数理解析研究所講究録
第700巻 1989年 48-63

Yang-Baxter 方程式と表現論

阪大 理学部 村上 順

1. Yang-Baxter 方程式

1.1 Yang-Baxter 方程式（以下 YBE と略す）は、古典及び量子可積分系において重要な役割を担っている。古典 YBE の解とは、ある線型空間 V に対し、次の関係式 (1.1) をみたす 1 つのパラメータ x をもった $End(V\otimes V)$ の元 $r(x)$ のことである。(1.1) で $r^{ij}(x)$ は、$End(V\otimes V\otimes V)$ の元で、$V\otimes V\otimes V$ の i 番目と j 番目の V には $r(x)$ で作用し残りの V には恒等写像で作用するものである。

$$[r^{12}(x), r^{13}(x)] + [r^{12}(x), r^{23}(x)] + [r^{13}(x), r^{23}(x)] = 0 \qquad (1.1)$$

$\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー環とし、V を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とする。$V^{\otimes n} = V\otimes V\otimes \cdots \otimes V$（$n$ 階のテンソル積）に対し $\mathfrak{g}$ が対角作用で作用する。このとき、$End(V\otimes V)$ 中の古典 YBE の解で、$\mathfrak{g}$ の作用と可換になり、unitarity をみたすものが分類されている。

一方，量子化されたYBE方程式の解とは、ある線型空間Vに対し、1つのパラメータxと量子化のパラメータqを含む$R(x)=R(x,q)\in End(V\otimes V)$で，$r(x)$のときと同様の記法のもとで，次の式(1.2)をみたすものである。

$$R^{12}(x)R^{13}(xy)R^{23}(y)=R^{23}(y)R^{13}(xy)R^{12}(x) \qquad (1.2)$$

Vを古典型単純リー環$\mathfrak{g}$の基本表現とする。このとき、qを1にした極限が[B-D]での解$r(x)$になるような(1.2)の解が[J]により求められた。このとき、Vは、$\mathfrak{g}$の展開環のq-analogue $\hat{U}_q(\mathfrak{g})$の基本表現とみなせる。そして[J]の解は$\hat{U}_q(\mathfrak{g})$の対角作用と可換になっている。

1.2. 解の具体的な形

特にA型とC型に対応する(1.2)の解を書いておく。

A_n型に対応する解：　　　$\dim V=n+1$

$$R(x)=(x-q^2)\sum_{\alpha=1}^{n+1}E_{\alpha\alpha}\otimes E_{\alpha\alpha}+q(x-1)\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{n+1}E_{\alpha\alpha}\otimes E_{\beta\beta}$$
$$-(q^2-1)\Big(\sum_{\substack{\alpha\ \beta=1\\ \alpha<\beta}}^{n+1}+x\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha>\beta}}^{n+1}\Big)E_{\alpha\beta}\otimes E_{\beta\alpha} \qquad (1.3)$$

但し、$E_{\alpha\beta}$はα行β列成分のみが1で他が0という行列単位を表わす。

C_n 型に対応する解：　　$\dim V = 2n$

$$R(x) = (x-q^2)(x-q^{2n+2}) \sum_{\alpha \neq \alpha'} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\alpha\alpha} + q(x-1)(x-q^{2n+2}) \sum_{\alpha \neq \beta, \beta'} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\beta\beta}$$

$$-(q^2-1)(x-q^{2n+2}) \Big(\sum_{\substack{\alpha < \beta \\ \alpha \neq \beta'}} + x \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \alpha \neq \beta'}} \Big) E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha}$$

$$+ \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta}(x) \, E_{\alpha\beta} \otimes E_{\alpha'\beta'} \qquad (1.4)$$

但し，α, β は $1, 2, \cdots, 2n$ までを動く。また，$\alpha' = 2n+1-\alpha$ を表わす。そして

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2} & (1 \leqq \alpha \leqq n) \\ \alpha + \frac{1}{2} & (n+1 \leqq \alpha \leqq 2n) \end{cases},$$

$$\varepsilon_\alpha = \begin{cases} 1 & (1 \leqq \alpha \leqq n) \\ -1 & (n+1 \leqq \alpha \leqq 2n) \end{cases}$$

