがある．

(i) $|x|_{(t,w)} \leq \lambda_X |x|_X, \qquad |x|_X \leq \lambda_X |x|_{(t,w)}$

(ii) $|x|_{(t,w)} \leq |x|_{(s,z)} \exp \mu_X \{|w-z|_X + |t-s|\}$

ここで $\lambda_X \geq 0$, $\mu_X \geq 0$ は $t,s \in I$, $w,z \in W$, $x \in X$ に依存

しない定数. //

(A) 定数 $\alpha \geqq 0$, $\mu_A \geqq 0$ が存在して, 任意の $t \in I$, $w \in W$ に対して $-A(t,w)$ は X 上の (C_0) 半群の生成作用素であり, 次の条件を満たす.

$D(A(t,w)) \supset Y$, $\quad t \in I$, $w \in W$

$\| [\lambda + A(t,w)]^{-1} \|_{X,X} \leqq (\lambda - \alpha)^{-1}$, $\lambda > \alpha$, $t \in I$, $w \in W$

$\| A(t,w) - A(t,z) \|_{Y,X} \leqq \mu_A \| w - z \|_X$, $\quad t \in I$, $w, z \in W$

任意の $w \in W$ に対して $t \to A(t,w)$ $(I \to B(Y,X))$ は強連続. //

(B) Y から X の上への線型同相写像 S と X の有界線型作用素 $B(t,w)$ $(t \in I$, $w \in W)$ が存在して

$SA(t,w)S^{-1} = A(t,w) + B(t,w)$, $\quad t \in I$, $w \in W$

$\| B(t,w) \|_{X,X} \leqq \lambda_B$, $\quad t \in I$, $w \in W$

$\| B(t,w) - B(t,z) \|_{X,X} \leqq \mu_B \| w - z \|_Y$, $\quad t \in I$, $w, z \in W$

$t \to B(t,w)$ $(I \to B(X,X))$ は強可測, $\quad w \in W$

を満たす. ここで $\lambda_B \geqq 0$, $\mu_B \geqq 0$ は定数. //

(f) 任意の $w \in W$ に対して $t \to f(t,w)$ $(I \to Y)$ は強可測かつ X ノルムで強連続で,

$$\| f(t,w) \|_Y \leq \lambda_f, \qquad t \in I, \quad w \in W$$

$$| f(t,w) - f(t,z) |_X \leq \mu_f | w - z |_X, \qquad t \in I, \quad w, z \in W$$

$$\| f(t,w) - f(t,z) \|_Y \leq \mu_f \| w - z \|_Y, \qquad t \in I, \quad w, z \in W$$

を満たす. //

以上の条件下で次の結果を得る.

__定理 1 ([9])__. 条件 (X)-(f) を仮定する. このとき任意の初期値 $u_0 \in W$ に対して, $T \in (0, T_0]$ を適当に選ぶと,

(1) $$u \in C([0,T];W) \cap C^1([0,T];X)$$

を満たす (CP) の解がただ一つ存在する. //

定理 1 において空間 X, Y の回帰性は仮定していない. [10] で [1], [5;Theorem 7], [7;Theorem A] などの結果が X, Y の回帰性を仮定しなくても得られることを示したが, [10] では [1], [5] などと同様に

$$| \cdot |_{(t,w)} = | \cdot |_X, \qquad t \in I, \quad w \in W$$

となる場合を扱っている.

条件 (N), (A) は [2], [6] などで導入されたものであるが, [2] では X, Y の回帰性を仮定している. また, [6] にはこの仮定はないが, 求めている (CP) の解は弱解であるという点で本稿の結果とは異なる. このため定理 1 を用いると,

1例として準線型双曲系の初期値問題に対する局所的古典解の存在が，[7;Example 2.3] の方法より簡単に証明される．

<u>**Example**</u>.　次の初期値問題を考える．

$$
\text{(HS)}\quad
\begin{cases}
u_t + a(t,x,u)u_x = g(t,x,u), & 0 \leqq t \leqq T, \quad x \in R, \\
u(0,x) = u_0(x), & x \in R.
\end{cases}
$$

