数理解析研究所講究録
第 701 巻 1989 年 19-30

超関数と一般関数

鳥取大　教育学部　栗林幸男(Yukio Kuribayashi)

§1. はじめに

関数の概念を拡張するにはいくつかの方法があり，超関数（hyperfunction）の理論は最もすぐれたもののひとつとして知られている。しかし超準解析（non-standard analysis）を用いて関数概念を拡張することもできる。しかも，超準解析を用いて拡張された関数を一般関数と呼ぶことにすれば，一般関数と超関数の間には密接な関連が見られる。ここではその関連について述べたい。次にその要点を示しておこう。

関数 $F(z)$ を定義関数とする超関数を $f(x)$ とするとき，$f(x)=[F(z)]$ あるいは境界表現して，$f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ のように表わす。このとき，y を正の無限小とし，$f(x,y)=F_+(x+iy)-F_-(x-iy)$ とおいて定まる一般関数 $[f(x,y)]$ と超関数 $f(x)$ を比較するのである。

超関数の理論では微積分の演算が自由である。これに対して一般関数の理論では乗法に関する演算が自由である。これらの特性にともなって両者にどのような差が現われるか見ていきたい。

§2. 超実数，超複素数および一般関数

まず $R^+=\{y\in R \mid y>0\}$ とし，$F=\{(0,y)\mid y\in R^+\}$ とおく。Fは有限交差的である。Fを含む超フィルター（ultra-filter）のひとつを$\mathfrak{F}$とする。

KをRまたはCまたは$Map(R,C)$，実変数の複素数値関数全体の集合，とする。$a(y), b(y)\in\prod_{y\in R^+}K$ に対して $\{y\in R^+\mid a(y)=b(y)\}\in\mathfrak{F}$ が成立するとき $a(y)\sim b(y)$ と定義する。関係$\sim$は同値関係である。商空間 $\prod_{y\in R^+}K/\sim$ を ${}^*K$ で表わす。すなわち ${}^*K=\prod_{y\in R^+}K/\sim$.

${}^*R$，${}^*C$，${}^*Map(R,C)$ の元をそれぞれ，超実数，超複素数，一般関数という。$a(y)\in\prod_{y\in R^+}K$ の同値類を $[a(y)]$ と表わす。

補題 2.1　$[f(x,y)]\in {}^*Map(R,C)$，$[a(y)]\in{}^*R$ とすれば $[f(a(y),y)]\in{}^*C$．しかも代表元のえらび方によらない。

定理 2.2　$[f(x,y)]$，$[g(x,y)]\in{}^*Map(R,C)$ とする。$[f(x,y)]=[g(x,y)]$ であるための必要十分条件は，任意の $[a(y)]\in{}^*R$ に対し $[f(a(y),y)]=[g(a(y),y)]$ が成立するこ

とである。

証明 (i) $[f(x,y)]=[g(x,y)]$ とする。

$A=\{y\in R^{+}\mid x$ の関数として $f(x,y)=g(x,y)\}$ とおくと $A\in\mathcal{F}$ が成立する。 $[a(y)]\in{}^{*}R$ とし $B=\{y\in R^{+}\mid f(a(y),y)=g(a(y),y)\}$ とおけば $B\supset A$ である。従って $B\in\mathcal{F}$。

(ii) $[f(x,y)]\neq[g(x,y)]$ とする。

$A=\{y\in R^{+}\mid x$ の関数として $f(x,y)\neq g(x,y)\}$ とおけば $A\in\mathcal{F}$ である。 $y\in A$ ならば $f(a_0(y),y)\neq g(a_0(y),y)$ となる $a_0(y)\in R$ が存在する。 $a(y)=a_0(y)\ \ y\in A$, $a(y)=0\ \ y\notin A$ として $[a(y)]$ を定めれば $[f(a(y),y)]\neq[g(a(y),y)]$ である。 Q. E. D.

