

粘性流れ問題の一般化された境界要素解析

Numerical Analyses of Viscous Fluid Flow Problems

by Generalized Boundary Element Method

日大生産工 角田和彦 (Kazuhiko Kakuda)

日大生産工 登坂宣好 (Nobuyoshi Tosaka)

Abstract

In this paper, we apply the generalized boundary element method to obtaining the numerical solutions of viscous fluid flow problems governed by the Navier-Stokes equations or the Burgers equation. The basic idea of this method is to derive the boundary integral equation on each subdomain in the whole domain by the use of a fundamental solution for the linearized differential operator in the subdomain of the problem. The final system of equations with a sparse coefficient matrix is solved implicitly by using a simple iterative procedure. The workability and effectiveness of the proposed method are demonstrated by several numerical examples.

1. はじめに

粘性流れの問題に対する組織的で汎用性のある数値計算手法としては、差分法や有限要素法が多用されている^{1, 2)}。また、近年、境界要素法による粘性流れ問題の解析も進められているが、これらの定式化では未知量として渦度と流速または流れ関数が用いられている³⁻⁵⁾。

これ迄、非圧縮性粘性流れの定常及び非定常問題に対し、流速と圧力を未知量とした境界-領域型積分方程式法（または、Hybrid型積分方程式法）の近似解法による定式化とその数値計算例を示してきた⁶⁻⁸⁾。この積分方程式の導出に当たっては、対象とする非線形支配微分方程式の線形微分作用素のみに対する基本解が利用されている。非線形方程式の離散化には、境界のみならず内部領域についての離散化も行っている。また、得られた離散化方程式には高いReynolds数域までの流れの問題を解くために、Newton-Raphson法の繰り返し計算スキームを適用した。この計算スキームを導入したことにより、例えば2次元流れのベンチマーク問題としてよく知られているCavity flowの問題では 10^4 までのReynolds数に関する数値結果が得られた。

最近、著者らは非線形問題に対し”一般化された境界要素法”⁹⁾という新しい積分方程式解法を開発した。この解析法

は、非線形支配微分方程式を対象とする領域の部分領域内で線形化し、その部分領域内での境界積分方程式を誘導する際に非線形項の影響を取り入れた基本解を用いることにある。この境界積分方程式は、各部分領域内で適当な時間-空間要素を用いて離散化され、また得られた要素離散化方程式は全体領域に対し組み立てられる。この時、準線形の離散化方程式は係数帯行列を有するという特徴があり、単純な繰り返し代入法により容易に解かれる。

本論文では、上述の一般化された境界要素法により Navier-Stokes 方程式によって支配されている非圧縮性粘性流れとその1次元モデルである Burgers 方程式の初期値-境界値問題を解析することを目的とする。Burgers 方程式の問題については、2つの立場からの一般化された境界要素解析を行なう¹⁰⁾。第1の解析法は、境界積分方程式を誘導するに当たり時間依存型の基本解（移流拡散型の基本解）を利用するアプローチである。また、第2の解析法は Burgers 方程式に対し時間差分近似スキームを適用した方程式に関する基本解を利用するアプローチである。一方、Navier-Stokes 方程式の解析には、時間依存型の基本解を用いている¹¹⁾。本手法の適用性と有効性を、いくつかの具体的な数値計算例を通して示す。

以下の定式化に当たり，記号(,)と(·)はそれぞれ空間変数と時間変数に関する偏微分を表わし，また指標についてはアインシュタインの総和規約を採るものとした。

2. 粘性流れの初期値 - 境界値問題

Navier-Stokes 方程式によって支配されている 2 次元の非圧縮性粘性流れの初期値 - 境界値問題を考える。対象とする非圧縮性粘性流れ場の解析領域を Ω ，その境界を Γ とする。また，時間領域は $T (\equiv [0, \infty))$ で表わすものとする。