未知関数 $u(t,x)=(u_j(t,x))$ は N-ベクトル，係数 $a(t,x,w)$ は N 次正方行列，$g(t,x,w)$ は N-ベクトルで，任意の $r>0$ について

$$a \in C([0,T_0];BUC^2(R\times \Omega_r;R^{N\times N}))$$

$$g \in C([0,T_0];BUC^2(R\times \Omega_r;R^{N}))$$

を満たす．ここで $T_0>0$，

$$\Omega_r = \{v \in R^N;\ |v|<r\}, \quad |v| = \max_j |v_j| \quad (v=(v_j)\in R^N)$$

である．さらに N 次正方行列 $q(t,x,w)$ が存在し，a は q により対角化可能であるとする：　任意の $r>0$ に対して

$$q \in C([0,T_0];BUC^1(R\times \Omega_r;R^{N\times N}))$$

$$\cap\ C^1([0,T_0];BUC(R\times \Omega_r;R^{N\times N}))$$

であり，適当に $\delta_r>0$ を選べば

$$|\det q(t,x,w)| \geq \delta_r, \qquad t \in I, \quad x \in R, \quad w \in \Omega_r.$$

また任意の $t \in I$, $x \in R$, $w \in R^N$ に対して

$$\gamma(t,x,w) = q(t,x,w)a(t,x,w)q(t,x,w)^{-1}$$

は対角行列である.

以上の条件下で任意の初期値 $u_0 \in BUC^1(R;R^N)$ に対して $T \in (0,T_0]$ を適当に選ぶと,

(2) $\quad u \in C([0,T];BUC^1(R:R^N) \cap C^1([0,T];BUC(R;R^N))$

を満たす (HS) の解 u が存在することを示す.

まず, 条件 (X) を満たす Banach 空間の組として

$$X = BUC(R;R^N), \qquad Y = BUC^1(R;R^N)$$

と選ぶ. ノルムはそれぞれ

$$|u|_X = \sup_{jx} |u_j(x)| \qquad \text{for } u=(u_j) \in X$$

$$\|v\|_Y = \max(|v|_X, |v_x|_X) \qquad \text{for } v \in Y$$

である. 任意の初期値 $u_0 \in Y$ に対して

$$r_0 > \|u_0\|_Y, \qquad W=\{v \in Y;\ \|v\|_Y < r_0\}$$

と置き, $t \in I=[0,T_0]$, $w \in W$ に対して

$$|u|_{(t,w)} = |q(t,w)u|_X$$

$$= \sup_{ix} \left|\sum_{j=1}^{N} q_{ij}(t,x,w(x))u_j(x)\right| \qquad u \in X$$

とする. $|\cdot|_{(t,w)}$ は条件 (N) を満たす X のノルムである.

初期値問題 (HS) を空間 $X=BUC(R;R^N)$, $Y=BUC^1(R;R^N)$ で考えるため, $t\in I$, $w\in W$ に対して X の中の線型作用素 $A(t,w)$ を次のように定義する.

$$D(A(t,w)) = \{u\in X;\ a(t,.,w(.))u_x(.)\in X\},$$

$$[A(t,w)u](x)=a(t,x,w(x))u_x(x),\quad u\in D(A(t,w)),\quad x\in R.$$

ここで u_x は u の distribution の意味の導関数である.

又, $t\in I$, $w\in W$ に対して

$$[f(t,w)](x) = g(t,x,w(x)),\qquad x\in R$$

と置く. この f が条件 (f) を満たすことは容易に分かるので, $A(t,w)$ が条件 (A) を満たすことを確かめる. まず $A(t,w)$ は閉線型作用素で,

$$D(A(t,w))\supset Y,$$

$$\|A(t,w)-A(s,w)\|_{Y,X}\leqq \|a(t)-a(s)\|_{\infty}$$

$$(\equiv \sup\{|a(t,x,w)-a(s,x,w)|\ ;\ x\in R^N,\ |w|<r_0\}),$$

$$\|A(t,w)-A(t,z)\|_{Y,X}\leqq \|a_w\|_{\infty}|w-z|_X,$$

を満たす. ここで $\|a_w\|_{\infty}=\sum_{k=1}^{N}\|\partial a/\partial w_k\|_{\infty}$.

