数理解析研究所講究録
第700巻 1989年 15-30

古典型実 Lie 環の admissible な巾零軌道の分類

東北大 理　　太田琢也　　(Takuya Ohta)

§0 序

M. Duflo は[D]で実Lie環上の線型形式がadmissibleであるという概念を導入した。 D. Vogan は有限シュバレー群における巾単表現に相当する簡約可能実 Lie 群のべき単表現という概念を模索している。 その中で彼は巾単表現は何らかの軌道方法により admissible な巾零(coadjoint)軌道に対応する表現の成分であるべきだと指摘している([V1],[V2])。 複素簡約可能 Lie 群については、Barbasch, Vogan [BV] により上の対応はほぼ決定されているが、実 Lie 群の場合には先ず admissible な巾零軌道の分類を与えることが必要になる。 本稿では古典型実 Lie 環のいかなる巾零軌道が admissible になるかについて解説する。

§1 admissible な線型形式

(1.1) $G_{\mathbb{R}}$ を実 Lie 環とし、$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ をその Lie 環とする。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上の線型形式 $\lambda \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ について

$$G_{\mathbb{R}}(\lambda) := \{ g \in G_{\mathbb{R}} : g\lambda = \lambda \},\ \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}(\lambda) := \{ X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} : X\lambda = 0 \}$$

と置く。 ここで作用は coadjoint 作用を考えている。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上の歪対称双線型形式 $(X,Y) \mapsto \lambda([X,Y])$ の根基は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}(\lambda)$ に一致するから、この線型形式は商空間 $T_{\lambda} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} / \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}(\lambda)$ 上の非退化なシンプレクティック形式 ω_{λ} を定める。 $G_{\mathbb{R}}(\lambda)$ は T_{λ} に作用し、ω_{λ} を不変にするから準同型 $G_{\mathbb{R}}(\lambda) \longrightarrow Sp(\omega_{\lambda})$ を得る。 一方、$Sp(\omega_{\lambda})$ はメタプレクティック被

覆と呼ばれる２重の被覆群 $Mp(\omega_\lambda)$ を持つ。$G_{\mathbb{R}}(\lambda) \longrightarrow Sp(\omega_\lambda)$ と $Mp(\omega_\lambda) \longrightarrow Sp(\omega_\lambda)$ から構成したファイバー積を $G_{\mathbb{R}}(\lambda)^\sim$ で表し、$\varphi : G_{\mathbb{R}}(\lambda)^\sim \longrightarrow G_{\mathbb{R}}(\lambda)$ を射影とする。ζ を $\mathrm{Ker}\varphi$ の自明でない元とする。また $G_{\mathbb{R}}(\lambda)_0$ を $G_{\mathbb{R}}(\lambda)$ の単位元の連結成分とし、$G_{\mathbb{R}}(\lambda)_0^\sim := \varphi^{-1}(G_{\mathbb{R}}(\lambda)_0)$ とおく。

定義１(Duflo [D]) Lie 群 $G_{\mathbb{R}}(\lambda)^\sim$ の表現 (π, V) が admissible であるとは、$\pi(\zeta) = -\mathrm{id}_V$ かつ $d\pi(X) = \sqrt{-1}\,\lambda(X)\mathrm{id}_V$ $(X \in \underline{g}_{\mathbb{R}}(\lambda))$ であることをいう。また $G_{\mathbb{R}}(\lambda)^\sim$ が少なくとも１つ admissible な表現を持つとき $\lambda \in \underline{g}_{\mathbb{R}}^*$ は admissible であると言う。

注意１　$\lambda \in \underline{g}_{\mathbb{R}}^*$ の admissibility は Lie 環のみに依存し、群 $G_{\mathbb{R}}$ のとり方によらない([D. Remarque II.2.3])。

以下 $\underline{g}_{\mathbb{R}}$ は簡約可能とし、$\underline{g}_{\mathbb{R}} = \underline{k}_{\mathbb{R}} + \underline{p}_{\mathbb{R}}$ をカルタン分解とする。$\langle\ .\ \rangle$ を $\underline{g}_{\mathbb{R}}^*$ 上の $G_{\mathbb{R}}$ 不変な対称双線型形式で $\langle\ .\ \rangle|_{\underline{k}_{\mathbb{R}}}$ が負定値、$\langle\ .\ \rangle|_{\underline{p}_{\mathbb{R}}}$ が正定値であるものとする。$x \in \underline{g}_{\mathbb{R}}^*$ に対して $\lambda_x \in \underline{g}_{\mathbb{R}}^*$ を $\lambda_x(X) := \langle x, X\rangle$ $(X \in \underline{g}_{\mathbb{R}})$ により定めれば、$\underline{g}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{g}_{\mathbb{R}}^*$ $(x \mapsto \lambda_x)$ は $G_{\mathbb{R}}$ 同変な同型となる。この同型により $\underline{g}_{\mathbb{R}}$ と $\underline{g}_{\mathbb{R}}^*$ を同一視し、λ_x が admissible であるとき $x \in \underline{g}_{\mathbb{R}}$ は admissible であると言うことにする。