とおくとき，

$$a_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} (q^2 x - q^{2n+2})(x-1) & (\alpha = \beta) \\ (q^2-1)(\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta q^{2n+2} q^{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}(x-1) - \delta_{\alpha\beta'}(x-q^{2n+2})) & (\alpha < \beta) \\ (q^2-1)x(\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta q^{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}(x-1) - \delta_{\alpha\beta'}(x-q^{2n+2})) & (\alpha > \beta) \end{cases}$$

である。

1.3. ブレイド群との関係

$P^{ij} \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ を次の元とする。

入れ換える。

$$P^{ij}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_n$$

そして $R^{ij}(x) \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ を、i 番目と j 番目の V に $R(x)$ で作用し、残りには恒等写像で作用するものとし

$$\check{R}^{ij}(x) = R^{ij}(x)\, P^{ij}$$

とおく。すると関係式 (1.2) は次のようになる。

$$\check{R}^{12}(x)\, \check{R}^{23}(xy)\, \check{R}^{12}(y) = \check{R}^{23}(y)\, \check{R}^{12}(xy)\, \check{R}^{23}(x) \qquad (1.5)$$

ここでブレイド群の定義を思い出してみよう。n 本の糸をもつブレイド群 B_n は次の関係式で定まる。

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i-j| \geq 2) \end{array} \right\rangle \qquad (1.6)$$

$S_i = \check{R}^{i\,i+1}(0)$ とおく。式 (1.5) と (1.6) とにより、σ_i を S_i に対応させることにより、B_n の $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ への表現ができる。

さらに $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ 上の"量子化された"指標を考えると絡み目の不変量である二変数 Jones 多項式や Kauffman

多項式と関係していることがわかる。[W], [T]

2. Brauerの中心環とそのq-analogue

2.1. 中心環とそのq-analogue

$\mathfrak{g}$をリー環とし，Vを$\mathfrak{g}$-加群とする。$\mathfrak{g}$の$V^{\otimes n}$への対角作用をΔ_nで表わす。そして

$$Z_n = \{ x \in \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \mid \Delta_n(g)x = x\Delta_n(g) \ \text{for} \ {}^{\forall}g \in \mathfrak{g} \} \quad (2.1)$$

を$\mathfrak{g}$とVに関する中心環と呼ぶ。

例 1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}^m$（基本表現）の場合.
Z_nはn次対称群$\mathfrak{S}_n$の群環$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$の商に同型になる。特に，$m \geq n$のときには同型となる。

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2m}(\mathbb{C})$ 又は $\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$ で基本表現の場合.
Z_nの構造は[B]及び[W]によりわかる。(§2.3参照)

さて，中心環のq-analogueを考えてみよう。リー環$\mathfrak{g}$の展開環のq-analogue $\hat{U}_q(\mathfrak{g})$についても，Hopf algebraとしての対角作用Δ_nを考えることにより，上と同様にして$\mathrm{End}(V^{\otimes n})$中に中心環を考えることができる。但し$V$は$\hat{U}_q(\mathfrak{g})$加群とする。

2.2. A_m型の場合

A_m型の基本表現に対応する中心環Z_nの q-analogue $\check{Z}_n$は、神保氏により、A_{n-1}型の Iwahori-Hecke algebra の商となることが示された。特に、$m > n$ のときには、同型になる。

ここで、A_{n-1}型のIwahori-Hecke algebra H_nとは、次の関係式で定義されるalgebraである。

$$H_n = \left\langle T_1, T_2, \cdots, T_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \\ T_i T_j = T_j T_i \quad (|i-j| \geqq 2), \\ T_i^2 - (q - q^{-1}) T_i - 1 = 0 \end{array} \right\rangle \tag{2.2}$$