Banach 空間 X をノルム $|\cdot|_{(t,w)}$ で renorm した Banach 空間を $X_{(t,w)}$ と書き，その duality mapping を F とする．$t\in I$, $w\in W$, $u\in X$ に対して，$1\leqq i_0\leqq N$, $\{x_n\}\subset R$ を

$$|q(t,w)u|_X = \lim_{n\to\infty} \Big|\sum_{j=1}^{N} q_{i_0 j}(t,x_n,w(x_n))u_j(x_n)\Big|$$

となるように選び，$v\in X$ に対して

$$\langle v,\ G(u)\rangle = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} \Big[\Big\{\sum_{j=1}^{N} q_{i_0 j}(t,x_n,w(x_n))v_j(x_n)\Big\} \times \Big\{\sum_{j=1}^{N} q_{i_0 j}(t,x_n,w(x_n))u_j(x_n)\Big\}\Big]$$

と置くと，$G(u)\in F(u)$ となる．ここで $\mathrm{LIM}\ c_n$ は有界数列 $\{c_n\}$ の Banach 極限である．この G を用いると，

$$\langle A(t,w)u,\ G(u)\rangle \geqq -\alpha\ |u|^2_{(t,w)}, \qquad u\in BUC^\infty(R;R^N)$$

となる．ここで

$$\alpha=\max(\|q\|_\infty, \|q^{-1}\|_\infty)\cdot\|\gamma\|_\infty(\|q_x\|_\infty+r_0\|q_w\|_\infty).$$

$BUC^\infty(R;R^N)$ は $A(t,w)$ の core であるから，これから $A(t,w)+\alpha$ が accretive であることが分かる．

次に $A(t,w)$ に対する値域条件を調べる．係数 a を対角化

することにより $N=1$ の場合に帰着できる. $h\in BUC^1(R;R)$, $b\in BUC^1(R;R)$, $\lambda>\|b'\|_\infty$ に対して常微分方程式

$$\lambda u(x) + b(x)u'(x) = h(x), \qquad x\in R$$

が解ければ十分である. 実際 $G=\{x\in R;\ b\neq 0\}$ と置くと,

$$u\in Lip(R;R)\cap C^1(G)\cap BUC(R;R)$$

を満たす解 u が求まる. よって $A(t,w)+\alpha$ は m-accretive であり, 条件 (A) が検証される.

最後に条件 (B) を検証する. 同相写像 $S:Y\to X$ を

$$[Sv](x) = v(x) + v'(x), \qquad v\in Y, \quad x\in R$$

と定義すると, 任意の $t\in I$, $w\in W$ に対して

$$D(A(t,w)) = D(SA(t,w)S^{-1}),$$

$$SA(t,w)S^{-1} = A(t,w) + B(t,w),$$

となる. ここで

$$[B(t,w)u](x)=\{a_x(t,x,w)+w_x a_w(t,x,w)\}(1-S^{-1})u, \quad u\in X$$

$$\left(w_x a_w = \sum_{k=1}^{N}(dw_k/dx)(\partial a/\partial w_k)\right).$$

よって条件 (B) も容易に検証される.

以上で, 定理 1 を用いることにより (HS) の (2) を満たす局所解 u の存在が示される. さらに次に述べる定理 2 を用いると, (HS) の初期値 u_0 と解 u の対応は次の意味で連続である:

$$\lim_{m\to\infty} u_{0,m} = u_{0,\infty} \qquad \text{in } Y$$

ならば，$T\in(0,T_0]$ を適当に選ぶことにより，初期値 u_{0m} ($1\leqq m\leqq\infty$) に対して (HS) の条件 (2) を満たす解 u_m が存在し，

