数理解析研究所講究録
第 700 巻 1989 年 31-38

Representation Theory of Quantum Groups

名大 理．三町勝久
(Katsuhisa Mimachi)

1．量子群の定義

量子群の表現論を展開したいが本稿では特に量子群 $SU_q(2)$ を扱う事にする。量子群 $G = SU_q(2)$ の座標環を $A=A(G)$ とする時、A は 4 個の 生成元 x,u,v,y と基本関係式

$$\begin{cases} ux = qxu, \ vx = qxv, \ yu = quy, \ yv = qvy, \\ vu = uv, \ \ xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1, \ \ q\in\mathbb{R}^*, \end{cases}$$

により得られる $\mathbb{C}$-代数に次の構造を付与した$*$-Hopf代数として定義される。

$$\text{coproduct} \ \ \Delta : A \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{C}} A; \ \ \Delta\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix},$$

$$\text{counit} \ \ \varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{C}; \ \ \varepsilon\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{antipode} \ \ S: A \longrightarrow A; \ \ S\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -qu \\ -q^{-1}v & x \end{pmatrix},$$

$$*\text{-operation} : A \longrightarrow A; \ \ \begin{pmatrix} x^* & u^* \\ v^* & y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -q^{-1}v \\ -qu & x \end{pmatrix}.$$

量子群の概念は Woronowicz および Drinfeld, Jimbo 等によりそれぞれ全く異なる背景から 近年抽出されたものである。Woronowicz

は双対群の研究から、そして Drinfeld, Jimbo は Yang-Baxter方程式の解の研究からである。

ここで量子群を捉える際の基本的考え方を説明しておこう。まず我々が実際に操作するのは量子群上の函数環であって幾何的対象であるところの量子群自身を直接扱う事はない。勿論、古典論（$q=1$）では scheme をとることにより幾何的対象が回復されるのでいささかの問題も無いのであるが、今の場合考えているのは非可換代数なので scheme をとることは許されない。つまり函数環を扱う事とそれに付随する幾何的対象を考察する事との明確な対応関係を我々は持ちあわせていないのである。そこで我々は次の様に解釈する。即ち、幾何的対象としての量子群は直接捉えることが出来ないが、それにも拘らず量子群上の函数環は捕捉され この函数環が量子群の情報を担っているのだと思うことにするのである。以下この様な約束の下で議論を進めよう。

手始めに量子部分群から見て行く。一般に量子群 G の量子部分群 H はHopf代数 A(H) とHopf代数としての全射準同型 π_H: A(G)⟶ A(H) との組(A(H), π_H) として定義される。例えば極大トーラス部分群に当るものは $*$-Hopf代数: $A(K) = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $\Delta_K(t)=t\otimes t$, $\varepsilon_K(t)=1$,

$S_K(t)=t^{-1}$, $t^*=t^{-1}$ と $\pi_K: A(G)\longrightarrow A(K)$; $\pi_K\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$
なる写像とで 定義される。

さて、量子部分群 K の群指標を求めると t^n ($n\in\mathbb{Z}$) となる事をもとにして

$$A[m,n]=\{a\in A;\ (\pi_K \otimes id_A)\circ \Delta(a)=t^m \otimes a,\ (id_A\otimes \pi_K)\circ \Delta(a)=a\otimes t^n\}$$

なる線形部分空間を導入すると A[m,n] は両側 A-comodule の構造を持ち、次の命題が得られる。

Proposition 1. (1)　$A=A(G)$ は次の直和分解を持つ。

$$A(G) = \bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}} A[m,n].$$

(2)　両側 K-不変のなす代数 $A[0,0]$ は一変数多項式環 $\mathbb{C}[\zeta]$ である。
但し、ここで $\zeta=-q^{-1}uv$ である。

2. Peter-Weylの定理と球函数

Haar測度 $h: A \to \mathbb{C}$ は条件:$(id_A \otimes h)\circ\Delta = h.1$, $(h\otimes id_A)\circ\Delta = h.1$, $h(1) = 1$ を満たすものとして捉えられるが、我々の場合次の定理が得られる。

Theorem 2.(Woronowicz)

(1) Haar測度 h の supportは $A[0,0]$ である。

$$h:\ \begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{C} \\ & A[0,0] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(2) $A[0,0]=\mathbb{C}[\zeta]$ の元 $\varphi(\zeta)$ に対して Haar測度 h は次の表示を持つ。

$$\begin{cases} h(\varphi(\zeta)) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(\zeta)\ d_{q^2}\zeta & \text{if } 0<|q|<1, \\[2ex] h(\varphi(\zeta)) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(q^{-2}\zeta)\ d_{q^{-2}}\zeta & \text{if } 1<|q|. \end{cases}$$

ここで用いた記号 $\int_0^1 \varphi(t)d_q t$ は Jackson 積分で、次の通りに定義されるもので、

$$\int_0^1 \varphi(t)d_q t = (1-q)\sum_{k\geq 0} \varphi(q^k)q^k \qquad \text{if } |q|<1,$$