超実数の四則演算，大小および超複素数の四則演算は通常の方法で定義する。 一般関数の四則演算，微分積分は次のように定義する。

定義 2. 3 $[a(y)],[b(y)]\in{}^{*}C$, $[f(x,y)]$, $[g(x,y)]\in{}^{*}Map(R,C)$ とする。

$$[a(y)][f(x,y)]+[b(y)][g(x,y)]=[a(y)f(x,y)+b(y)g(x,y)],$$

$$[f(x,y)][g(x,y)]=[f(x,y)g(x,y)],$$

$$[f(x,y)]/[g(x,y)]=[(f(x,y)/g(x,y))^{*}],$$

ただし
$$(f(x,y)/g(x,y))^{*}=\begin{cases} f(x,y)/g(x,y) & g(x,y)\neq 0 \\ 0 & g(x,y)=0 \end{cases}$$

とする。

$$\frac{d}{dx}[f(x,y)] = [(\frac{d}{dx}f(x,y))^{*}],$$

ただし　$(\frac{d}{dx}f(x,y))^{*} = \frac{d}{dx}f(x,y)$　$f(x,y)$ が x の関数として微分可能なところで，$(\frac{d}{dx}f(x,y))^{*} = 0$　$f(x,y)$ が x の関数として微分可能でないところで，とする。

以下の定義においても記号 $(\quad)^{*}$ は同様に用いる。

$$\int [f(x,y)]\,dx = [(\int f(x,y)\,dx)^{*}],$$

$[a(y)]$, $[b(y)] \in {}^{*}R$ とする.

$$\int_{[a(y)]}^{[b(y)]} [f(x,y)]\,dx = [(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx)^{*}]。$$

$f(x,y) \in \prod_{y \in R^{+}} Map(R,C)$ とする。$f(x,y)$ が固定した $y \in R^{+}$ に対して与えられた性質をもつものとする。この $y \in R^{+}$ の全体を A とする。$A \in \mathfrak{F}$ が成立するとき，その性質はほとんど到るところ (almost everywhere) あるいはほとんどすべての y について成立するという。記号で a. e. のように略記する。

$$(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx)^{*} = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \quad a.\,e.$$

が成立するとき $[f(x,y)]$ は閉区間 $[[a(y)],[b(y)]] = [a(y), b(y)]$ で積分可能であるという。

微分可能，不定積分可能，局所可積分等の性質についても同様に定義する。

次に一般関数の具体的な例をあげておこう。

例 2.4　(1)　Heaviside 関数

$$[Y(x,y)] = [-\frac{1}{2\pi}Arg(-x-iy)+\frac{1}{2\pi}Arg(x+iy)]$$

(2)　Dirac のデルタ関数

$$[\delta(x,y)] = [-\frac{1}{2\pi i}(\frac{1}{x+iy}-\frac{1}{x-iy})]$$
$$= [\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}]$$

(3)　関数 $\frac{1}{x}$ の有限部分

$$[\mathrm{p.f.}\frac{1}{x}] = [\frac{1}{2}(\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{x-iy})]$$
$$= [\frac{x}{x^2+y^2}]$$

定義よりただちに次の結果が得られる。

定理 2.5　(4)　$\frac{d}{dx}[Y(x,y)] = [\delta(x,y)]$

(5)　$\frac{d}{dx}[\delta(x,y)] = (-2)[\delta(x,y)][\mathrm{p.f.}\frac{1}{x}]$

従って

(6)　$(-\frac{1}{2})[\delta'(x,y)] = [\delta(x,y)][\mathrm{p.f.}\frac{1}{x}]$

(7)　$[x][\mathrm{p.f.}\frac{1}{x}] = 1 - \pi[\delta(x,y)y]$

(8)　$(-1)[x][\delta'(x,y)] = 2[\delta(x,y)] - 2\pi[\delta^2(x,y)y]$

なお (6) は物理学で公式として用いられているがこれまで数学的な正当化はされていなかった。

§ 3. 超関数と一般関数

G. Takeuti [9] にならい Schwartz 超関数(distribution)の理論における手法を用いて次の定義をする。

定義 3.1　$[f(x,y)]$, $[g(x,y)] \in {}^*Map(R, C)$ は局所可

積分とする。任意の $\varphi \in (\mathcal{D})$ に対して

$$st\left[\int f(x,y)\varphi(x)dx\right] = st\left[\int g(x,y)\varphi(x)dx\right]$$

