数理解析研究所講究録
第 700 巻 1989 年 1-14

loop 群の affine Lie 環への作用に関して

愛媛大理　須藤　清一　(Kiyokazu Suto)

微分可能性のみを要求した(つまり、代数的であるとか解析的であるとかを要求しない)loop の群について考察する. §1 で一般の Lie 群に値をとる loop 群に標準的な Banach Lie 群の構造を与え、§2 以後で、単純 Lie 群に値をとる loop 群の affine Lie 環への作用について具体的に記述する.

§1. loop 群の構造

$L_k = C^k(S^1)$ とおく. $a \in L_k$ に対して、

$$|a|_k \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\substack{r\in\mathbf{R} \\ j=0,\ldots,k}} |(\partial^j a)(e^{\sqrt{-1}r})|$$

とおく. ただし

$$(\partial a)(e^{2\pi\sqrt{-1}r}) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{a(e^{2\pi\sqrt{-1}(r+t)})-a(e^{2\pi\sqrt{-1}r})\}$$

$(L_k, |\cdot|_k)$ は Banach space となる.

$P_{k;n} \underset{\mathrm{def}}{=} L_k[X_1, \ldots, X_n]$ ($X_1, \ldots, X_n$ は不定元)

とおく. 微分 $D_j = \frac{\partial}{\partial X_j} : P_{k;n} \longrightarrow P_{k;n}$ を

$$D_j X_i = \delta_{ij} \quad \text{and} \quad D_j a = 0 \qquad \text{for } \forall a \in L_k$$

によって定める.

$(L_k)^n$ の $\forall$bounded closed subset B と $j = 0, 1, 2, \ldots$ に対して、

$$|f|_{k;B,j} \underset{\mathrm{def}}{=} \sup|(D^m f)(a_1,\ldots,a_n)|_k \qquad \text{for } f \in P_{k;n}$$

とおく. ただし sup は全ての $m = (m_1, \ldots, m_n) \in (Z_{\geq 0})^n$ s.t. $|m| = m_1 + \ldots + m_n \leqq j$ と $(a_1, \ldots, a_n) \in B$ にわたってとる. また、$D^m = D_1^{m_1}\ldots D_1^{m_n}$.

$P_{k;n}$ の $|\cdot|_{k;B,j}$ に関する完備化を $C^{k;B,j}(B)$ とする. $\forall f \in C^{k;j}(B)$ に対して $\{f_i\}_{i\geq 1} \subset P_{k;n}$ が存在して $\lim_{i\to\infty}|f-f_i|_{k;B,j} = 0$. 特に、$\forall b \in B$ $\forall m = (m_1, \ldots, m_n) \in (Z_{\geq})^n$ s.t. $|m| \leqq j$ に対して $\{(D^m f_i(b)\}_{i\geq 1}$ は convergent in L_k. そこで

$$(D^m f)(b) \underset{\mathrm{def}}{=} \lim_{i\to\infty}(D^m f_i)(b)$$

とおく. $(D^m f)(b)$ は明らかに $\{f_i\}_{i\geq 1}$ の取り方によらず、次の補題も明らか.

補題1.1. $f \in C^{k;j}(B)$, $f(b) = 0$ $\forall b \in B$, かつ $b_0 \in \mathrm{Int}(B)$ ならば

$$(D^m f)(b_0) = 0 \qquad \forall m \in (Z_{\geq 0})^n \text{ s.t. } |m| \leqq j.$$

$(L_k)^n$ の任意の開集合 U に対して、U 上の L_k 値函数で、U の各点の適当な有界閉近傍 B の上で $C^{k;j}(B)$ のある元と値が一致するようなものの全体を $C^{k;j}(U)$ とおく. 上の補題によって、任意の $f \in C^{k;j}(U)$ に対して、その微分 $D^m f$ $(m \in (Z_{\geqq 0})^n,\ |m| \leqq j)$ が自然に定義できる.

$C^{k;j}(U)$ に $C^{k;j}(B)$, B は $(L_k)^n$ の有界閉集合で U に含まれるもの、達の帰納極限としての位相を与える. また $C^{k;\infty}(U)$ を $C^{k;j}(U)$ 達の射影極限とする. 定義によって、

補題1.2. $j = 1, 2, \ldots$, $m \in (Z_{\geqq 0})^n$, $|m| \leqq j$ とする. $f \longrightarrow D^m f$ は $C^{k;j}(U)$ から $C^{k;j-|m|}(U)$ の中への連続な線型写像を定める.