(1.2) メタプレクティック群 $Mp(\omega_\lambda)$ の構成は [D] で与えられているがこの構成は複雑で、$\underline{g}_{\mathbb{R}}$ においてその巾零元の admissibility を決定することは、容易ではない。そこで以下 $\underline{g}_{\mathbb{R}}$ の巾零軌道の admissibility を関口の全単射を通じて、対応する対称対の巾零軌道の言葉に言い替えることを考える。

定義２　G を複素簡約可能代数群、$\underline{g}$ をその Lie 環、θ を G の回帰的自己同型とする。θ が誘導する $\underline{g}$ の自己同型をも θ で表し、次の様に置く。

$K:=\{ g\in G;\ \theta(g)=g \}$, $\underline{k}:=\{ X\in \underline{g};\ \theta(X)=X \}$, $\underline{p}:=\{ X\in\underline{g};\ \theta(X)=-X\}$。

このとき対 $(\underline{g},\underline{k})$ を θ から定まる対称対、K をその固定化群、$\underline{p}$ を付随するベクトル空間と呼ぶ。

以下 G, θ, K, $\underline{k}$, $\underline{p}$ は上の通りとし、$G_{\mathbb{R}}$ は G の θ と可換な回帰的自己同型（複素共役）$\tau: G \to G$ により、$G_{\mathbb{R}}=\{g \in G;\ \tau(g)=g \}$ として得られるものとする。更に $\theta|_{G_{\mathbb{R}}}$ は $G_{\mathbb{R}}$ のカルタン回帰的自己同型になっているものと仮定する。K, $G_{\mathbb{R}}$ はそれぞれ随伴作用で $\underline{p}$, $\underline{g}_{\mathbb{R}}$ に作用する。$\underline{p}$ (resp. $\underline{g}_{\mathbb{R}}$) の巾零軌道の全体を $N(\underline{p})$ (resp. $N(\underline{g}_{\mathbb{R}})$) で表し、その K 軌道 (resp. $G_{\mathbb{R}}$ 軌道) の全体を $[N(\underline{p})]_K$ (resp. $[N(\underline{g}_{\mathbb{R}})]_{G_{\mathbb{R}}}$) で表す。

定理１　（関口[S], [V2, Chap.11] 参照）　任意の $O_{\mathbb{R}} \in [N(\underline{g}_{\mathbb{R}})]_{G_{\mathbb{R}}}$ について、$\underline{g}_{\mathbb{R}}$ の S-triple $(h_{\mathbb{R}}, x_{\mathbb{R}}, y_{\mathbb{R}})$ で $\theta(x_{\mathbb{R}})=-y_{\mathbb{R}}$, $\theta(h_{\mathbb{R}})=-h_{\mathbb{R}}$, $x_{\mathbb{R}} \in O_{\mathbb{R}}$ となるものが、$G_{\mathbb{R}}\cap K$ による共役を除いて一意的に存在する。

$$x_{\theta} := \sqrt{-1}\, x_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}\, y_{\mathbb{R}} + h_{\mathbb{R}}$$

と置けば x_{θ} は $\underline{p}$ の巾零元となる。$O_{\theta} \in [N(\underline{p})]_K$ を x_{θ} の K 軌道とすれば、O_{θ} は S-triple のとり方に依存せず、$O_{\mathbb{R}} \to O_{\theta}$ は $[N(\underline{g}_{\mathbb{R}})]_{G_{\mathbb{R}}}$ から $[N(\underline{p})]_K$ への全単射を与える。

$x \in N(\underline{p})$ について、$K(x):=\{g \in K;\ gx=x \}$, $\underline{k}(x):= \mathrm{Lie}(K(x))$ $= \{ X \in \underline{k};\ Xx=0 \}$ とすると、$K(x)$ は $\underline{k}/\underline{k}(x)$ に随伴作用で作用する。$K(x)$ の指標 δ_x を $\delta_x(g):= \{\det(g|_{\underline{k}/\underline{k}(x)})\}^{-1}$ $(g \in K(x))$ により定

める。 $K(x)^{\sim}$ を２つの準同型 $\delta_x: K(x) \to \mathbb{C}^{\times}$ と $\mathbb{C}^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ $(z \mapsto z^2)$ から構成したファイバー積とする。 $K(x)^{\sim}$ は $K(x)$ の２重の被覆である。 ξ を被覆準同型 $K(x)^{\sim} \to K(x)$ の核(kernel)の自明でない元とする。

定義３　$K(x)^{\sim}$ の表現 (π, V) は、π の $(K(x)^{\sim})_0$ への制限が自明、かつ $\pi(\xi) = -id_V$ であるとき、admissible であると呼ぶ。

命題１(J. Schwartz. [V2.Chap.11]参照) $x_{\mathbb{R}}$, x_{θ} を定理１の通りとする。 このとき $G_{\mathbb{R}}(x_{\mathbb{R}})^{\sim} := G_{\mathbb{R}}(\lambda_{x_{\mathbb{R}}})^{\sim}$ の（定義１の意味での）admissible な表現の全体と、$K(x_{\theta})^{\sim}$ の（定義３の意味での）admissible な表現の全体は１対１に対応する。

