数理解析研究所講究録
第699巻 1989年 48-54

フラクタルと工学

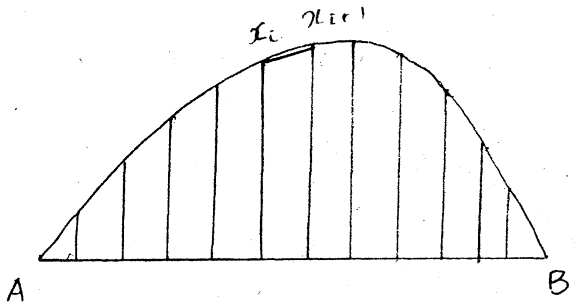
龍谷大学　　山口　昌哉

カオスとフラクタルの研究が物理と数学で云い出されて、十数年、最近は工学の各分野でその研究発表がおこなわれるようになって来た。又、情報処理学会、機械学会などでは、そのための特別のセクションまで設けられるまでになっている。ここではフラクタルに関し、工学者の間に幾分の誤解とも云うべきことが存在するので、そのことを説明しておきたい。しばしば聞くことは、「フラクタルは自然科学の一般原理から説明できない、このことがフラクタルの欠点である」とか、「自然現象は微分方程式であらわされる。したがってフラクタルは微分方程式として記述できないから自然科学でない」とかであって、このことに関して説明をしておきたい。結論から云うと、フラクタルの方法は、ニュートンよりもはるかに古い科学的な方法であって、人間は長い間そのことを忘れていたが今や、計算機の発達によって再びそのような古い方法がよみがえり、又はるかに効果的に用いられる時代となったのである。

1. 分析と綜合のみが科学の方法か？

約50年前、寺田寅彦は、その随筆の中で、当時の物理学で取扱わなかった物理現象たとえば、樹木の形、ガラスの割れ目、河の流れの分岐等について、「もしもこれらの問題をかみこなすに適当な歯」すなわち「方法」が見出された暁には、形勢は一変してこれらの「骨董的」な諸現象が新生命を吹きこまれて学会の中心問題として檜舞台に押し出されないとも限らない・・・・」（岩波寺田寅彦随筆集第四巻「自然界の縞模様」）と云っている。それから20年程たって1958年中谷宇吉郎は岩波新書「科学の方法」では、寺田の夢みた新しい「方法」への指向は、影をひそめ、科学は矢張り分析と綜合以外にはあり得ないと確言しているのは大変興味深いことである。

分析と綜合と云えば、その典型的な例が微分法（分析）と積分法（綜合）である。

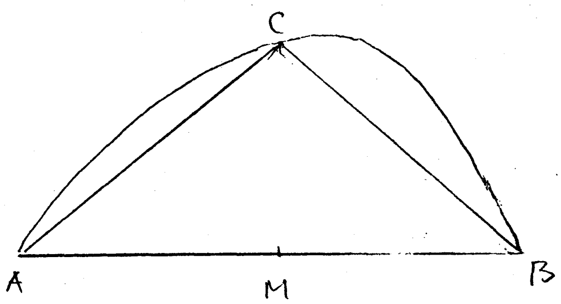


このような曲線と線分ABでかこまれた面積を求めるために分点x_i, x_{i+1}をむすぶ曲線の弧を線分$\overline{x_i x_{i+1}}$でおきかえて近

似する（分析であり微分である）そしてこのような梯形の面積の和でもつて，求める面積の近似とする。（この部分が積分であり綜合である。）これはニュートンのはじめた方法である。

しかし次のような面積のもとめ方，そのためには曲線の別の近似法があり，実はアルキメデスによつて２２００年以上前に考案されている。そのことは放物線とその弦にかこまれた部分の面積をもとめるしぼり出し法（高木貞治解析概論９８頁にある）面白いのは，高木貞治はこの方法は面白いが，アルキメデスの天才をもつてしてはじめて出来る方法であり２次曲線としての放物線にのみ適用できる特殊な方法であると述べて，もつと誰にでも出来る一般的な方法としてニュートンの方法を述べている。

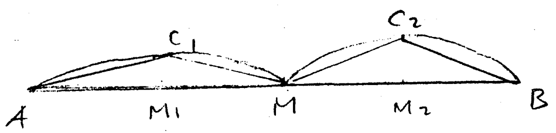
しかし，ここではこの論法を逆にして見よう，アルキメデスの方法をくだいて述べて見よう．彼の方法は次のような近似法なのである。先と同じ曲線を近似しよう．