さらに次の補題が成立つ.

補題1.3. i) $\forall f \in C^{k;0}(U)$ は連続で、U に含まれる $\forall$有界閉集合上で一様連続.

ii) $\forall f \in C^{k;1}(U)$ は U から L_k の中への (Fréchet 微分の意味で) C^1 写像であって、その微分 df は $df_u(v) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(u) v_i$ for $v = (v_1, \ldots, v_n)$ によって与えられる.

ただし、$(L_k)^n$ には $|v|_k \underset{\text{def}}{=} \sup_i |v_i|_k$ なる norm を与えて Banach 空間とする.

この補題によって、$C^{k;j}(U)$ の元が C^j 級であることがわかる. また、

$$C^{k;j}(U, (L_k)^{n'}) \underset{\text{def}}{=} C^{k;j}(U)\times\ldots\times C^{k;j}(U)$$

（n′ 個）

とおくと、$C^{k;j}(U, (L_k)^{n'})$ の元は U から $(L_k)^{n'}$ への写像とみなせるが、やはり C^j 級である.

有限次元次元 C^{j+k} 多様体 M に対して、

$$M(L_k) \underset{\text{def}}{=} \{f:S^1 \longrightarrow M \mid f \text{ は } C^k \text{ 級}\}$$

とおく. もう一つの有限次元 C^{j+k} 多様体 M′ と、C^{j+k} 写像 $F:M \longrightarrow M'$ に対して $\Psi(F):M(L_k) \longrightarrow M'(L_k)$ を

$$\Psi(F)(f)(e^{2\pi\sqrt{-1}r}) \underset{\text{def}}{=} F(f(e^{2\pi\sqrt{-1}r}))$$

$$\text{for } f \in M(L_k),\ r \in \mathbf{R}$$

と定義する. $M(L_k)$ には open-compact 位相を一般化した自然な位相がはいる. この位相に関して、

補題1.4. i)　$M(L_k)$ の連結成分と M の基本群との間には自然な一対一対応が存在する. 特に、$M(L_k)$ が連結であることと、M が連結かつ単連結であることは同値である.

ii)　$\Psi(F):M(L_k) \longrightarrow M'(L_k)$ は連続である.

iii)　M が C^n の部分集合である時、$M(L_k)$ は $(L_k)^n$ の部分集合となるが、M が開（閉）集合ならば、$M(L_k)$ も $(L_k)^n$ の開（閉）集合である.　また M' が $C^{n'}$ の部分集合であるとき $\Psi(F)$ は $C^{k;j}(M(L_k), M'(L_k))$ の元である.

いま、M が n 次元 Lie 群 G である場合を考える.　上の補題によって $G(L_k)$ は位相群であり、V が単位元の座標近傍の時 $V(L_k)$ は $(L_k)^n$ のある開集合と同相になる.
従って、$G(L_k)$ は $(L_k)^n$ を model とする位相多様体になるが、iii) の最後の主張と補題1.3 の後の注意を用いて、群演算が C^∞ 級になることを示すことができる.　つまり、

定理1.5.　$k = 0, 1, 2, \ldots$ とし、G を n 次元 Lie 群、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする.　この時、G の単位元の十分小さい近傍 V と局所座標 $F:V \longrightarrow \mathfrak{g}$ に対して、$\{gV(L_k), \Psi(F)\}_{g\in G(L_k)}$ を atlas として、$G(L_k)$ は $\mathfrak{g}(L_k) \simeq (L_k)^n$ を model とする Lie 群となる.

§2.　affine Lie 環

以下では、G は連結かつ単連結な複素半単純 Lie 群、$\mathfrak{g}$

はその Lie 環とする.

$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\tilde{\mathfrak{g}}_k = \mathfrak{g}(L_k)$ とおく. $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ は Banach Lie 群 $\tilde{G}_k = G(L_k)$ の Lie 環であるが、$f, g \in \tilde{\mathfrak{g}}_k$ の括弧積 $[f, g]_0$ は

$$[f, g]_0(s) \underset{\mathrm{def}}{=} [f(s), g(s)] \quad \text{for } s \in S^1$$

