数理解析研究所講究録
第700巻 1989年 39-47

可解格子模型とWeyl-Kac指標公式

京大教養 伊達 悦朗 (Etsuro Date)
京大数理研 神保 道夫 (Michio Jimbo)
東大教養・物理 国場 敦夫 (Atsuo Kuniba)
京大数理研 三輪 哲二 (Tetsuji Miwa)
〃 尾角 正人 (Masato Okado)

有限次元単純リー環 $X_n = A_n, B_n, C_n, D_n$ に対して, $X_n^{(1)}$ はその affine 化, つまり

$$X_n^{(1)} = X_n \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$$

$$c \in \text{Center}$$

を表すものとする。また (π, V_π) を X_n の自然表現とする。各 $(X_n^{(1)}, \pi)$ に対応して,

Yang-Baxter 方程式

$$(R(w) \otimes I)(I \otimes R(ww'))(R(w') \otimes I)$$

$$= (I \otimes R(w'))(R(ww') \otimes I)(I \otimes R(w)) \quad \text{in } \operatorname{End}(V_\pi \otimes V_\pi \otimes V_\pi)$$

の三角関数解 $R(w) \in \operatorname{End}(V_\pi \otimes V_\pi)$ が構成されている.[1]

例を挙げると，

$\underline{X_m^{(1)} = A_m^{(1)}}$

$$R(w,x) = (w-x)\sum_{\mu} E_{\mu\mu}\otimes E_{\mu\mu} + \sqrt{x}\,(w-1)\sum_{\mu\neq\nu} E_{\mu\nu}\otimes E_{\nu\mu}$$

$$+(1-x)\Big(\sum_{\mu<\nu} + w\sum_{\mu>\nu}\Big) E_{\mu\mu}\otimes E_{\nu\nu},$$

ただし，$E_{\mu\nu} = (\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu})_{\alpha\beta} \in gl(m+1, \mathbb{C})$ で，$\mu,\nu,\alpha,\beta\in J = \{1,2,\cdots,m+1\}$ である。J は π の weight $\{\varepsilon_1-\varepsilon, \cdots, \varepsilon_{m+1}-\varepsilon\}$ $\left(\varepsilon = \frac{1}{m+1}\sum_{\mu}\varepsilon_{m+1}\right)$ をラベルしていることに注意しよう。

以下，$X_m^{(1)} = A_m^{(1)}$ の場合に話を限ろう。(詳しくは，[2] を参照) $R(w,x)$ についての重要な性質を列挙すると，

(1) $\mathfrak{f}$ - invariance

$$[R(w,x),\ h\otimes I + I\otimes h] = 0 \quad \text{for } {}^{\forall} h\in\mathfrak{f}$$

ここで，$\mathfrak{f}$ は A_m の Cartan subalgebra.

(2) initial condition

$$R(1,x) = (\text{scalar})\times I.$$

(3) 2nd inversion relation

$$\sum_{\alpha,\beta} R(wx^{-\lambda},x)_{\kappa\alpha\sigma\beta}\, R(w^{-1}x^{-\lambda},x)_{\nu\beta\mu\alpha}\,\frac{g_\alpha g_\beta}{g_\mu g_\sigma} = \rho_2(w)\,\delta_{\kappa\mu}\,\delta_{\sigma\nu}.$$

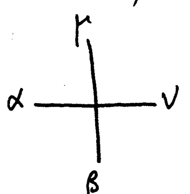
ここで, $R(w,x)_{\alpha\beta\mu\nu}$ は $R(w,x)=\sum R(w,x)_{\alpha\beta\mu\nu}E_{\alpha\mu}\otimes E_{\beta\nu}$ で定義される scalar, また $\lambda=-\frac{1}{2}(n+1)$, $g_\mu=x^{-\langle\varepsilon_\mu-\varepsilon,\rho\rangle/2}$, $\rho_2(w)=x(w-x^{-\lambda})(w^{-1}-x^{-\lambda})$ である。

(4) $x=0$ における diagonality

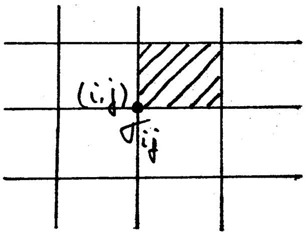
$$R(w,0)=\sum w^{H(\varepsilon_\mu-\varepsilon,\,\varepsilon_\nu-\varepsilon)}E_{\mu\mu}\otimes E_{\nu\nu}.$$

$$H(\varepsilon_\mu-\varepsilon,\varepsilon_\nu-\varepsilon)=\begin{cases}0 & \text{if } \mu<\nu,\\ 1 & \text{if } \mu\geq\nu.\end{cases}$$