Riemann積分 の q-analogue に成っている。我々はこの Haar測度を用いて次の様な内積を導入する。

$$\langle a,b\rangle_L = h(b^*a)\ ,\ \langle a,b\rangle_R = h(ab^*) \quad \text{for } a,b\in A.$$

この様に A(G) の非可換性から 二つの内積を導入するがこれらは作用環論の富田-竹崎理論で重要な "Modular operator" $\sigma:A\longrightarrow A$ により

$$\langle a,b\rangle_L = \langle\sigma(a),b\rangle_R \quad \text{for } a,b\in A$$

という関係で結びついている。 ここで "Modular operator" σ は

$$\sigma\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-2}x & u \\ v & q^2 y \end{pmatrix}$$

で定義される自己同型写像である。また内積 $\langle\ ,\ \rangle_L$および $\langle\ ,\ \rangle_R$ は正定値 Hermite 形式になっている。

さて、この辺で表現空間となる二つの線形空間を $\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ に対して $I_\ell=\{-\ell,-\ell+1,\ldots,\ell\}$ と置いたとき次の様に導入する。

$$V_\ell^L = \bigoplus_{i\in I_\ell} \mathbb{C}\,\xi_i^{(\ell)}, \qquad \xi_i^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 2\ell \\ \ell+i \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} x^{\ell-i}v^{\ell+i},$$

$$V_\ell^R = \bigoplus_{j\in I_\ell} \mathbb{C}\,\eta_j^{(\ell)}, \qquad \eta_j^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 2\ell \\ \ell+j \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} x^{\ell-j}u^{\ell+j}.$$

ここで用いた記号 $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q$ は Gauss の２項係数と呼ばれるもので、

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_m}{(q;q)_n(q;q)_{m-n}}\ , \quad (a;q)_m = \prod_{k=0}^{m-1}(1-aq^k)$$

と定義されるものである。 ここで coproduct Δ が 準同型写像である ことに注意すると線形空間 V_ℓ^L および V_ℓ^R はそれぞれ 左 A-comodule, 右 A-comodule の構造を持っていることが確かめられる。我々は以下 この V_ℓ^L または V_ℓ^R を $G = SU_q(2)$ の スピン ℓ 表現と呼ぶ。 また、 V_ℓ^L の左 A-comodule の構造に注意して行列要素 $w_{i,j}^{(\ell)}$ を次の様に定義する。

$$\Delta(\xi_i^{(\ell)}) = \sum_{j\in I_\ell} w_{i,j}^{(\ell)} \otimes \xi_j^{(\ell)} \quad \text{for } i\in I_\ell.$$

ここで 左 A-comodule の条件から

$$\Delta(w_{i,j}^{(\ell)}) = \sum_{k\in I_\ell} w_{i,k}^{(\ell)} \otimes w_{k,j}^{(\ell)}, \quad \varepsilon(w_{i,j}^{(\ell)}) = \delta_{i,j}$$

が導かれ、また

$$\Delta(\eta_j^{(\ell)}) = \sum_{i\in I_\ell} \eta_i^{(\ell)} \otimes w_{i,j}^{(\ell)} \quad \text{for } j\in I_\ell$$

となる事は直接計算することから確かめられる。このことから $w_{i,j}^{(\ell)}$ は右 A-comodule V_ℓ^R の行列要素をも表していると言える。換言すれば 左 A-comodule V_ℓ^L と 右 A-comodule V_ℓ^R とは互いに双対である。 ここで我々は 次の定理を得る。

Theorem 3.(Peter-Weyl theorem)

(1) 任意の有限次元 左 A-comodule は完全可約で、既約な有限次元 左 A-comodule は V_ℓ^L ($\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$) のいずれかに同型である（右側も同様）。

(2) 各 $\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ に対して両側 A-comodule としての同型写像 $V_\ell^L\otimes V_\ell^R \xrightarrow{\sim} W_\ell$ が存在する。但し、$W_\ell = \bigoplus_{i,j\in I_\ell} \mathbb{C}\, w_{i,j}^{(\ell)}$ とする。

(3) A(G) は内積 $\langle\ ,\ \rangle_L$ (or $\langle\ ,\ \rangle_R$) に対する 直交分解:

$$A(G) = \bigoplus_{\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} W_\ell .$$

を持ち、より詳しく $(i,j) \neq (r,s)$ の時 $\langle w^{(\ell)}_{i,j}, w^{(\ell)}_{r,s} \rangle = 0$ が成立。

また、次で与える little q-Jacobi 多項式 を用いると 行列要素 $w^{(\ell)}_{i,j}$ を具体的に書き下す事が出来る。

$$P^{(\alpha,\beta)}_n(z;q) = \sum_{r \geq 0} \frac{(q^{-n};q)_r (q^{\alpha+\beta+n+1};q)_r}{(q;q)_r (q^{\alpha+1};q)_r} (qz)^r .$$

これは Jacobi多項式 の 一つの q-analogue であり 1949年 W.Hahn により導入された 直交多項式 である。

Theorem 4. スピン ℓ 表現の行列要素 $w^{(\ell)}_{i,j}$ は $\zeta = -q^{-1}uv$ を変数に持つ little q-Jacobi 多項式で 次の通りに表示される。