上の Schwartz の結果により、$\underline{g}_{\mathbb{R}}$ の admissible な巾零 $G_{\mathbb{R}}$ 軌道を決定するには、$\underline{p}$ の admissible な巾零 K 軌道を決定すればよい。 更に $x \in N(\underline{p})$ の admissibility は次のように言い替えられる。

命題２　$x \in N(\underline{p})$ が admissible であるための必要十分条件は、$K(x)_0$ の指標 χ で $\chi(g)^2 = \delta_x(g)$ $(g \in K(x)_0)$ となるものが存在することである。

(1.3)　命題２により、$x \in N(\underline{p})$ が admissible であるか否かを決定するには、δ_x のルートがとれるか否かを決定すればよい。 そこで δ_x の計算法 を与える。

x を 0 でない巾零元とする。[KR] により正規 S-triple (h, x, y) (即ち、$h \in \underline{k}$, $y \in \underline{p}$) をとることができる。

$$\underline{k} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \underline{k}_i \quad , \quad \underline{p} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \underline{p}_i$$

を $\underline{k}$, $\underline{p}$ の ad(h) に関する固有空間への分解とする。 $\underline{sl}(2)$ の表現論より $\underline{k}(x) = \bigoplus_{i\geq 0} \underline{k}(x) \cap \underline{k}_i$ である。 $\delta_x : K(x) \to \mathbb{C}^{\times}$ の微分をも δ_x で表す。このとき次が成り立つ。

補題 1 (1) $\underline{k}(x) \cap \underline{k}_0$ は簡約可能であり、和 $\bigoplus_{i>0} \underline{k}(x) \cap \underline{k}_i$ は巾零元からなる。特に $\delta_x|(\bigoplus_{i>0} \underline{k}(x) \cap \underline{k}_i) = 0$ である。

(2) $\underline{k}$ カルタン部分環 $\underline{t}$ で、$h \in \underline{t}$ かつ $\underline{t}(x) := \{t \in \underline{t};\ [x,t]=0\}$ が $\underline{k}(x) \cap \underline{k}_0$ のカルタン部分環となるものが存在する。

(3) $\underline{t}$ を (2) のようにとると、δ_x は $\underline{t}(x)$ 上次のように計算される。

$$\begin{aligned}\delta_x(t) &= \sum_{i>1} \mathrm{tr}(\,\mathrm{ad}(t)|_{\underline{k}_i}) - \sum_{i>2} \mathrm{tr}(\,\mathrm{ad}(t)|_{\underline{p}_i}) \\ &= -\sum_{i>1} \mathrm{tr}(\,\mathrm{ad}(t)|_{\underline{p}_i}) + \sum_{i>2} \mathrm{tr}(\,\mathrm{ad}(t)|_{\underline{k}_i}) \qquad (t \in \underline{t}(x)).\end{aligned}$$

注意２ $\underline{g}_{\mathbb{R}}$ が複素簡約 Lie 環であるとき、$\underline{g} \cong \underline{g}_{\mathbb{R}} \oplus \underline{g}_{\mathbb{R}}$,

$$\underline{k} \cong \{(X,X)\ ;\ X \in \underline{g}_{\mathbb{R}}\},\quad \underline{p} \cong \{(X,-X)\ ;\ X \in \underline{g}_{\mathbb{R}}\}$$

である。故に $\underline{t}$ を補題１,(2) のようにとれば $\underline{k}$ と $\underline{p}$ は $\underline{t}$ 加群として同型である。このことと上の公式により $\delta_x|_{\underline{t}(x)} = 0$ である。故に δ_x は $K(x)_0$ 上自明で、x は admissible である。従って複素簡約 Lie 環の任意の巾零元は admissible である。

(1.4) ここでは、容易に巾零元の admissibility を決定できる次の４つの対称対について考える。

(AI) $(\underline{sl}(n,\mathbb{C}),\ \underline{o}(n,\mathbb{C}))$, $G = SL(n,\mathbb{C})$, $K = SO(n,\mathbb{C})$.

(AI') $(\underline{gl}(n,\mathbb{C}),\ \underline{o}(n,\mathbb{C}))$, $G = GL(n,\mathbb{C})$, $K = O(n,\mathbb{C})$.

(AII) $(\underline{sl}(n,\mathbb{C}),\ \underline{sp}(n,\mathbb{C}))$, $G = SL(n,\mathbb{C})$, $K = Sp(n,\mathbb{C})$.

(AII') $(\underline{gl}(n,\mathbb{C}),\ \underline{sp}(n,\mathbb{C}))$, $G = GL(n,\mathbb{C})$, $K = Sp(n,\mathbb{C})$.