この問題に対する微分方程式は，無次元の流速成分 u_i と圧力 p に対して以下のように与えられる。

Navier-Stokes 方程式

$$Re(\dot{u}_i + u_j u_{i,j}) = -Re p_{,i} + (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} \quad \text{in } Tx\Omega \quad (1)$$

連続の方程式 (非圧縮性流体)

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } Tx\Omega \quad (2)$$

ただし， Re は Reynolds 数であり， δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

また，境界条件と初期条件はそれぞれ次式で与えられる。

境界条件

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } Tx\Gamma_u \quad (3)$$

$$\tau_i \equiv \tau_{ij} n_j = \hat{\tau}_i \quad \text{on } Tx\Gamma_\tau \quad (4)$$

初期条件

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = {}_0u_i \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

ただし、 u_i は境界 Γ_u 上で与えられている流速ベクトル成分、 τ_i は境界 Γ_τ 上で与えられているトラクションベクトル成分である。また、 ${}_0u_i(x)$ は与えられた初期流速を表わす。

次に、Navier-Stokes 方程式の 1 次元粘性流れ問題のモデル化として知られている Burgers 方程式の問題を考える。この方程式と境界及び初期条件は、空間領域 $\Omega (\equiv [0, 1])$ と時間領域 T に対して以下のように与えられる。

Burgers 方程式

$$\mu(\dot{u} + u u_x) = u_{,xx} \quad \text{in } TX\Omega \quad (6)$$

境界条件

$$u(0, t) = f(t) \quad (7)$$

$$u(L, t) = g(t) \quad (8)$$

初期条件

$$u(x, 0) = {}_0u(x) \quad (9)$$

ただし、 $\mu (> 0)$ は流れの Reynolds 数に関する非線形パラメータ、 $f(t)$ と $g(t)$ は時間に関する既知関数、 ${}_0u(x)$ は初期流速を表わす。

3. 一般化された境界要素法による定式化

ここでは、非線形問題に対して新たに開発された”一般化された境界要素法”⁹⁾により前述の初期値-境界値問題(1)-(5)または(6)-(9)に関する積分方程式の表現を示す。

3. 1 Burgers 方程式の解析

Burgers 方程式の問題(6)-(9)に関して、2つの立場からの一般化された境界要素法による定式化を示す。第1の解析法は、境界積分方程式の誘導に対し時間依存型の基本解を利用するアプローチ(解析法I)である。また、第2のアプローチ(解析法II)はBurgers 方程式に対し、時間差分近似スキームを適用した方程式に関する基本解を利用する立場である。

3. 1. 1 解析法 I

対象としている領域 Ω の部分領域 $\Omega_i (\equiv [x_{i-1}, x_i])$ と時間領域 $T_f (\equiv [t_{f-1}, t_f])$ 内で Burgers 方程式(6)を線形化した次式

$$\mu(\dot{u} + \bar{u} u_{,x}) = u_{,xx} \quad \text{in } T_f \times \Omega_i \quad (10)$$

を基本微分方程式とする。ただし、上式中の関数 \bar{u} は部分領域 Ω_i 上の境界点の平均値として仮定しており、以下のよう
に与えられる。

$$\bar{u} \equiv \frac{u(x_{i-1}, t_f) + u(x_i, t_f)}{2} \quad (11)$$

次に、式(10)に対する境界積分方程式を誘導するために、以下の Ω_i と T_f に関する重みつき残差法の表現から出発する。

$$\int_{T_f} \int_{\Omega_i} (\mu \dot{u} + \mu \bar{u} u_{,x} - u_{,xx}) \phi^* dx dt = 0 \quad (12)$$