さて, $R(w,x)$ は, $R(w,x)_{\alpha\beta\mu\nu}$ に configuration



の Boltzmann weight を対応させることにより, vertex model を定義していると考えることができる。しかし, ここでは face model としての formulation を考えることにする。face model とは左図のように各格子点



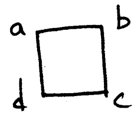
$(i,j)\in\mathbb{Z}^2$ に変数 σ_{ij} が対応していて, face (斜線部分) のまわりの4点の変数が定まると Boltzmann weight が定義される model であった。ここでは変数 σ_{ij} は次の集合

$$P^1=\left\{\sum_{j=0}^{n}m_j\Lambda_j \,\middle|\, m_j\in\mathbb{Z},\ \sum_{j=0}^{n}m_j=1\right\}$$

に値をとると仮定する。ここで，$\Lambda_0, \cdots, \Lambda_m$ は $A_m^{(1)}$ の fundamental weight である。簡単のために，

$$\lambda_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_\mu - \Lambda_{\mu-1} \qquad \mu = 1, 2, \cdots, m+1$$

ただし，$\Lambda_{m+1} = \Lambda_0$

という記号を導入しよう。実は，$\lambda_\mu = \varepsilon_\mu - \varepsilon$（前出）である。さて，我々は $a, b, c, d \in P'$ に対して configuration  の Boltzmann weight $W\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ を，次のように定義する。

$$W\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = R(w, x)_{\alpha\beta\mu\nu} \quad \text{if} \quad \begin{array}{l} b-a=\lambda_\mu,\ c-b=\lambda_\nu \\ d-a=\lambda_\alpha,\ c-d=\lambda_\beta \end{array}$$

$$= 0 \qquad \text{otherwise}$$

次に，face model についての重要な量 local state probability (LSP) を定義しよう。今問題にしている model の場合には，$a \in P'$ として

$$P(a|\Lambda) = \frac{1}{Z} \sum_{\text{config.}} \delta_{\sigma_{00} a} \prod_{\text{face}} W\begin{pmatrix} \sigma_i & \sigma_j \\ \sigma_l & \sigma_k \end{pmatrix}$$

$$Z = \sum_{\text{config.}} \prod_{\text{face}} W\begin{pmatrix} \sigma_i & \sigma_j \\ \sigma_l & \sigma_k \end{pmatrix} \quad , \quad i, j, k, l \in \mathbb{Z}^2$$

で定義される。Λ は任意の level 1 dominant integral weight である。つまり，$\Lambda = \Lambda_\mu$ for some μ. この Λ は LSP の計算を実際実行する時の boundary condition に関係している。今の場合 $(\Lambda = \Lambda_\mu)$

$$\sigma_{ij} = \Lambda_{\overline{i-j+\mu}} \qquad \text{if } |i|+|j| \text{ が十分大}$$

という boundary condition を課している。ここで，$\mu \in \mathbb{Z}$ に対して，$\bar{\mu}$ は条件 $0 \le \bar{\mu} \le n$, $\bar{\mu} \equiv \mu \bmod n+1$ によって定まる整数を表す。

Baxter の corner transfer matrix 法 [3] により，$R(w,x)$ についての Yang-Baxter 方程式と性質(1)〜(4) から，LSP $P(a|\Lambda)$ の次の表示が導かれる。

$\Lambda = \Lambda_\mu$ として fix

$$P(a|\Lambda) = \lim_{m\to\infty} P_m(a, p_\Lambda^{(m+1)}, p_\Lambda^{(m+2)})$$

$$P_m(a,b,c) = \frac{x^{-\langle a,\rho\rangle} f_m(b-a, c-b; x^{n+1})}{\sum_{a'} x^{-\langle a',\rho\rangle} f_m(b-a', c-b; x^{n+1})}$$

$$p_\Lambda^{(i)} = \Lambda_{\overline{i+\mu-1}}$$

$$(\star) \qquad f_m(\gamma, \eta; q) = \sum{}^{*} q^{\sum_{j=1}^{m} j H(\eta^{(j)}, \eta^{(j+1)})}$$