命題3　$(\underline{g}, \underline{k})$ を上のいずれかの対称対とするとき、$\underline{p}$ の任意の巾零元は admissible である。

証明　$x \in N(\underline{p})$ とし、(h, x, y) を正規 S-triple とする。また $\underline{k}$ のカルタン部分環 $\underline{t}$ を補題1、(2) のようにとると、補題1、(3) により

$$2\delta_x(t) = 2\{\sum_{i\geq 2} tr(ad(t)|_{\underline{k}_i}) - \sum_{i\geq 2} tr(ad(t)|_{\underline{p}_i})\} + tr(ad(t)|_{\underline{k}_1}) - tr(ad(t)|_{\underline{p}_1}) \quad (t \in \underline{t}(x))$$

である。

例えば $(\underline{g}, \underline{k}) = (\underline{sl}(2m,\mathbb{C}), \underline{sp}(2m,\mathbb{C}))$ $(n=2m)$ とする。

$\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\}$ を $\underline{k}$ の ウエイト格子の基底とすると、$\underline{k}$ の $\underline{t}$ に関するルート系 $\Delta(\underline{k},\underline{p})$、$\underline{p}$ の $\underline{t}$ にかんするウエイトの集合 $\Lambda(\underline{p},\underline{t})$ は次のように与えられる。

$\Delta(\underline{k},\underline{t}) = \{\ \pm(\varepsilon_j \pm \varepsilon_k)\ (1\leq j<k\leq m),\quad \pm 2\varepsilon_j\ (1\leq j\leq m)\ \}$

$\Lambda(\underline{p},\underline{t}) = \{\ \pm(\varepsilon_j \pm \varepsilon_k)\ (1\leq j<k\leq m)\ \}$。

また $\varepsilon_j(h) \in \mathbb{Z}$ である。 これらのことにより $\delta_x(t)$ $(t \in \underline{t}(x))$ は

$$\delta_x(t) = \sum_{i\geq 2} \sum_{\substack{\alpha \in \{\pm 2\varepsilon_j\} \\ \alpha(h)=i}} \alpha(t)$$

と計算される。 補題1、命題2により x は admissible である。

他の場合も同様である。　q.e.d.

§2　(AIII′), (AIII) 型対称対の admissible な巾零軌道の分類

(2.1) この節では (AIII′), (AIII) 型対称対の admissible な巾零 K 軌道を決定する。

V_a, V_b をそれぞれ次元が m, n $(m, n < \infty)$ の複素ベクトル空間とし、$V := V_a \oplus V_b$ とおく。 $s : V \to V$ を $s|_{V_a} = id_{V_a}$, $s|_{V_b} = -id_{V_b}$ により定まる V の回帰的自己同型とする。 $G := SL(V)$ とし、G の回帰的自己同

型 θ を $\theta(g) := sgs$ ($g \in G$) により定める。 G の回帰的自己同型 θ から定まる $(\underline{sl}(m+n,\mathbb{C}),\ \underline{sl}(m,\mathbb{C})+\underline{sl}(n,\mathbb{C})+\mathbb{C})$ に同型な対称対を (AIII) 型対称対と呼ぶ。 また SL(V) の代わりに G := GL(V) として得られる $(\underline{gl}(m+n,\mathbb{C}),\ \underline{gl}(m,\mathbb{C})+\underline{gl}(n,\mathbb{C}))$ に同型な対称対を (AIII') 型対称対と呼ぶ。

$(\underline{g},\underline{k})$ を上のようにして得られる (AIII) 型、又は (AIII') 型対称対とする。 このとき $\underline{p} = \{ X \in \underline{g} : XV_a \subset V_b ,\ XV_b \subset V_a \}$ である。 $\underline{p}$ の巾零 K 軌道は次のように分類される。

任意の $X \in N(\underline{p})$ について、X のジョルダン基底

$$\{ X^p a_i : 1 \le i \le r_1,\ 0 \le p < \lambda_i \} \cup \{ X^q b_j : 1 \le i \le r_2,\ 0 \le q < \mu_j \}$$

を $a_i \in V_a$, $b_j \in V_b$ なるようにとることができる。

$\{ X^p a_i : 0 \le p < \lambda_i \}$ (resp. $\{ X^q b_j : 0 \le q < \mu_j \}$)

に行 $\overbrace{abab\ldots.}^{\lambda_i}$ (resp. $\overbrace{baba\ldots.}^{\mu_j}$) を対応させることにより、このような行の和として得られる図形 η_X を得る。 例えば $\lambda_1 = 3$ $(r_1=1)$, $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 2$ $(r_2 = 2)$ ならば $\eta_X = \begin{array}{l} babab \\ aba \\ ba \end{array}$ である。 ここで行は長いものから順に並べてゆくものとする。 このような図形を ab 図形と呼ぶ。 このとき η_X はジョルダン基底のとり方によらない。 そこで η_X を X の ab 図形と呼ぶ。 更に $\underline{p}$ の2つの巾零元 X, Y について