そしてT_iを$-q\check{R}^{i,i+1}(0)$に移すことにより、H_nの$\check{Z}_n$への表現を作れる。但し、$\check{R}^{i,i+1}(0)$は、解(1.3)から §1.3のようにして作ったものとする。上のH_nから$\check{Z}_n$への写像は全射である。

2.3. C_m型の場合の中心環

$\mathfrak{g}$をC_m型の単純リー環とし、Vをその基本表現とする。$\mathrm{End}(V^{\otimes n})$中の中心環$Z_n$は$m$が$n$に対して十分大きいときには、[B]でのalgebra $D_n(x)$で$x = -2m$とおいたものに等しい。$D_n(x)$は単位元を持つalgebraで生成元と関係式で次により定義される。(xは不定元)

$$D_n(x) = \langle s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1} \mid$$

$$s_i^2 = 1, \quad s_i e_i = e_i s_i = e_i, \quad e_i^2 = x e_i,$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},$$

$$s_i s_j = s_j s_i, \quad s_i e_j = e_j s_i, \quad e_i e_j = e_j e_i \quad (|i-j| \geqq 2)$$

$$e_i e_{i\pm1} e_i = e_i, \tag{2.3}$$

$$s_i e_{i\pm1} e_i = s_{i\pm1} e_i, \quad e_i e_{i\pm1} s_i = e_i s_{i\pm1} \rangle$$

$D_n(x)$ を Brauerの中心環 と呼ぶ。

C_m 型のリー環の基本表現に関する中心環は、一般には、$D_n(-2m)$ の商である。

2.4. C_m 型の場合の中心環の q-analogue

まず algebra $C_n(\alpha, q)$ (α, q は不定元) を定義する。(単位元をもつ)

$$C_n(\alpha, q) =$$

$$\langle \tau_i, \tau_i^{-1}, \varepsilon_i \mid$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}, \qquad \varepsilon_i = \varepsilon_i,$$

$$\tau_i^{\pm1} \varepsilon_{i+1} \varepsilon_i = \tau_{i+1}^{\mp1} \varepsilon_i, \quad \tau_i^{\pm1} \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i = \tau_{i-1}^{\mp1} \varepsilon_i,$$

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \tau_i^{\pm1} = \varepsilon_i \tau_{i+1}^{\mp1}, \quad \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \tau_i^{\pm1} = \varepsilon_i \tau_{i-1}^{\mp1},$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad \varepsilon_i \tau_j = \tau_j \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i \quad (|i-j| \geqq 2),$$

(続く)

$$\tau_i \tau_i^{-1} = \tau_i^{-1} \tau_i = 1, \quad \tau_i \varepsilon_i = \varepsilon_i \tau_i = (-\alpha^2 q)^{-1} \varepsilon_i,$$
$$\tau_i - \tau_i^{-1} = (q - q^{-1})(1 - \varepsilon_i) \ > \qquad (2.4)$$

このとき、次が成り立つ。

命題 $\alpha = q^{-\frac{x}{2}}$ とおき、$C_n(\alpha, q)$ の $q \to 1$ とした極限をとると、$D_n(x)$ と同型になる。但し、τ_i, τ_i^{-1} は A_i に対応し、ε_i は e_i に対応する。

証明. $C_n(\alpha, q)$ では次が成り立つ。

$$\varepsilon_i^2 = \left(1 - \frac{\alpha^2 q - \alpha^{-2} q^{-1}}{q - q^{-1}} \right) \varepsilon_i.$$

($C_n(\alpha, q)$ の定義 (2.4) の最後の関係式に ε_i をかける].
ここで $q \to 1$ とすると、$\varepsilon_i^2 = x \varepsilon_i$ となる。$D_n(x)$ の他の関係式は、$C_n(\alpha, q)$ の関係式から直ちに従う。さらに $C_n(\alpha, q)$ と $D_n(x)$ との次元が共に、$(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$ となることから上の命題が成り立つ。■

algebra $C_n(\alpha, q)$ は、絡み目の不変量である Kauffman 多項式に関係する algebra として [B-W] 及び [M] で導入された。その後、$C_n(q^m, q)$ の τ_i を量子化された YBE の解 (1.4) に対応する $\check{R}^{i\,i+1}(0)$ の適当な q の巾乗倍に対応させることにより、$C_n(q^m, q)$ の、$\hat{U}_q(\mathfrak{g})$ 作用と