きわめて幼稚な近似であるが，上の曲線を３角形ＡＣＢ

で近似しよう。ニュートンのように細かい部分に分けないことがこの方法の特徴であって，全体を一度に近似するのである。これこそはニュートンのような天才が考えつくような方法ではなく，幼稚園の子供か，画家がスケッチの見当をつけるときにやる，きわめて日常的方法である。数学的且つ「科学的」なのは，このことをどんどん繰りかえすところである。

近似を進めよう．ACの上にはみ出している部分，CBの上にはみ出している部分を，この近似の誤差と考え，誤差のグラフをかけば，2つの山になり，再び先の方法が適用できる。



面積の近似として，最初の3角形とここでできた2つの3角形 AC_1M, MC_2B の2つをつけ加える。このやり方は更にくりかえされ次は4つの山ができ4つ3角形をつけ加えれば近似は更に正確となる。この方法はきわめて収束がはやい。

このような関数の近似の方法は，今やフラクタルの研究やウェーブレットの研究について，ほとんどいずれの場合にも用いられる方法であり，著者によってスケッチ的近似，中点変位法，マルチレゾリューション（多重解像度の方法）とよばれてい

る。しかし考えて見れば，紀元前三世紀にアルキメデスが述べた方法にすぎない。

2. アルキメデスの方法は新しい科学の方法たり得るか？

たしかにこの方法は従来の意味での分析綜合ではないことはわかったが，新しい何をつけ加えたのか？

それをわかるためには次の関数 $\varphi(x)$ を考える．

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 2(1-x) & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

この関数を用いた力学系 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ は典型的カオティックな力学系である。$\varphi(\varphi(x)) = \varphi^2(x)$，$\varphi(\varphi(\varphi(x))) = \varphi^3(x)$ …… とかくことにすると，アルキメデスの方法を2次関数

$$(1) \qquad x(1-x)$$

を近似するやり方として見れば，実は次の展開にほかならない，

$$(2) \qquad x(1-x) = \frac{1}{4}\varphi(x) + \frac{1}{4^2}\varphi^2(x) + \cdots + \frac{1}{4^n}\varphi^n(x) + \cdots$$

このことは，先の例と，$\varphi^n(x)$ の定義とグラフを考えればすぐわかる。

ところで，級数(2)の各項の4を2でおきかえて見れば

$$\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{\varphi^2(x)}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{\varphi^n(x)}{2^n}+\cdots\cdots$$

という級数が得られるが，これが収束して，$\varphi^n(x)$は連続であるので一様収束して和は一つの連続関数$T(x)$を表わしている。これは実は1903年に高木貞治氏が発見した，いたるところ微係数が有限にならない連続な関数なのである。

$$(3)\quad T(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{\varphi^2(x)}{2^2}+\cdots+\frac{\varphi^n(x)}{2^n}+\cdots\cdots$$

つまり，アルキメデスの方法による連続関数$T(x)$の近似ができたわけである。

3．微分方程式に対応するもの

再び関数 $x(1-x)$ を考えよう。これは次の2階常微分方程式：

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-2$$

の境界条件：$y(0)=y(1)=0$ のもとでの解である。$T(x)$はどうなのか？

そのためには(4)を2進有理数 $\frac{1}{2^n}$ の上での無限連立1次方程式系と書きなおす。

$$(5) \qquad y\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left\{y\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + y\left(\frac{i}{2^n}\right)\right\} + \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \qquad 0 \le i \le 2^n - 1$$

nはすべての自然数.

これは(4)と同値なものである。 $T(x)$はいたるところ微分できないので(4)の形に書けないことは明らかだが, (5)と似た

$$(6) \qquad T\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left\{T\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + T\left(\frac{i}{2^n}\right)\right\} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$T(0) = T(1) = 0 \qquad 0 \le i \le 2^n - 1$$

という無限連立系をみたす。これはポアッソン方程式の一般化となる。(畑-山口 1984)

4. 一般化.

多次元の場合には, シルピンスキー空間(シルピンスキーガスケット)上のラプラシアン, 調和関数, ポアッソン方程式の研究として木上淳が研究を進めている.

J. Kigami 'A Harmonic Calculus on the Sierpinski Spaces' to appear in JJAM Vol. 6, No. 2.