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} u_m(t) = u_\infty(t) && \text{in } C([0,T];Y), \\ &\lim_{m\to\infty} du_m(t)/dt = du_\infty(t)/dt && \text{in } C([0,T;X). \end{aligned}$$

//

上記 (3) を示すために，(CP) の型の初期値問題の列

$$(\mathrm{CP}_m)\quad \begin{aligned} &du_m/dt + A_m(t,u_m)u_m = f(t,u_m), && 0\leqq t\leqq T, \\ &u_m(0) = u_{0m}, && m=1,2,\cdots,\infty \end{aligned}$$

を考える．(CP_m) に対して次の仮定を置く．

(C 1) (CP_m) は条件 (X)-(f) を m に対して一様に満たす： すなわち X, Y, W, S, T_0 はすべての (CP_m) に共通であり，定数 λ_X, $\mu_X,\cdots,\mu_f$ は m に無関係に選べるものとする． //

(C 2) 任意の $t\in I$, $w\in W$, $y\in Y$, $x\in X$ に対して，

$$\lim_{m\to\infty} \sup_t \| A_m(t,w)y - A_\infty(t,w)y \|_X = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \| B_m(t,w)x - B_\infty(t,w)x \|_X = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \sup_t \| f_m(t,w) - f_\infty(t,w) \|_X = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \| f_m(t,w) - f_\infty(t,w) \|_Y = 0,$$

が成り立つ．ここで，

$$B_m(t,w) = SA_m(t,w)S^{-1} + A_m(t,w). \quad //$$

<u>定理2</u>．　条件（C1），（C2）を仮定する．このとき（CP_m）の初期値 u_{0m} が

$$u_{0,m} \in W \ (m=1,2,\cdots,\infty), \quad \lim_{m\to\infty} \| u_{0,m} - u_{0,\infty} \|_Y = 0$$

を満たすならば，$T\in(0,T_0]$ を適当に選ぶと，各（CP_m）の（1）を満たす一意的な解 u_m が存在して，

$$(4)\quad \begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} \sup_t \| u_m(t) - u_\infty(t) \|_Y = 0, \\ &\lim_{m\to\infty} \sup_t | du_m(t)/dt - du_\infty(t)/dt |_X = 0, \end{aligned}$$

となる．//

定理２より（3）は直ちに得られる．

<u>定理1の証明（[9]）</u>．　4段階に分けて証明する．

［Ⅰ：準備］　初期値 $u_0\in W$ に対して，$r_0>0$，$\phi_0\in W$ を

$$\| u_0 - \phi_0 \|_Y < r_0, \qquad B(\phi_0, r_0) \subset W$$

となるように選ぶ．ここで $B(\phi_0,r_0)=\{y\in Y; \| y-\phi_0 \|_Y \leq r_0\}$．$B(\phi_0,r_0)$ は Y の有界集合であるから，（A）より

$$\| A(t,w) \|_{Y,X} \leq \lambda_A, \qquad t\in I, \quad w\in B(\phi_0,r_0)$$

となる定数$\lambda_A \geqq 0$が存在する．そこで，

$$\rho = c_0 \lambda_f + \lambda_A (\| \phi_0 \|_Y + r_0)$$

$$D = \{v \in C([0,T];B(\phi_0, r_0));\ |v(t)-v(s)|_X \leqq \rho |t-s|\}$$

と置く．ここで c_0 は条件 $|y|_X \leqq c_0 \|y\|_Y$ for $y \in Y$ を満たす定数で，$T \in (0, T_0]$ は後で決める．条件（N)，（A）と $|v(t)-v(s)|_X \leqq \rho |t-s|$ を使うと，任意の $v \in D$ に対して線型作用素族 $\{A^v(t)\} = \{A(t, v(t))\}$ は T. Kato [3] の意味で X で安定である：すなわち，$-A^v(t)$ が生成する半群を $\{\exp[-sA^v(t)]\}_{s>0}$ と書けば，任意の $s_j \geqq 0$, $1 \leqq j \leqq k$, $0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_k \leqq T$, $k=1,2,\cdots$ に対して，

$$|\exp[-s_k A^v(t_k)] \cdots \exp[-s_1 A^v(t_1)]|_X \leqq M\exp\{\alpha (s_1 + \cdots + s_k)\}$$