で与えられる. $\mathfrak{g}$ は(定数函数の全体として)$\tilde{\mathfrak{g}}_k$ の部分 Lie 環とみなせる. $B(.,.)$ を $\mathfrak{g}$ 上の Killng 形式として、

$$B(f, g) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_0^1 B(f(e^{2\pi\sqrt{-1}r}), g(e^{2\pi\sqrt{-1}r}))dr$$

$$f^*(s) \underset{\mathrm{def}}{=} f(s)^* \quad \text{for } s \in S^1$$

$$B_0(f, g) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_0^1 B(f(e^{2\pi\sqrt{-1}r}), g(e^{2\pi\sqrt{-1}r}))dr$$

とおく. B は $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ 上の非退化対称不変な双線型形式、$f \longrightarrow f^*$ は involutive な反線型反同型、B_0 は正定値な内積、となり、それぞれ $\mathfrak{g}$ 上で定義されたものの拡張となっている.

$$|f|_k \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\substack{r \in \mathbf{R} \\ j=0,\ldots,k}} B_0(\partial^j f(e^{\sqrt{-1}r}), \partial^j f(e^{\sqrt{-1}r}))^{1/2} \qquad \text{for } f \in \tilde{\mathfrak{g}}_k$$

とおく. 明らかに $|\cdot|_k$ の定める $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ の位相は、前節のそれと一致し、$\tilde{\mathfrak{g}}_k$ は Banach Lie 環となる.

以下では $k \geqq 1$ とする. また $t \in L_k$ を S^1 上の恒等写像とする.

$\tilde{\mathfrak{g}}_k$ 上の双線型形式 Z を

$$Z(f,\ g) \underset{\mathrm{def}}{=} B(\partial f,\ g) \qquad \text{for } f,\ g \in \tilde{\mathfrak{g}}_k$$

によって定める.

補題2.1.　Z は連続な 2-cocycle である.

Z による $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ の 1 次元中心拡大を $\hat{\mathfrak{g}}_k$ とする. 即ち、$1 \in \mathbf{C}$ を c と書くと

$$\hat{\mathfrak{g}}_k = \tilde{\mathfrak{g}}_k + \mathbf{C}c$$

（vector 空間としての直和）

$$[f_1+r_1c,\ f_2+r_2c] \underset{\mathrm{def}}{=} [f_1,\ f_2]_0 + Z(f_1,\ f_2)c$$

$$\text{for } f_1,\ f_2 \in \tilde{\mathfrak{g}}_k,\ r_1,\ r_2 \in \mathbf{C}.$$

$Z(\mathfrak{g},\ \tilde{\mathfrak{g}}_k) = 0$ 故 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}}_k$ である. norm $|\cdot|_k$ を $\hat{\mathfrak{g}}_k$ まで

$$|f+rc|_k \underset{\mathrm{def}}{=} \max(|f|_k,\ |r|)$$

$$\text{for } f \in \tilde{\mathfrak{g}}_k,\ r \in \mathbf{C}$$

により、拡張する. Z の連続性により、$(\hat{\mathfrak{g}}_k,\ |\cdot|_k)$ は Banach Lie 環となる.

$\tilde{\mathfrak{g}} \underset{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}[t,\ t^{-1}]$ とおく. Z を $\tilde{\mathfrak{g}}$ に制限したものによる中心拡大を考えれば、普通の affine Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ を得る. 従って、$\hat{\mathfrak{g}}_k$ は affine Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ を稠密な部分環として含む.

B と * を $\hat{\mathfrak{g}}_k$ 上に、次の様にして拡張する.

$$B(f_1+r_1c,\ f_2+r_2c) = B(f_1,\ f_2)$$
$$(f_1+r_1c)^* = f^*+\overline{r_1}c$$
$$\text{for } f_1,\ f_2 \in \tilde{g}_k,\ r_1,\ r_2 \in C.$$

B on $\hat{g}_k$ は対称不変な双線型形式で核 Cc を持つ. また * on $\hat{g}_k$ は involutive な反線型同型である. さらに B_0 も

$$B_0(f_1,\ f_2) \underset{\text{def}}{=} B(f_1,\ f_2)$$
$$\text{for } f_1,\ f_2 \in \hat{g}_k$$

によって拡張する.

§3. loop 群の affine Lie 環への作用

$\tilde{G}_k$ の $\tilde{g}_k$ 上の随伴作用を Ad_0 と書く.

$\tilde{g}_k$ ($\hat{g}_k$) 上の有界線型作用素で、逆が存在して有界、さらに括弧積を保つものの全体を $Aut(\tilde{g}_k)$ ($Aut(\hat{g}_k)$) とおく. $Ad_0(\tilde{G}_k) \subset Aut(\tilde{g}_k)$ である.