$$\eta_X = \eta_Y \quad \longleftrightarrow \quad KX = KY$$

が判る。 故に a の個数 m 、b の個数 n の ab 図形を $D^{ab}(m,n)$ で表せば、

$$[N(\underline{p})]_K \ \overset{\sim}{\longrightarrow}\ D^{ab}(m,n)$$

である。 以下 ab図形 η の中の a の個数、 b の個数をそれぞれ $n_a(\eta)$

$n_b(\eta)$ で表すことにする。

(2.2) さて (AIII'), (AIII) 型対称対の巾零 K 軌道の admissibility を決定しよう。

η を任意の ab 図形とし、その第 i 行を η_i とする。各 η_i に対して V_i を基底 $\{ a^i_j ; 1 \le j \le n_a(\eta_i) \} \cup \{ b^i_j ; 1 \le j \le n_b(\eta_i) \}$ により張られるベクトル空間とし、$V := \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$ とする。ここに r は η の行の数である。V_a, V_b をそれぞれ $\{ a^i_j \}_{i,j}$, $\{ b^i_j \}_{i,j}$ で張られる V の部分空間とする。$G := GL(V)$、θ は (2.1) の通りとして G の回帰的自己同型 θ から定まる (AIII) 型対称対 $(\underline{g},\underline{k})$ を考える。

$\underline{g}$ のカルタン部分環 $\underline{t}$ ($\subset \underline{k}$) を

$$\underline{t} := \{ t \in \underline{t} \; ; \; t \text{ は } a^i_j, b^i_j \text{ にスカラー倍として作用する} \}$$

により定める。また $\alpha^i_j, \beta^i_j \in \underline{t}^*$ を $ta^i_j = \alpha^i_j(t)a^i_j$, $tb^i_j = \beta^i_j(t)b^i_j$ ($t \in \underline{t}$) により定める。$\underline{t}$ の V におけるウエイトの全体を $\Lambda(V,\underline{t})$ で表す。$\lambda, \mu \in \Lambda(V,\underline{t}) = \{\alpha^i_j\} \cup \{\beta^i_j\}$ ($\lambda \neq \mu$) について

$$X(\lambda-\mu) \in \underline{g} \text{ を } \quad X(\lambda-\mu)v_{\mu'} = \begin{cases} v_\lambda & (\mu = \mu') \\ 0 & (\mu' \in \Lambda(V,\underline{t}) \setminus \{\mu\}) \end{cases}$$

により定める。ここに v_λ は $\lambda = \alpha^i_j$ なら $v_\lambda = a^i_j$, $\lambda = \beta^i_j$ なら $v_\lambda = b^i_j$ である。このとき各 η_i に対して $x_i \in \underline{p}$ を次のように定める。

$$x_i = \begin{cases} X(\alpha^i_p - \beta^i_p) + X(\beta^i_p - \alpha^i_{p-1}) + \dots + X(\beta^i_2 - \alpha^i_1) + X(\alpha^i_1 - \beta^i_1) & (\eta_i = \overbrace{ba..ba}^{2p}) \\ X(\beta^i_p - \alpha^i_p) + X(\alpha^i_p - \beta^i_{p-1}) + \dots + X(\alpha^i_2 - \beta^i_1) + X(\beta^i_1 - \alpha^i_1) & (\eta_i = \overbrace{ab..ab}^{2p}) \\ X(\alpha^i_{p+1} - \beta^i_p) + X(\beta^i_p - \alpha^i_p) + \dots + X(\alpha^i_2 - \beta^i_1) + X(\beta^i_1 - \alpha^i_1) & (\eta_i = \overbrace{ab..ba}^{2p+1}) \\ X(\beta^i_{p+1} - \alpha^i_p) + X(\alpha^i_p - \beta^i_p) + \dots + X(\beta^i_2 - \alpha^i_1) + X(\alpha^i_1 - \beta^i_1) & (\eta_i = \overbrace{ba..ab}^{2p+1}) \end{cases}$$

但し $\eta_i = a$ 又は $\eta_i = b$ ならば、$x_i = 0$ とする。

$x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ とすれば、x は巾零元で、その ab 図形は η である。

η_i の長さ（即ち、$n_a(\eta_i) + n_b(\eta_i)$）を n_i と書く。また x に現れる $\underline{g}$ の $\underline{t}$ に関するルートの全体を $\Delta_1 \subset \Delta(\underline{g}, \underline{t})$ と書く。このとき、正規 S-triple (h, x, y) を次の (a), (b) を満たすようにとることができる。

(a) $y \in \sum_{\alpha \in \Delta_1} \underline{g}_{-\alpha}$ かつ $h \in \underline{t}$.

(b) $x_i = X(\varepsilon_{n_i} - \varepsilon_{n_i-1}) + X(\varepsilon_{n_i-1} - \varepsilon_{n_i-2}) + \ldots + X(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + X(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$

のとき $\varepsilon_{n_i}(h) = n_i - 1$, $\varepsilon_{n_i-1}(h) = n_i - 3, \ldots, \varepsilon_2(h) = -(n_i - 3)$, $\varepsilon_1(h) = -(n_i - 1)$

更にこのとき $\underline{t}(x)$ は次の関係式を満たす $\underline{t}$ の元 t から成る $\underline{k}(x) \cap \underline{k}(h)$ のカルタン部分環である。

$$\alpha^i_1(t) = \alpha^i_2(t) = \ldots = \alpha^i_{n_a(\eta_i)}(t) = \beta^i_1(t) = \beta^i_2(t) = \ldots = \beta^i_{n_b(\eta_i)}(t) \ (= z_i) \quad (1 \le i \le r).$$