可換な $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ への表現ができることがわかった。それゆえ，次元の比較をして，$\hat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$と$V$に関する中心環が$C_n(q^m, q)$の商となることがわかる。特に，$m$が$n$にくらべて十分大きいときは同型になる。

3. Brauerの中心環とそのq-analogueの表現

3.1 表現の分類

§2で導入したalgebras $D_n(x)$と$C_n(\alpha, q)$の既約表現は次のようにして分類される。

記号：
$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \mid \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq 0 \quad (i \in \mathbb{N}),\ \lambda_j = 0 \quad (j \gg 0)\}.$$

Λの元を<u>分割</u>と呼ぶ。

$$\Lambda(n) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \in \Lambda \mid \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = n - 2j,\ 0 \leq j \leq [\tfrac{n}{2}]\}$$

定理 $D_n(x)$，$C_n(\alpha, q)$はそれぞれ$\mathbb{C}(x)$，$\mathbb{C}(\alpha, q)$上の半単純algebraであり，これらの既約表現はともに$\Lambda(n)$でパラメトライズされる。

証明　$D_n(X)$ の場合は古典的に知られている。$C_n(\alpha, q)$ の場合については、$C_n(\alpha, q)$ が $D_n(X)$ の 1-parameter deformation であることから、半単純 algebra の剛体性定理より従う。

3.2. 表現空間の構成

以下 $\Lambda(n) \ni \lambda$ に対応する $C_n(\alpha, q)$ の既約表現の構成法について述べる。$D_n(X)$ の既約表現は、以下で得られた表現で、$\alpha = q^{-\frac{x}{2}}$ とおき、q を 1 にした極限をとれば得られる。

λ に対応する $C_n(\alpha, q)$ の既約表現を $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ とする。まず V_λ の基底を与える。

記号：$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$, $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots) \in \Lambda$ に対し

$$\lambda \underset{1}{\sim} \lambda' \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists} j \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \lambda_j = \lambda'_j \pm 1, \ \lambda_i = \lambda'_i \ (i \neq j)$$

また、

$$\mathcal{P}(\lambda) = \{ P = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(n)}) \mid \lambda^{(i)} \in \Lambda, \ \lambda^{(0)} = (0, 0, \cdots), \ \lambda^{(n)} = \lambda, \ \lambda^{(i)} \underset{1}{\sim} \lambda^{(i+1)} \}$$

とおく。

そして $V_\lambda = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}(\lambda)} \mathbb{C}(\alpha, q) v_P$ とおく。

$\mathrm{End}(V_\lambda)$ 中に $C_n(\alpha, q)$ の表現を構成する。

3.3. 表現行列の構成

§3.2で与えられた V_λ の基底 $\{v_p \mid p \in \mathcal{P}(\lambda)\}$ に関する $T_i \in C_n(\alpha, q)$ の表現行列を与える。

記号: $$\{k\} = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}},$$

$$\{k; m\} = \frac{\alpha^m q^k - \alpha^{-m} q^{-k}}{q - q^{-1}}.$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\ell, 0, \cdots, 0, \cdots) \in \Lambda$ に対し

$$h_\nu(i,j) = \nu_i - i - j + \max\{k \mid \nu_k \geqq j\}$$

$$(1 \leqq i \leqq \ell,\ 1 \leqq j \leqq \nu_i),$$

$$g_\nu(i) = \begin{cases} \dfrac{\prod_{j=i}^{\nu_i + i - 1} \{\nu_i + \nu_j + 2 - i - j; 2\}}{\prod_{j=1}^{\nu_i} \{j - i + 1; 1\}} & (\nu_i + i > \ell), \\[2ex] \dfrac{\prod_{j=i}^{\ell} \{\nu_i + \nu_j + 2 - i - j; 2\}}{\prod_{j=1}^{\nu_i} \{j - i + 1; 1\} \prod_{j=1}^{\ell - \nu_i - i + 1} \{3 - 2i - j; 2\}} & (\nu_i + i \leqq \ell), \end{cases}$$

$$G_\nu = \prod_{i=1}^{\ell} g_\nu(i) \left(\prod_{j=1}^{\nu_i} \frac{\{j - i; 1\}}{\{h_\nu(i,j) + 1\}} \right).$$