定理3.1. $\forall g \in \tilde{G}_k$ に対して、$z_g \in \tilde{g}_{k-1}$ が一意に存在して、

$$Z(Ad_0(g)x, Ad_0(g)y) = Z(x,y)+B(z_g,[x,y]_0)$$
$$\text{for } \forall x,\ y \in \tilde{g}_k.$$

証明. 存在すれば一意性は明らかである.

主張を満たす $g \in \tilde{G}_k$ は B の不変性により、部分群をなすから、生成元に対して存在を示せば良い． G を単連結としたので $\tilde{G}_k$ は連結． 従って、$\exp(fz)$、 $f \in L_k$、 $z \in \mathfrak{g}$、の形の元から生成される． $\mathrm{Ad}_0(\exp(fz)) = \exp(\mathrm{ad}_0(fz))$ を巾級数に展開して計算すると、B の不変性により

$$Z(\mathrm{Ad}_0(e^{fz}x, \mathrm{Ad}_0(e^{fz}y) = Z(x,y)+B((\partial f)z,[x,y]_0)$$

を得る． 証明終

系3.2. i) $$z_{\exp(fz)} = (\partial f)z \qquad \forall f \in L_k,\ z \in \mathfrak{g}$$

ii) $$z_{g_1 g_2} = z_{g_2} + \mathrm{Ad}_0(g_2^{-1})z_{g_1} \qquad \forall g_1,\ g_2 \in \tilde{G}_k$$

iii) $$z_1 = 0 \text{ and } z_{g^{-1}} = -\mathrm{Ad}_0(g)z_g \qquad \forall g \in \tilde{G}_k$$

$g \in \tilde{G}_k$ に対して $\mathrm{Ad}(g):\hat{\mathfrak{g}}_k \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}}_k$ を

$$\mathrm{Ad}(g)(x+rc) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ad}_0(g)x+(B(z_g,x)+r)c \qquad \text{for } x \in \tilde{\mathfrak{g}}_k,\ r \in \mathbf{C}$$

と定義する． 定義によって $\mathrm{Ad}(g)c = c \quad \forall g \in \tilde{G}_k$.

系3.3. Ad は $\tilde{G}_k$ から $\mathrm{Aut}(\hat{\mathfrak{g}}_k)$ の中への群準同型である．

また系3.2 i) から

系3.4. $\tilde{G}_k \ni g \longrightarrow z_g \in \tilde{\mathfrak{g}}_{k-1}$ は C^∞ 写像.

が成立つので、

系3.5. $Ad:\tilde{G}_k \longrightarrow GL(\hat{\mathfrak{g}}_k)$ は C^∞ 写像.

さらに

系3.6. $$Ad(e^x) = \exp(ad\ x) \qquad \forall x \in \tilde{\mathfrak{g}}_k.$$

も示される.

補題3.7. $$Z(\partial x, y) + Z(x, \partial y) = 0 \qquad \text{for } \forall x, y \in \tilde{\mathfrak{g}}_{k+1}.$$

が成立つから、∂ は $\partial(x+rc) \underset{def}{=} \partial x$ for $x \in \tilde{\mathfrak{g}}_k$, $r \in C$ とすることにより、$\hat{\mathfrak{g}}_k$ から $\hat{\mathfrak{g}}_{k-1}$ の中への線型作用素に拡張され、微分の性質をもつ. 即ち

$$\partial[x, y] = [\partial x, y] + [x, \partial y] \qquad \text{for } x, y \in \tilde{\mathfrak{g}}_k$$

を満たす. そこで $\hat{\mathfrak{g}}_k^e \underset{def}{=} \hat{\mathfrak{g}}_k + C\partial$ とおき、その上の括

弧積を

$$[x_1+r_1\partial, x_2+r_2\partial] \underset{\mathrm{def}}{=} [x_1,x_2]+(r_1-r_2)\partial x$$

によって定義する． $[\hat{\mathfrak{g}}_k^e, \hat{\mathfrak{g}}_k^e] \subset \hat{\mathfrak{g}}_{k-1}$ である． $\tilde{\mathfrak{g}}_k^e$ とその上の括弧積も同様に定める．

$\hat{\mathfrak{g}}_k^e$ （$\tilde{\mathfrak{g}}_k^e$）の上の有界作用素で、逆が存在して有界、さらに逆と共に上で定義した括弧積を保つものの全体を $\mathrm{Aut}(\hat{\mathfrak{g}}_k^e)$ （$\mathrm{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}}_k^e)$）とおく．

補題3.8. $\mathrm{Ad}_0(g)\circ\partial\circ\mathrm{Ad}_0(g^{-1}) = \partial+\mathrm{ad}_0 z_{g^{-1}}$

for $\forall g \in \tilde{G}_k$.