（ ）内のパラメーター $z_i \in \mathbb{C}$ により定められる $\underline{t}(x)$ の元を $t(z_1, \ldots, z_r)$ で表すと、写像 $\mathbb{C}^r \to \underline{t}(x)$, $(z_1, \ldots, z_r) \mapsto t(z_1, \ldots, z_r)$ は群の同型 $(\mathbb{C}^\times)^r \to T(x)_0$ から誘導される Lie 環の同型である。ここに T は $\underline{t}$ に対応する G の極大トーラスである。

η の２つの行 η_i, η_j についてこの２つの行をその中心が一致するように並べる。例えば

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{b a b a} & \text{a b a b a} & \text{b a b a} & \text{a b a b a} \\ \text{a b} & \text{a b a} & \text{a b a} & \text{a b a b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

などのようにである。このとき η_i に含まれる各 a (resp. b) に対し η_j の中の a (resp. b) で、その η_i の a (resp. b) よりも半列以上左側にあるものの個数を数え、この個数を η_i の各 a (resp. b) について和をとったものを $n(a_i, a_j)$ (resp. $n(b_i, b_j)$) と書く。また η_i

に含まれる各 a (resp. b) に対して η_j の中の b (resp. a) で、その η_i の a (resp. b) よりも1列以上左側にあるものの個数を数え、この個数を η_i の各 a (resp. b) について和をとったものを $n(a_i, b_j)$ (resp. $n(b_i, a_j)$) と書く。更に m_{ij} を

$$m_{ij} := \{n(a_i,a_j) - n(a_i,b_j)\} + \{n(b_i,b_j) - n(b_i,a_j)\} -\{n(a_j,a_i) - n(a_j,b_i)\} - \{n(b_j,b_i) - n(b_j,a_i)\}$$

により定めると、δ_X はこの m_{ij} を用いて次のように計算される。

補題2 (1) $\delta_X(t(z_1,\ldots,z_r)) = \sum_{1\le i<j\le r} m_{ij}(z_i - z_j)$.

(2) $1\le i<j\le r$ (従って $n_i \ge n_j$) について n_i が偶数、n_j が奇数のとき

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (\eta_i \text{ と } \eta_j \text{ が同じ文字で終る}) \\ -1 & (\eta_i \text{ と } \eta_j \text{ が異なる文字で終る}) \end{cases}$$

であり、他の場合は $m_{ij} = 0$ である。

(3) $\delta_X(t(z_1 \ldots z_r))$ の z_i の係数 c_i は次のように与えられる。

n_i が偶数のとき、

$$c_i = {}^{\#}\{ j ;\ n_j < n_i,\ n_j \text{ は奇数かつ } \eta_i,\ \eta_j \text{ は同じ文字で終る}\} - {}^{\#}\{ j ;\ n_j < n_i,\ n_j \text{ は奇数かつ } \eta_i,\ \eta_j \text{ は異なる文字で終る}\}、$$

n_i が奇数のとき、

$$c_i = {}^{\#}\{ j ;\ n_j > n_i,\ n_j \text{ は偶数かつ } \eta_i,\ \eta_j \text{ は異なる文字で終る}\} - {}^{\#}\{ j ;\ n_j > n_i,\ n_j \text{ は奇数かつ } \eta_i,\ \eta_j \text{ は同じ文字で終る}\}。$$

さて admissibility の判定方を与えるために、ab 図形(又はヤング図形) η に関する次の2つの条件を考える。

(Cond1) η の各偶数行(即ち長さが偶数の行)について、それより短い η の奇数行の個数は偶数である。また各奇数行について、それより長い偶数行の個数は偶数である。

(Cond2) η の各偶数行について、それより短い η の奇数行の個数は偶数である。また任意の２つの奇数行について、その２つの奇数行の間にある偶数行の個数は偶数である。

定理２ $(\underline{g},\underline{k})$ を (AIII')型 (resp. (AIII)型) 対称対とし、O を付随するベクトル空間 $\underline{p}$ の巾零 K 軌道とする。 O の ab 図形を η とするとき O が admissible であるための必要十分条件は η が条件 (Cond1) (resp. (Cond2)) を満たすことである。

この定理は $(\underline{g},\underline{k})$ が (AIII') 型であるときは補題２から直ちに証明される。 $(\underline{g},\underline{k})$ が (AIII) 型であるときは $\underline{t}(x)$ が

$\underline{t}(x) = \{\ t(z_1,\dots,z_r)\ ;\ z_i \in \mathbb{C},\ \sum_{i=1}^{r} n_i z_i = 0\ \}$ で与えられるために少し複雑になるが、単因子論を用いて、同型 $\mathbb{C}^{r-1} \cong \underline{t}(x)$ を構成することにより証明される。