(I) $i+j \leq 0,\ j \leq i$;

$$x^{-i-j} v^{i-j}\ q^{(\ell+j)(j-i)} \begin{bmatrix} \ell+i \\ i-j \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \ell-i \\ i-j \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} P^{(i-j,-i-j)}_{\ell+j}(\zeta;q^2),$$

(II) $i+j \leq 0,\ i \leq j$;

$$x^{-i-j} u^{j-i}\ q^{(\ell+i)(i-j)} \begin{bmatrix} \ell-i \\ j-i \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \ell+j \\ j-i \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} P^{(j-i,-i-j)}_{\ell+i}(\zeta;q^2),$$

(III) $0 \leq i+j,\ i \leq j$;

$$q^{(j-i)(j-\ell)} \begin{bmatrix} \ell-i \\ j-i \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \ell+j \\ j-i \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} P^{(j-i,i+j)}_{\ell-j}(\zeta;q^2)\ u^{j-i} y^{i+j},$$

(IV) $0 \leq i+j,\ j \leq i$;

$$q^{(i-j)(i-\ell)} \begin{bmatrix} \ell+i \\ i-j \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \ell-j \\ i-j \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} P_{\ell-i}^{(i-j,i+j)}(\zeta;q^2)\ v^{i-j}y^{i+j},$$

この行列要素は ユニタリー条件: $\Sigma_{k\in I_\ell} w_{i,k}\ w_{j,k}^* = \delta_{i,j}$ を満たしている事を注意しておく。

また、Theorem 3 と Theorem 4 とを合わせると little q-Jacobi 多項式の直交関係式が得られる。

Proposition 5. (Andrews-Askey)

$$\int_0^1 P_m^{(\alpha,\beta)}(\zeta;q)\ P_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta;q)\ \zeta^\alpha\ (q\zeta;q)_\beta\ d_q\zeta$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n, \\ q^{(\alpha+1)n} \dfrac{(1-q)\ (q;q)_\alpha^2 (q;q)_{\beta+n}(q;q)_n}{(1-q^{\alpha+\beta+2n+1})(q;q)_{\alpha+n}(q;q)_{\alpha+\beta+n}} & \text{if } m=n. \end{cases}$$

3. $SU_q(2)$ 上の Fourier 変換

Peter-Weylの定理の応用例として Fourier変換論を考えてみよう。

$f\in A$ に対して行列値の Fourier係数 $\hat{f}_\ell = (f_{i,j}^{(\ell)})_{i,j\in I_\ell} \in \mathrm{Mat}(2\ell+1;A)$ を次のように定義する。

$$\hat{f}_\ell = h(f\ S(W_\ell)), \qquad W_\ell = (w_{i,j}^{(\ell)})_{i,j\in I_\ell}.$$

このとき Fourier変換は次の形で与えられる。

$$\Phi:\ A \longrightarrow \hat{A} = \bigoplus_{\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \mathrm{Mat}(2\ell+1;A)\ ;\ \Phi(f) = \bigoplus_{\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \hat{f}_\ell.$$

また、"q-trace" τ_ℓ: Mat$(2\ell+1;A) \longrightarrow A$ を、Fourier逆変換の記述のために 次で導入する。

$$\tau_\ell(M) = \sum_{i\in I_\ell} q^{2i} a_{i,i}, \quad \text{for} \quad M=(a_{i,j})_{i,j\in I_\ell} \in \mathrm{Mat}(2\ell+1;A).$$

この "q-trace" τ_ℓ は Mat$(2\ell+1;A)$ 上の Hermite形式 $\langle\ ,\ \rangle_\ell^R$ を次のように引き起こす。

$$\langle M,N\rangle_\ell^R = \tau_\ell(MN^*), \quad \text{for } M,N\in \mathrm{Mat}(2\ell+1;A).$$

但し、 $N=(n_{i,j})_{i,j\in I_\ell}$ の時 $N^*=(n_{j,i}^*)_{i,j\in I_\ell}$ である。

Theorem 6.

Fourier変換 Φ: $A \longrightarrow \hat{A}$ は同型写像であり、 Fourier逆変換は

$$f = \sum_{\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \frac{q^{2\ell+1} - q^{-2\ell-1}}{q - q^{-1}} \tau_\ell(\hat{f}_\ell\ W_\ell)$$

で与えられる。さらに Φ は次の意味で isometry である。

$$\langle f,g\rangle_R = \sum_{\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \frac{q^{2\ell+1} - q^{-2\ell-1}}{q - q^{-1}} \langle \hat{f}_\ell, \hat{g}_\ell \rangle_\ell^R, \quad \text{for } f,g\in A.$$

References

[1] T.Masuda, K.Mimachi, Y.Nakagami, M.Noumi and K.Ueno, Representations of quantum groups and a q-analogue of orthogonal polynomials, to appear in C. R. Acad. Sc. Paris.

[2] T.Masuda, K.Mimachi, Y.Nakagami, M.Noumi and K.Ueno, Representations of the quantum group $SU_q(2)$ and the little q-Jacobi polynomials, preprint (1988).