が成立するとき $[f(x,y)] \stackrel{w}{=} [g(x,y)]$ と表わす。

$S \in (\mathcal{D})'$ の場合も，任意の $\varphi \in (\mathcal{D})'$ に対して

$$st\left[\int f(x,y)\varphi(x)dx\right] = S(\varphi)$$

が成立するとき，$[f(x,y)] \stackrel{w}{=} S$ と表わすことにする。

定義よりただちに次の結果が得られる。

定理 3.2　$[f(x,y)],[g(x,y)] \in {}^*Map(R,C)$ は局所可積分とする。$[f(x,y)] = [g(x,y)]$ ならば $[f(x,y)] \stackrel{w}{=} [g(x,y)]$ が成立する。

定理 3.3　$[f(x,y)] \in {}^*Map(R,C)$ は C^1 級とする。

$[f(x,y)] \stackrel{w}{=} 0$ ならば $[f'(x,y)] \stackrel{w}{=} 0$.

超関数論において $x\delta(x) = 0$ であることが知られている。これを一般関数論の立場で見ると $[x][\delta(x,y)] \stackrel{w}{=} 0$ と表わすことができる。しかも $[x][\delta(x,y)] \neq 0$，すなわち一般関数としては 0 ではない。

$[x][\delta(x,y)] \stackrel{w}{=} 0$ を微分して $(-1)[x][\delta'(x,y)] \stackrel{w}{=} [\delta(x,y)]$。

この式と (8) 式より次の結果が得られる。

定理 3.4　$[\delta(x,y)] \stackrel{w}{=} 2\pi[\delta^2(x,y)y]$。

超関数を表わす記号は金子 [3] と同様に次のように用いる。Ω を R の開区間とし，$U \supset \Omega$ を Ω の複素近傍とする。U，$U \setminus \Omega$ 上の正則関数全体の作る空間をそれぞれ $\mathcal{O}(U)$,

$\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ とし $[F(z)]\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)$ が Ω 上の超関数 $f(x)$ を表わすとき，$f(x)=[F(z)]$ あるいは $f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ のように境界表示を用いて表わす。なお便宜的に $F(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ に対し $F(z)=0 \quad z\notin U$ と定めておく。

$f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ のとき，$f(x,y)=F_+(x+iy)-F_-(x-iy)$ とおいて一般関数 $[f(x,y)]$ を考える。次の性質は明らかであろう。

定理 3.5　$F(z)$ は C で正則とする。$f(x,y)=F_+(x+iy)-F_-(x-iy)$ とおけば $[f(x,y)]\simeq 0$ が成立する。

なお次の性質もあげておこう。

定理 3.6　任意の $[a(y)]\in{}^*R$ に対し $st[f(a(y),y)]=0$ ならば，任意の $\varepsilon\in R^+$ に対し

$$\{y\in R^+ \mid \sup_{x\in R}|f(x,y)|\leq\varepsilon\}\in\mathcal{F}.$$

超関数の定義域が Ω のとき対応する一般関数の定義域を ${}^*\Omega$ に制限して考えることにしよう。

$F(z)\in\mathcal{O}(U)$ のとき $f(x)=[F(z)]$ とすれば $f(x)=0$ である。しかし，$f(x,y)=F_+(x+iy)-F_-(x-iy)$ として一般関数 $[f(x,y)]$ を考えると $[f(x,y)]\neq 0$，すなわち超関数としては 0 であるが，一般関数として見ると，無限小であるが，0 ではない。

そこで $F(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ とし，$f(x,y)=F_+(x+iy)-F_-(x-iy)$ として一般関数 $[f(x,y)]$ を考えることにする。こうして，