§3 (BDI), (CII), (DIII), (CI) 型対称対の admissible な巾零軌道の分類

(3.1) (BDI),(CII),(DIII),(CI) 型対称対の admissible な巾零軌道の分類を与えるために、ここでは先ず巾零軌道の分類を与える。

V, V_a, V_b, s, θ : $GL(V) \to GL(V)$ を (2.1) の通りとする。 いま V 上の非退化な双線型形式 (,) で、次の性質を持つものが与えられたとする。

$$(u,v) = \varepsilon(v,u),\quad (su,v) = \omega(u,sv) \quad (\ u,\ v \in V\ )。$$

ここに $\varepsilon = \pm 1$, $\omega = \pm 1$ である。結合代数 $\underline{gl}(V)$ の線型反回帰的自己

同型 σ を $(Xu,v) = (u,\sigma(X)v)$ $(u, v \in V)$ により定めると、$GL(V) \longrightarrow GL(V)$, $g \mapsto \sigma(g)^{-1}$ は θ と可換な代数群 $GL(V)$ の回帰的自己同型となる。 $\tilde{G} := GL(V)$、 $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathrm{Lie}(\tilde{G}) = \mathfrak{gl}(V)$ とし、$\theta : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}$ から定まる (AIII') 型対称対を $(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\mathfrak{k}})$、その固定化群を $\tilde{K}$、付随するベクトル空間を $\tilde{\mathfrak{p}}$ と書く。 また $G := \{ g \in \tilde{G} \; ; \; \sigma(g)^{-1} = g \}$、 $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ とし、$\theta|_G : G \longrightarrow G$ から定まる対称対を $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$、固定化群を K、付随するベクトル空間を $\mathfrak{p}$ とする。 このとき $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$、$G$、$K$、は次のようになる。

(BDI) $(\varepsilon,\omega) = (1,1)$ のとき $(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) \cong (\mathfrak{o}(m+n,\mathbb{C}),\mathfrak{o}(m,\mathbb{C})+\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}))$、

$G \cong O(m+n,\mathbb{C})$、 $K \cong O(m,\mathbb{C}) \times O(n,\mathbb{C})$。

(CII) $(\varepsilon,\omega) = (-1,1)$ のとき m, n は偶数で

$(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) \cong (\mathfrak{sp}(m+n,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(m,\mathbb{C})+\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))$, $G \cong Sp(m+n,\mathbb{C})$,

$K \cong Sp(m,\mathbb{C}) \times Sp(n,\mathbb{C})$。

(DIII) $(\varepsilon,\omega) = (1,-1)$ のとき $m = n$ で

$(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) \cong (\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C}),\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$, $G \cong O(2n,\mathbb{C})$, $K \cong GL(n,\mathbb{C})$。

(CI) $(\varepsilon,\omega) = (-1,-1)$ のとき $m = n$ で

$(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) \cong (\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}),\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$, $G \cong Sp(2n,\mathbb{C})$, $K \cong GL(n,\mathbb{C})$。

$\tilde{K}$、K はそれぞれ $\tilde{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}$ に随伴作用で作用するが、このとき次が成り立つ。

補題３ ([O, Proposition4]) $\mathfrak{p}$ の２つの元 X, Y について X と Y が K で共役であるための必要十分条件は X と Y が $\tilde{K}$ で共役であることである。

この補題により自然な埋め込み

$$[N(\mathfrak{p})]_K \hookrightarrow [N(\tilde{\mathfrak{p}})]_{\tilde{K}} \cong D^{ab}(m,n)$$

を得る。 従って $\mathfrak{p}$ の巾零 K 軌道はやはり ab 図形で分類される。 $\mathfrak{p}$

の巾零 K 軌道がいかなる ab 図形に対応するかは、次の命題により与えられる。

命題４　対称対 $(\underline{g},\underline{k})$ の付随するベクトル空間 $\underline{p}$ の巾零 K 軌道は $D^{ab}(m,n)$ の元で、次の表の ab 図形の和になっているものと１対１に対応する。

表

型	(ε,ω)	ab 図形		
(BDI)	(1,1)	ab...ba ,	ba...ab ,	ba...ba ab...ab ,
(CII)	(-1,1)	ab...ba ab...ba ,	ba...ab ba...ab ,	ba...ba ab...ab ,
(DIII)	(1,-1)	ba...ba ba...ba ,	ab...ab ab...ab ,	ab...ba ba...ab
(CI)	(-1,-1)	ba...ba ,	ab...ab ,	ab...ba ba...ab

(3.2)　さて (BDI), (CII), (DIII), (CI) 型対称対の巾零 K 軌道の admissbility の判定方を与えよう。

命題５　$(\underline{g},\underline{k})$ を (3.1) の (BDI), (CII), (DIII), (CI) 型対称対とし、$(\tilde{\underline{g}},\tilde{\underline{k}})$ を (3.1) の (AIII') 型対称対とする。　このとき埋め込み $[N(\underline{p})]_K \hookrightarrow [N(\tilde{\underline{p}})]_{\tilde{K}}$, $O \mapsto \tilde{O}$ において O が admissible であるための必要十分条件は $\tilde{O}$ が admissible であることである。