$A_i \in \mathrm{End}(V_\lambda)$ の定義.　$1 \leq i \leq n-1$ なる i を固定する。

$$P = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(n)}) \text{ と } Q = (\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \cdots, \nu^{(n)})$$

という2つの $\mathcal{P}(\lambda)$ の元に対し．$A_i \in \mathrm{End}(V_\lambda)$ の基底 v_P と v_Q に関する行列要素 $(A_i)_{QP}$ を以下のように定める。$\lambda^{(r)}$ の要素を $\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \cdots$ と書き，$\nu^{(r)}$ の要素を $\nu_1^{(r)}, \nu_2^{(r)}, \cdots$ と書く。また，

$$l = \max\{k \mid \lambda_k^{(i-1)} \neq 0\},$$

$$n = (n_1, n_2, \cdots, n_l, 0, 0, \cdots) := \lambda^{(i-1)},$$

$$n(i) = n_i - i + 1$$

とおく。δ_1 及び δ_2 は 1 又は -1 である。

Case 1.　$\exists j \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \setminus \{i\}$ s.t. $\lambda^{(j)} \neq \nu^{(j)}$

$$\Longrightarrow \quad (A_i)_{QP} = 0.$$

以下，Case 1 以外の場合を考える。

Case 2.　$P = Q$ かつ $\exists r \in \mathbb{N}$ s.t. $\lambda_r^{(i-1)} = \lambda_r^{(i+1)} \pm 2$

$$\Longrightarrow \quad (A_i)_{PP} = q.$$

Case 3. $P=Q$ かつ $\lambda^{(i-1)}=\lambda^{(i+1)}$

$\Rightarrow\ ^{\exists 1}r\in\mathbb{N}$ s.t. $\lambda_r^{(i-1)}=\lambda_r^{(i)}-\delta_1$,

$$(A_i)_{PP}=-\frac{\alpha^{-2\delta_1}q^{-2\delta_1 n(r)-1}}{\{2\delta_1 n(r)+1\,;\,2\delta_1\}}-\frac{\alpha^{-2\delta_1}q^{-2\delta_1 n(r)-1}G_{\lambda^{(i)}}}{G_{\lambda^{(i-1)}}\{2\delta_1 n(r)+1\,;\,2\delta_1\}}.$$

Case 4. $P=Q$ かつ Case 2 でも Case 3 でもない。

$\Rightarrow\ ^{\exists 1}r,s\in\mathbb{N}$ s.t. $\lambda_r^{(i-1)}=\lambda_r^{(i)}-\delta_1$, $\lambda_s^{(i)}=\lambda_s^{(i+1)}-\delta_2$,

$$(A_i)_{PP}=-\frac{\alpha^{\delta_2-\delta_1}q^{\delta_2 n(s)-\delta_1 n(r)}}{\{\delta_1 n(r)-\delta_2 n(s)\,;\,\delta_1-\delta_2\}}.$$

Case 5. $P\neq Q$ かつ $\lambda^{(i-1)}\neq\lambda^{(i+1)}$

$\Rightarrow\ ^{\exists 1}r,s\in\mathbb{N}$ s.t. $\lambda_r^{(i-1)}=\lambda_r^{(i)}-\delta_1$, $\lambda_s^{(i)}=\lambda_s^{(i+1)}-\delta_2$,

$$(A_i)_{QP}=\frac{\sqrt{\{\delta_1 n(r)-\delta_2 n(s)+1\,;\,\delta_1-\delta_2\}\{\delta_1 n(r)-\delta_2 n(s)-1\,;\,\delta_1-\delta_2\}}}{\{\delta_1 n(r)-\delta_2 n(s)\,;\,\delta_1-\delta_2\}}$$