基本的な演算について超関数と一般関数の比較をしよう。

1° 線型演算

$\lambda, \mu \in C$, $F(z), G(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ とする。

$$\lambda(F_+(x+iy) - F_-(x-iy)) + \mu(G_+(x+iy) - G_-(x-iy))$$

$$= (\lambda F_+ + \mu G_+)(x+iy) - (\lambda F_- + \mu G_-)(x-iy)$$

であるから超関数と一般関数は同様であるといってよい。

2° 実解析関数による掛け算

$\varphi(x)$ を Ω 上の実解析関数とし，$F(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ とする。

$\varphi(x)$ と一般関数 $[F_+(x+iy) - F_-(x-iy)]$ との積は，

$$\varphi(x)[F_+(x+iy) - F_-(x-iy)] = [\varphi(x)(F_+(x+iy) - F_-(x-iy)]$$

である。これに対し超関数論での積は $\varphi(x)$ を解析接続して $\varphi(z)$ とし $(\varphi F)_+(x+iy) - (\varphi F)_-(x-iy)$ である。

$$(\varphi F)_+(x+iy) - (\varphi F)_-(x-iy)$$

$$= \varphi_+(x+iy)(F_+(x+iy) - F_-(x-iy)) + (\varphi_+(x+iy) - \varphi_-(x-iy))F_-(x-iy)$$

であるから両者の差は

$$(\varphi_+(x+iy) - \varphi(x))(F_+(x+iy) - F_-(x-iy)) + (\varphi_+(x+iy) - \varphi_-(x-iy))F_-(x-iy)$$

である。$\varphi_+(x+iy) - \varphi(x)$ は無限小であるが $F_+(x+iy) - F_-(x-iy)$ は有限とは限らない。従って

$$(\varphi_+(x+iy) - \varphi(x))(F_+(x+iy) - F_-(x-iy))$$

は無限小とは限らない。項 $(\varphi_+(x+iy) - \varphi_-(x-iy))F_-(x-iy)$ についても同様のことが言える。従って実解析関数との積を

考えると，超関数と一般関数では大きな差がでることがある。

さらに $G(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ として積

$$[F_+(x+iy) - F_-(x-iy)][G_+(x+iy) - G_-(x-iy)]$$

を考えると，超関数と一般関数では大きな差がでるといってよい。

3° 微分

$F(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ のとき，$\frac{d}{dz}F(z) = \frac{\partial}{\partial x}F(x+iy)$ であるから

$$\frac{d}{dz}F_+(z) = \frac{\partial}{\partial x}(u_+(x,y) + iv_+(x,y)),$$
$$\frac{d}{dz}F_-(z) = \frac{\partial}{\partial x}(u_-(x,-y) + iv_-(x,-y)).$$

従って超関数としての微分と一般関数としての微分は同様であると言ってよい。なおここでは，$F_+(x+iy) = u_+(x,y) + iv_+(x,y)$，$F_-(x-iy) = u_-(x,-y) + iv_-(x,-y)$ とした。

4° 定積分

超関数 $f(x) = [F(z)]$ は実数の閉区間 $[a, b]$ で積分可能とする。積分路 Γ を右図のように定める。超関数としての積分は次のようになる。

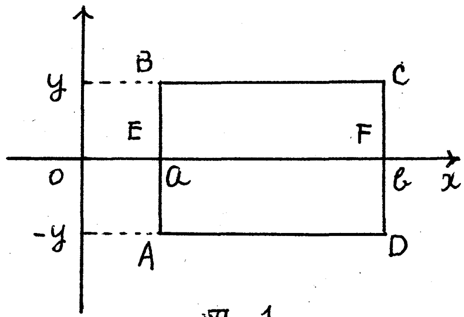

図 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\Gamma F(z)\,dz$$

一方，一般関数 $[F_+(x+iy) - F_-(x-iy)]$ の積分は

$$\int_a^b \{F_+(x+iy) - F_-(x-iy)\}\,dx = \int_a^b F_+(x+iy)\,dx - \int_a^b F_-(x-iy)\,dx$$