命題５と定理１より直ちに次を得る。

定理２　$(\underline{g},\underline{k})$ を (BDI),(CII),(DIII),(CI) 型対称対とするとき、付随するベクトル空間 $\underline{p}$ の巾零 K 軌道 O が admissible であるための必要十分条件は O の ab 図形が条件 (Cond1) を満たすことである。

この定理と命題4より次を得る。

系　(CII), (DIII) 型対称対の任意の巾零 K 軌道は admissible である。

§5　古典型実 Lie 環の admissible な巾零軌道

ここでは先の節で見た対称対に対応する実 Lie 環の admissible な巾零軌道について考える。

(1.2) の対応による対称対と実 Lie 群の対応は次のように与えられる。

$(\underline{g}.\underline{k})$	$G_{\mathbb{R}}$
$(\underline{sl}(n.\mathbb{C}).\underline{o}(n.\mathbb{C}))$	$SL(n.\mathbb{R})$
$(\underline{gl}(n.\mathbb{C}).\underline{o}(n.\mathbb{C}))$	$GL(n.\mathbb{R})$
$(\underline{sl}(2n.\mathbb{C}).\underline{sp}(2n.\mathbb{C}))$	$SU^*(2n)$
$(\underline{gl}(2n.\mathbb{C}).\underline{sp}(2n.\mathbb{C}))$	$U^*(2n)$
$(\underline{sl}(n+m.\mathbb{C}).\underline{sl}(n.\mathbb{C})+\underline{sl}(m.\mathbb{C})+\mathbb{C})$	$SU(m.n)$
$(\underline{gl}(n+m.\mathbb{C}).\underline{gl}(n.\mathbb{C})+\underline{gl}(m.\mathbb{C}))$	$U(m.n)$
$(\underline{o}(m+n.\mathbb{C}).\underline{o}(m.\mathbb{C})+\underline{o}(n.\mathbb{C}))$	$O(m.n)$
$(\underline{sp}(2m+2n.\mathbb{C}).\underline{sp}(2m.\mathbb{C})+\underline{sp}(2n.\mathbb{C}))$	$Sp(2m.2n)$
$(\underline{o}(2n.\mathbb{C}).\underline{gl}(n.\mathbb{C}))$	$O^*(2n)$
$(\underline{sp}(2n.\mathbb{C}).\underline{gl}(n.\mathbb{C}))$	$Sp(2n.\mathbb{R})$

定理1における $x_{\mathbb{R}}$ と x_{θ} は明らかに G で共役である。 また ab 図形 η をもつ $\underline{p}$ の巾零元に対して、その元の $\underline{g}$ におけるヤング図形は η の a, b をブロック □ で置き換えることにより得られる。これらのことと先の節の対称対に関する結果より、直ちに次の定理を得る。

定理３　(1)　$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}^*(2n)$, $\mathfrak{u}^*(2n)$, $\mathfrak{o}^*(2n)$, $\mathfrak{sp}(2m,2n)$ の任意の巾零元は admissible である。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が $\mathfrak{u}(m,n)$, $\mathfrak{su}(m,n)$, $\mathfrak{o}(m,n)$, $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$ のいずれかであるとき、$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は自然に $\mathfrak{gl}(m+n,\mathbb{C})$ の部分環である（但し $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$ のときは $m=n$ とする）。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の巾零元 x について、その $\mathfrak{gl}(m+n,\mathbb{C})$ でのヤング図形を η とする。このとき

(2)　$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が $\mathfrak{u}(m,n)$, $\mathfrak{o}(m,n)$, $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$ のいずれかであるとき、x が admissible であるための必要十分条件は、η が (2.2) の条件 (Cond1) を満たすことである。

(3)　$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(m,n)$ のとき、x が admissible であるための必要十分条件は η が (2.2) の条件 (Cond2) を満たすことである。

最後に、$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が古典型の場合、その巾零元の admissibility はその元の複素化 $\mathfrak{g}$ における G 軌道のみに依存することに注意しておく。

文献

[BV]　D. Barbasch and D. Vogan. Unipotent representation of complex semisimple Lie groups, Ann. of Math. 121 (1985), 41-110.

[D]　M. Duflo. Construction de représentations d'un groupe de Lie, Cours d' été du C.I.M.E., Cortona (1980).

[KR]　B. Kostant and S. Rallis. Orbits and representations associated with symmetric spaces. Amer. J. Math. 93 (1971). 753-809.

[O] T. Ohta. The singularities of the closures of nilpotent orbits in certain symmetric pairs. Tôhoku Math. J. 38 (1986). 441-468.

[S] J. Sekiguchi. Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. J. Math. Soc. Japan. 39, No. 1. (1987). 127-138.

[V1] D. Vogan. The orbit method and primitive ideals for semisimple Lie algebras. in Lie Algebras and Related Topics. CMS Conference Proceedings. vol. 5. D. Britten. F. Lemire. and R. Moody. eds. Amer. Math. Soc. for CMS. Providence. Rhode Island. 1986.

[V2] D. Vogan. Unitary representations of reductive Lie groups. Princeton Univ. press. 1987.