を用いると、Ad_0 及び Ad がそれぞれ $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}}_k^e)$ 及び $\mathrm{Aut}(\hat{\mathfrak{g}}_k^e)$ への準同型まで拡張される． 即ち

定理3.9. $g \in \tilde{G}_k$, $x \in \tilde{\mathfrak{g}}_k$, $y \in \hat{\mathfrak{g}}_k$, $r \in \mathbf{C}$ に対して

$$\mathrm{Ad}_0(g)(x+r\partial) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ad}_0(g)x + r\partial + rz_{g^{-1}},$$

$$\mathrm{Ad}(g)(y+r\partial) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ad}(g)y + r\partial + rz_{g^{-1}},$$

とおくと Ad_0、 Ad はそれぞれ $\tilde{G}_k$ から $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}}_k^e)$、$\mathrm{Aut}(\hat{\mathfrak{g}}_k^e)$ の中への群準同型である．

§4. Cartan 部分環の中心化群と正規化群

Ad に関する中心化群及び正規化群をそれぞれ Z(.) 及び N(.) で表す.

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とし、Δ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系、Δ_+、$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ をそれぞれ Δ の正 root の全体、単純 root の全体とする. 対応する $\mathfrak{g}$ の Chevalley 基底を x_α $(\alpha \in \Delta)$、h_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ とする. $\tilde{G}_k$ の元 $w_\alpha(u)$、$h_\alpha(u)$ $(\alpha \in \Delta, u \in C^\times)$ を

$$w_\alpha(u) \underset{\mathrm{def}}{=} e^{ux_\alpha} e^{-u^{-1}x_\alpha} e^{ux_\alpha}$$

$$h_\alpha(u) \underset{\mathrm{def}}{=} w_\alpha(1)^{-1} w_\alpha(u)$$

と定めると

定理4.1.[3] i) $w_\alpha(u)$ 達は $\mathfrak{h}$ の正規化群 N を生成する.

ii) $h_\alpha(u)$ 達は $H = \exp \mathfrak{h} \subset G$ の元であり、

$$(C^\times)^l \ni (u_1, \ldots, u_l) \longrightarrow h_{\alpha_1}(u_1) \ldots h_{\alpha_l}(u_l) \in H$$

は Lie 群の同型である.

$\Psi(h_\alpha) : L_k{}^\times \longrightarrow H(L_k)$ も h_α と書くことにすると、この定理と補題1.4 iii) によって

系4.2. $(u_1, \ldots, u_l) \longrightarrow h_{\alpha_1}(u_1) \ldots h_{\alpha_l}(u_l)$ は $(L_k{}^\times)^l$ と $H(L_k)$ の間の Banach Lie 群としての同型を与える.

さて、$\hat{\mathfrak{h}}^e \underset{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{h} + \mathbf{C}c + \mathbf{C}\partial$ とおくと、これは affine 型の Kac-Moody 環 $\hat{\mathfrak{g}}^e \underset{\mathrm{def}}{=} \hat{\mathfrak{g}} + \mathbf{C}\partial \subset \hat{\mathfrak{g}}^e_k$ の Cartan 部分環である. これの中心化群と正規化群は次によって与えられる.

定理4.3. i) $Z(\hat{\mathfrak{h}}^e) = H$

ii) $N(\hat{\mathfrak{h}}^e) =$

$$\{h_{\alpha_1}(c_1 t^{n_1}) \ldots h_{\alpha_l}(c_l t^{n_l}) \mid n_1, \ldots, n_l \in \mathbf{Z},\ c_1, \ldots, c_l \in \mathbf{C}^\times\}$$

従って、正規化群を中心化群で割ると affine Weyl 群を得る.

参考文献

[1] Garland, H., The arithmetic theory of loop groups, Publ. Math. IHES, 52(1980), 5-136.

[2] Goodman, R., and Wallach, N. R., Structure and unitary cocycle representatons of loop groups and the group of deffeomorphisms of the circle, J. für Math., 347(1984), 69-133.

[3] Steinberg, R., Génélateurs, relations et revêtements des groupes algébriques, in Colloque sur la Théorie des Groupes Algébrique, held in Brussels, Gauthier-Villars, 1962, 113-127.