が成り立つ．ここで

$$M = \lambda_X^2 \exp[\mu_X (\rho + 1) T_0].$$

この M に対して，$r>0$, $\phi \in W$ を

$$\| u_0 - \phi \|_Y < r\{ M\exp(\alpha T_0) \| S \|_{Y,X} \| S^{-1} \|_{X,Y} \}^{-1} \quad (\leqq r)$$

$$B(\phi, r) \subset B(\phi_0, r_0)$$

となるように選ぶ．関数空間 E を

$$E = \{v \in C([0,T];B(\phi, r));\ |v(t)-v(s)|_X \leqq \rho |t-s|\}$$

と定義する. $E \subset D$ なので, 任意の $v \in E$ に対して $\{A^v(t)\}$ は安定であり, 従って [8] により $\{A^v(t)\}$ に対する発展作用素 $\{U^v(t,s)\}$ が作れる.

$$[\Psi v](t) = U^v(t,0)u_0 + \int_0^t U^v(t,s)f(s,v(s))ds$$

と置くと, $u=\Psi v$ は

$$u \in C([0,T];Y) \cap C^1([0,T];X)$$

を満たす線型初期値問題

(L^v) $du/dt + A^v(t)u = f(t,v(t))$, $0 \leqq t \leqq T$, $u(0) = u_0$

の一意的な解である.

[II: 近似解の構成と収束] (CP) の近似解 $\{u^n\}$ を次のようにして作る. $u^0=u_0$ (初期値),

$$u^{n+1} = \Psi u^n, \qquad n = 0,1,2,\cdots.$$

ここで $T \in (0,T_0]$ を適当に選ぶと $\Psi(E) \subset E$ となる. よって $\{u^n\} \subset E$ は well defined. 次に任意の $v,w \in E$, $n=1,2,\cdots$ に対して

$$\sup_t |[\Psi^n v](t)-[\Psi^n w](t)|_X \leqq \{(c_1 T)^n/n!\} \sup_t |v(t)-w(t)|_X$$

となる. ここで

$$c_1 = \mu_A M^2 \| S \|_{Y,X} \| S^{-1} \|_{X,Y} (\| u_0 \|_Y + \lambda_f T) + \mu_f M \exp(\alpha T).$$

従って $u(t) = \lim_{n \to \infty} u^n(t)$ in $C([0,T];X)$ となる関数 u が存在する. この u は（CP）の解の候補であるが，もしもここで Y が回帰的ならば，$B(\phi, r)$ は X の閉集合である（[5; Lemma 7.3]）ので，$u(t) \in B(\phi, r)$ が従う. [2], [5] などでは，これから u が（1）を満たす（CP）の一意的な解となることを示している.

[III: 発展作用素列の収束] $\{u^n\}$ を [II] で作った近似解，$\{A(t,u^n)\}$ が生成する発展作用素を $\{U^n(t,s)\}$ とする. 線型発展作用素の性質（[8; Theorem]）と $\{u^n\}$ が収束することから，任意の $x \in X$ に対して

$$U^u(t,s)x = \lim_{n \to \infty} U^n(t,s)x \quad \text{uniformly on } 0 \leqq s \leqq t \leqq T$$

が X で存在する. 定理1の証明が終わった後で $\{U^u(t,s)\}$ が $\{A(t,u(t))\}$ に対応する発展作用素であることが分かるが，この時点では $u(t) \in W$ も示されていないので $A(t,u(t))$ は定義されていない.