Case 6. $P \neq Q$ かつ $\lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i+1)}$

$$\Rightarrow {}^{\exists 1} r, s \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \lambda_r^{(i-1)} = \lambda_r^{(i)} - \delta_1, \quad \nu_s^{(i-1)} = \nu_s^{(i)} - \delta_2,$$

$$(A_i)_{QP} = - \frac{\alpha^{-\delta_1 \cdot \delta_2} q^{-\delta_1 n(r) - \delta_2 n(s) - 1} \sqrt{G_{\lambda^{(i)}} G_{\nu^{(i)}}}}{G_{\lambda^{(i-1)}} \{\delta_1 n(r) + \delta_2 n(s) + 1 ; \delta_1 + \delta_2\}}$$

主結果

定理 $T_i \in C_n(\alpha, q)$ を上で定義した $A_i \in \mathrm{End}(V_\lambda)$ に対応させることにより、$C_n(\alpha, q)$ の λ でパラメトライズされる既約表現が得られる。

略証　上の定理の証明には、[J-M-O] で得られた C_m 型のリー環に対応する IRF 模型の解を全面的に使う。まず、上で構成した行列 A_i は、[J-M-O] での解の Bolzmann weight からできる face operator と呼ばれるものの、trigonometric limit の、スペクトラルパラメータに関する最低次の係数のスカラー倍となっていることに注意する。このことさえわかれば、A_i が $C_n(\alpha, q)$ の T_i の像となるための諸々の関係式は、[J-M-O] でのいろいろな関係式、例えば crossing symmetry を用いて証明できる。但し、[J-M-O] での模型は、$\alpha = q^m$ の場合に当るので、無数の m に対して関係式が成立することから不定元 α でも成り立つことがわかる。∎

系 Brauerの中心環 $D_n(x)$ の既約表現は すべて $C_n(\alpha, q)$ の既約表現を $\alpha = q^{-\frac{x}{2}}$ とおいて q を1にした極限を求めることで得られる。

証明 x を不定元とみて、さらに、

$$\lim_{q \to 1} \frac{q^{\frac{1}{2}x} - q^{-\frac{1}{2}x}}{q - q^{-1}} = \frac{1}{2}x$$

とおくことにする。すると、さきの行列 A_i の各成分は、$\alpha = q^{-\frac{x}{2}}$ とおいて $\lim_{q \to 1}$ としたときも定義されているので、これにより $D_n(X)$ の既約表現が定まる。 ◻

まとめ 主結果は algebra $C_n(\alpha, q)$ の既約表現の具体的な構成法である。$C_n(\alpha, q)$ が Brauer の中心環の q-analogue であるということは、vertex type の量子化された YBE の解を使ってわかった。また、$C_n(\alpha, q)$ の既約表現の構成法は、face type の量子化された YBE の解を用いてわかった。A_m 型，B_m 型の場合にも同様の議論ができる。D_m 型のときもだいたい同じ議論ができるが，YBEを使ってわかる部分は中心環よりもわずかに小さい部分で，中心環全体についてはわからない。

References

[B-W] J. S. Birman and H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra*, preprint.

[B] R. Brauer, *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups*, Ann. of Math. **38** (1937), 854–872.

[J] M. Jimbo, *A q–difference analogue of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang–Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[J-M-O] M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, *Solvable lattice models related to the vector representation of classical Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **116** (1988), 507–525.

[M] J. Murakami, *The Kauffman polynomial of links and representation theory*, Osaka J. Math **24** (1987), 745–758.

[T] T. G. Turaev, *The Yang–Baxter equation and invariants of links*, Invent. math. **92** (1988), 527–553.

[W] H. Wenzl, *On the structure of Brauer's centralizer algebra*, preprint.