である。（くわしくはその同値類）従って両者の差は

$$\int_E^B F_+(x+it)\,dt + \int_C^F F_+(x+it)\,dt + \int_F^D F_-(x-it)\,dt + \int_A^E F_-(x-it)\,dt \qquad (※)$$

である。 $F(z)$ は点 E および F の近傍で解析的であるから

$|F_+(x+iy)|$, $|F_-(x-iy)|$ はいずれも上の積分区間で有界である。

従って(※)の各項は，y が無限小であるから，無限小である。

故に，超関数 $f(x)=[F(z)]$ が実数の閉区間 $[a,b]$ で積分可能ならば，一般関数 $[F_+(x+iy)-F_-(x-iy)]$ も $[a,b]$ で積分可能であって両者の差は無限小である。

例 3.7　一般関数 $[\mathrm{p.f.}\frac{1}{x}]=[\frac{x}{x^2+y^2}]$ の積分

$$I=\int_a^b \mathrm{p.f.}\frac{1}{x}\,dx=\int_a^b \frac{x}{x^2+y^2}\,dx=\frac{1}{2}\log\frac{b^2+y^2}{a^2+y^2}$$

ただし，$a, b \in \mathcal{R}$ とする。

上の積分は $a=0$ あるいは $b=0$ の場合も意味をもつ。すなわち一般関数として積分可能である。

$a \neq 0$, $b \neq 0$ として y を省略すれば

$$I \fallingdotseq \log\left|\frac{b}{a}\right|$$

が得られる。（≒は両辺の差が無限小であることを示す。）

とくに $a<0<b$ とすれば $I \fallingdotseq \log\frac{b}{|a|}$ が得られる。この右辺は超関数としての積分と一致する。なお同値類を示す [ ] は省略した。

5° 不定積分

$F(z)\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$, $F(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とする。

一般関数の意味での不定積分を考える。

$$\int\{F_+(x+iy)-F_-(x-iy)\}dx=\int u_+(x,y)\,dx+i\int v_+(x,y)\,dx-\int u_-(x,-y)\,dx-i\int v_-(x,-y)\,dx$$

$$=U_+(x,y)+\varphi_1(y)+i\{V_+(x,y)+\varphi_2(y)\}-U_-(x,-y)-\psi_1(-y)-i\{V_-(x,-y)+i\psi_2(-y)\}$$

ここで，$U_+(x,y)$ は $u_+(x,y)$ の原始関数であり，その他の関数も同様である。 とくに

$$U_+(x,y)+\varphi_1(y)+i\{V_+(x,y)+\varphi_2(y)\},\quad U_-(x,-y)+\psi_1(-y)+i\{V_-(x,-y)+\psi_2(-y)\}$$

がそれぞれ上半平面および下半平面で正則関数となるように $\varphi_1(y)$，$\varphi_2(y)$，$\psi_1(-y)$，$\psi_2(-y)$ をえらぶと，超関数としての $f(x)=[F(z)]$ の不定積分と一致する。

参考文献

[1] M. Davis, Applied nonstandard analysis, Wiley (1976).

[2] A. E. Hurd & P. A. Loeb, An introduction to nonstandard real analysis, Academic press (1985).

[3] 金子 晃，超函数入門 上，下，東京大学出版会 (1980−1982).

[4] H. J. Keisler, An infinitesimal approach to stochastic analysis, Memoirs AMS 297 (1984).

[5] Y. Kuribayashi, A generalization of the concept of functions III, J. Fac. Educ. Tottori Univ., 30 (1981) 9−13.

[6] P. A. Loeb, An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory, Probabilistic analysis and related topics, vol. 2, Academic press (1979).

[7] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立 (1976).

[8] 齋藤正彦, 超積と超準解析, 増補新版, 東京図書 (1987).

[9] G. Takeuti, Dirac space, Proc. Japan Acad. 38 (1962) 414 - 418.

[10] 竹内外史, 無限小解析と物理学, 遊星社 (1985).