[IV: 近似解のYノルムでの収束] 今仮に（1）を満たす（CP）の解 u が存在したとする. 又，$\{A(t,u)\}$ の発展作

用素が $\{U^u(t,s)\}$ であったとする．(CP) の両辺に S を作用させると形式的な計算により

$$dSu/dt + A(t,u)Su + B(t,u)Su = Sf(t,u)$$

となる．ここで (B) を使った．従って u は積分方程式

(5) $Sv(t) = U^u(t,0)Su_0$

$$+\int_0^t U^u(t,s)\{Sf(s,v(s))-B(s,v(s))Sv(s)\}ds$$

の解 v に等しいことが期待される．ところで，$T \in (0,T_0]$ を適当に選ぶことにより，(5) は空間 $C([0,T];B(\phi,r))$ の中で縮小写像の原理を用いて解くことが出来る．この解 v が (CP)の解であるとは直ちには言えないが，さらに２つの等式

$$Su^{n+1}(t) = U^n(t,0)Su_0$$

$$+ \int_0^t U^n(t,s)\{Sf(s,u^n(s))-B(s,u^n(s))Su^{n+1}(s)\}ds$$

$$Sv(t) = U^u(t,0)Su_0$$

$$+ \int_0^t U^u(t,s)\{Sf(s,v(s))-B(s,v(s))Sv(s)\}ds$$

を用いて，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t \| u^n(t) - v(t)\|_Y = 0$$

が証明される．従って，

$$u = v \in C([0,T];B(\phi, r))$$

であり，$u=v$ が（CP）の解であることが分かる．//

<u>定理２の証明（[10]参照）</u>．　Banach 空間 X の中の収束点列 $\mathbf{x}=\{x_m\}$ 全体から成る Banach 空間を $\mathbf{X}$，Y の中の収束点列 $\mathbf{y}=\{y_m\}$ 全体から成る Banach 空間を $\mathbf{Y}$ と置く．$\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ のノルムはそれぞれ

$$|\mathbf{x}|_{\mathbf{X}} = \sup_m |x_m|_X \qquad \text{for} \quad \mathbf{x}=\{x_m\} \in \mathbf{X},$$

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{Y}} = \sup_m \|y_m\|_Y \qquad \text{for} \quad \mathbf{y}=\{y_m\} \in \mathbf{Y},$$

である．Banach 空間の組（$\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$）は条件（X）を満たす．つぎに

$$\mathbf{W} = \{ \mathbf{w}=\{w_m\} \in \mathbf{Y};\quad w_m \in W,\quad \lim w_m \in W\},$$

$$\mathbf{S}\,\mathbf{y}=\{Sy_m\} \qquad \text{for} \quad \mathbf{y}=\{y_m\} \in \mathbf{Y},$$

と置く．$\mathbf{W}$ は $\mathbf{Y}$ の開集合であり，$\mathbf{S}$ は $\mathbf{Y}$ から $\mathbf{X}$ の上への線型同相写像である．$t \in I$，$\mathbf{w}=\{w_m\} \in \mathbf{W}$ に対して $\mathbf{X}$ の中の線型作用素 $\mathbf{A}(t,\mathbf{w})$ を

$$D(\mathbf{A}(t,\mathbf{w}))$$
$$=\{\mathbf{x}=\{x_m\} \in \mathbf{X};\quad x_m \in D(A_m(t,w_m)),\ \{A_m(t,w_m)x_m\} \in \mathbf{X}\},$$

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{w})\mathbf{x}=\{A_m(t,w_m)x_m\} \qquad \text{for} \quad \mathbf{x}=\{x_m\} \in D(\mathbf{A}(t,\mathbf{w}))$$

と定義する．又，$t \in I$，$\mathbf{w}=\{w_m\} \in \mathbf{W}$，$\mathbf{x}=\{x_m\} \in \mathbf{X}$ に対して，

$$|\mathbf{x}|_{(t,\mathbf{w})} = \sup_m |x_m|_{(t,w_m)}$$

と置く．$|\cdot|_{(t,w)}$ は条件（N）を満たすXのノルムである：

$$|x|_{(t,w)} \leq \lambda_X |x|_X, \qquad |x|_X \leq \lambda_X |x|_{(t,w)},$$

$$|x|_{(t,w)} \leq |x|_{(s,z)} \exp\{\mu_X(|w-z|_X + |t-s|)\}$$

for $t,s \in I$, $w, z \in W$. ここで λ_X, μ_X は（CP_m）に対する条件（C1）にある定数と同じものである．又，$-A(t,w)$ はX上の（C_0）半群 $\{\exp[-sA(t,w)]\}_{s>0}$ の生成作用素であり，