ここで，$\eta^{(j)} \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}\}$，$\eta = \eta^{(m+1)}$，$\gamma \in P^0 \overset{\text{def}}{=} \{\sum_{j=0}^{n} m_j\Lambda_j \mid m_j \in \mathbb{Z}, \sum_{j=0}^{n} m_j = 0\} = \mathbb{Z}\lambda_1 + \cdots + \mathbb{Z}\lambda_{n+1}$ であり，記号Σ^*は，和が $\eta^{(1)} + \cdots + \eta^{(m)} = \gamma$ をみたすすべての列$\{\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(m)}\}$にわたってとられることを示している。関数Hは性質(4)のところで出てきたものと同じである。結局 LSP $P(a|\Lambda)$ の計算は(☆)式の解析に帰着された．我々は(☆)を"one dimensional configuration sum"と呼んでいる。

主要結果を述べるために，affine リー環の standard な notation を復習する。

$L(\Lambda)$: highest weight Λ をもつ $A_n^{(1)}$ の既約 highest weight module.

$\mu \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ に対し，

$$L(\Lambda)_\mu = \{v \in L(\Lambda) \mid hv = \mu(h)v \text{ for } h \in \hat{\mathfrak{h}}\}$$

ここで，$\hat{\mathfrak{h}}$ は $A_n^{(1)}$ の Cartan subalgebra.

δ : null root

すると我々の主定理は次のように述べられる．

Th. $a \in P^1$ に対し，

$$\lim_{m \to \infty} q^{-\omega_m(\Lambda)} f_m(p_\Lambda^{(m+1)} - a, p_\Lambda^{(m+2)} - p_\Lambda^{(m+1)}; q)$$

$$= \sum_i \dim L(\Lambda)_{a-i\delta} q^i$$

ただし，$\omega_m(\Lambda) = \sum_{j=1}^{m} j H(p_\Lambda^{(j+1)} - p_\Lambda^{(j)}, p_\Lambda^{(j+2)} - p_\Lambda^{(j+1)})$.

右辺は，$A_m^{(1)}$ の level 1 string function に他ならない [4]。

$X_m^{(1)} = B_m^{(1)}, D_m^{(1)}$ の時も全く同様にして $X_m^{(1)}$ の level 1 string function が LSP の計算に現れる。$C_m^{(1)}$ の時だけは少し状況が異なる。（詳しくは，[2] を参照）

今度は，再び $X_m^{(1)} = A_m^{(1)}$ の場合に話を限り level が一般の場合の予想を述べよう。$0 \leq i_1, \cdots, i_N \leq m$ とし，$\Lambda = \Lambda_{i_1} + \cdots + \Lambda_{i_N}$ を fix する。また，level 一般 (N) の時の $p_\Lambda^{(i)}$，関数 H を level 1 の時の $p_{\Lambda_\mu}^{(i)}$，H を用いて

$$p_\Lambda^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} p_{\Lambda_{i_1}}^{(i)} + \cdots + p_{\Lambda_{i_N}}^{(i)}$$

$$H(\lambda_{k_1} + \cdots + \lambda_{k_N}, \lambda_{k_1'} + \cdots + \lambda_{k_N'})$$

$$\overset{\text{def}}{=} \min_{\sigma:\text{perm.}} \sum_{i=1}^{N} H(\lambda_{k_i}, \lambda_{k'_{\sigma(i)}})$$

と定義する。また，和 Σ^* の条件としては，

$$\eta^{(i)} \in \{\lambda_{k_1} + \cdots + \lambda_{k_N} \mid 0 \le k_1, \cdots, k_N \le n\}$$

を考えることにする。この時，我々の予想は，$a \in P^N \overset{\text{def}}{=} \{\sum_{j=0}^{n} m_j \Lambda_j \mid m_j \in \mathbb{Z}, \sum_{j=0}^{n} m_j = N\}$ に対して Th. と同じ式が成立するということである。この式は，string function の全く新しい表示を与えている。また，[4] により string function が modular property を持つことが知られているので，LSP $\mathbb{P}(a|\Lambda)$ も modular property を持つことがわかる。

この予想は，研究会後（1988年9月頃）証明された。詳しくは [5] を見て頂きたい。

参考文献

[1] V. V. Bazhanov, Phys. Lett. 159B, 321 (1985).
M. Jimbo, Commun. Math. Phys. 102, 537 (1986).

[2] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa & M. Okado, One dimensional configuration sums in vertex models and affine Lie algebra characters, preprint RIMS-631, to appear in Lett. Math. Phys.

[3] R.J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, London, Academic 1982.

[4] V.G. Kac & D.H. Peterson, Adv. Math. 53, 125 (1984).

[5] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa & M. Okado, Chemins, Diagrammes de Maya et Représentations de $\widehat{sl}(r, \mathbb{C})$, submitting to C.R. Acad. Sci. Paris.

DJKMO, in preparation.