$$|\exp[-sA(t,w)]|_{(t,w)} \leq \exp(\alpha s), \qquad s \geq 0$$

を満たす．さらに $t \in I$, $w = \{w_m\} \in W$ に対して

$$f(t,w) = \{f_m(t,w_m)\} \quad (\in Y)$$

と置く．

ここで初期値問題の列（CP_m）はXの中の単独初期値問題

$$(CP)\quad \begin{cases} du/dt + A(t,u)u = f(t,u), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

と見なせることに注意する．但し，$u = \{u_m\}$ は（CP_m）の解の列である．定理２が成り立つことと（CP）の可解性とは同値であるが，（CP）は定理１の仮定を満足することが分かる．例えば，$t \in I$, $w = \{w_m\} \in W$, $x = \{x_m\} \in X$ に対して，

$$B(t,w)x = \{B_m(t,w_m)x_m\}$$

と置くと $B(t,w)$ はX上の有界線型作用素で，

$t \to B(t,w)$ $(I \to B(X))$ は強可測,

$|B(t,w)|_{X,X} \leqq \lambda_B$,

$|B(t,w) - B(t,z)|_{X,X} \leqq \mu_X \| w - z \|_Y$,

$D(SA(t,w)S^{-1}) = D(A(t,w))$,

$SA(t,w)S^{-1} = A(t,w) + B(t,w)$

などが証明されるので, 条件(B)が満たされている. 他の条件も同様に満たされている. 従って $u_0=\{u_{0m}\} \in W$ に対して, $T \in (0,T_0]$ を適当に選べば

(6) $u \in C([0,T];W) \cap C^1([0,T];X)$

を満たす(CP)の解 $u=\{u_m\}$ が存在する. u の各成分 u_m と $u_\infty = \lim u_m$ は (CP_m) と (CP_∞) の(1)を満たす解であることが分かるので, (6)から(4)が従う. //

<u>注意</u>. 上で述べた Banach 空間 X, Y は非回帰的空間なので, [1], [2], [5], [6], [7] などで得られた解の存在定理は(CP)には応用できない.

References

[1] M. G. Crandall and P. E. Souganidis, Convergence of Difference Approximations of Quasilinear Evolution Equations, Nonlinear Anal., 10 (1986), 425-445.

[2] T. J. R. Hughes, T. Kato and J. E. Marsden, Well-posed quasi-linear second-order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity, Arch. Rat. Mech. Anal., 63 (1977), 273-294.

[3] T. Kato, Linear evolution equations of "hyperbolic" type, J. Fac. Sci. Univ., Tokyo, Sect.I, 17 (1970), 241-258.

[4] ________, Linear evolution equations of "hyperbolic" type II, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 648-666.

[5] ________, Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations, Lecture Notes in Math.,448, Springer, 1975, 25-70.

[6] ________, Quasi-linear equations of evolution in nonreflexive Banach spaces, Nonlinear PDE in Applied Sciences (Proc. U. S.-Japan Seminar, Tokyo 1982), Lecture Notes Numer. Appl. Anal., no 5, Kinokuniya Book store, Tokyo, 1982, 61-76.

[7] T. Kato, Nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 45 (1986), Part 2, 9-23.

[8] K. Kobayasi, On a theorem for linear evolution equations of hyperbolic type, J. Math. Soc. Japan, 31 (1979), 647-654.

[9] K. Kobayasi and N. Sanekata, A method of iterations for quasi-linear evolution equations in nonreflexive Banach spaces, Hiroshima Math. J., Vol. 19, No. 2/3 (1989).

[10] N. Sanekata, Abstract quasi-linear equations of evolution in nonreflexive Banach spaces, Hiroshima Math. J., Vol. 19, No. 1 (1989).

[11] N. Sanekata and S. Oharu, to appear.