上式に部分積分公式を適用することにより次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} cu(\xi, t_f) = & \int_{\Omega_i} \mu u(x, t_{f-1}) \phi^*(x, t_{f-1}; \xi, t_f) dx \\ & - \int_{T_f} \mu \bar{u} [u(x, t) \phi^*(x, t; \xi, t_f)]_{x_{i-1}}^{x_i} dt \\ & + \int_{T_f} [u_{,x}(x, t) \phi^*(x, t; \xi, t_f)]_{x_{i-1}}^{x_i} dt \\ & - \int_{T_f} [u(x, t) \phi^*_{,x}(x, t; \xi, t_f)]_{x_{i-1}}^{x_i} dt \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 c は形状係数、また重み関数 ϕ^* は

$$\mu \dot{\phi}^* + \mu \bar{u} \phi^*_{,x} + \phi^*_{,xx} = -\delta(x-\xi) \delta(t_f-t) \quad (x_{i-1} < \xi < x_i) \quad (14)$$

を満足する時間依存型の基本解として、

$$\phi^*(x, t; \xi, t_f) = \frac{1}{\mu} H(t_f-t) \left\{ \frac{\mu}{4\pi(t_f-t)} \right\}^{1/2} \exp(-\alpha \tilde{r}^2) \quad (15)$$

で与えられる。ただし、 $H(t_f-t)$ はHeaviside step関数、

$\alpha = \mu/4(t_f-t)$, $\tilde{r}^2 \equiv \{x - \xi + (t_f-t)\bar{u}\}^2$ である。

境界積分方程式(13)の未知関数 $u(x, t)$ に対しては、時間と空間に関する以下の1次の近似化式

$$u(x, t) = \frac{t_f - t}{\Delta t_f} \{u(x, t_{f-1}) - u(x, t_f)\} + u(x, t_f) \quad (16)$$

を適用し、また $u_x(x, t)$ は各時間ステップ内で一定であると仮定することにより、 f 時間ステップに関する次の要素離散化方程式を得る。

$${}_i \mathbf{H}_i \mathbf{u}^{(f)} = {}_i \mathbf{G}_i \mathbf{q}^{(f)} + {}_i \tilde{\mathbf{H}}_i \mathbf{u}^{(f-1)} \quad (17)$$

ただし、各行列と未知ベクトルの定義は文献[12]に従うものとする。

ここで、まず上式の ${}_i \mathbf{q}^{(f)}$ に対して解き、 ${}_i \mathbf{u}^{(f)}$ を全ての領域について組み立て、境界条件と初期条件を適用することにより以下の全体系に関する離散化方程式を得る。

$$\mathbf{A}(\bar{u}) \mathbf{U}^{(f)} = \mathbf{F}^{(f-1)} \quad (18)$$

ただし、 $\mathbf{A}(\bar{u})$ は係数帯行列、 $\mathbf{U}^{(f)}$ は f 時間ステップでの未知ベクトル、 $\mathbf{F}^{(f-1)}$ は既知ベクトルを表わす。式(18)は各時間ステップ毎に単純な繰り返し代入法を適用することにより容易に解かれる。

3. 1. 2 解析法 II

第2の解析法は、式(6)の時間導関数に差分近似を導入した次の方程式を基本式とする。

$$\mu \left(\frac{u^{(f)} - u^{(f-1)}}{\Delta t} + uu_{,x}^{(f)} \right) = u_{,xx}^{(f)} \quad \text{in } \Omega_i \quad (19)$$

ただし、上式中の関数 \bar{u} として、次の2つの立場を選ぶことができる。

$$\bar{u} \equiv \frac{u^{(f-1)}(x_{i-1}) + u^{(f-1)}(x_i)}{2} \quad (20)$$

または、

$$\bar{u} \equiv \frac{u^{(f)}(x_{i-1}) + u^{(f)}(x_i)}{2} \quad (21)$$

式(19)に関する重みつき残差法の表現は以下のようなになる。

$$\int_{\Omega_i} (\lambda u^{(f)} + \mu \bar{u} u_{,x}^{(f)} - u_{,xx}^{(f)} - \lambda u^{(f-1)}) \phi^* dx = 0 \quad (22)$$

ただし、 $\lambda = \mu / \Delta t$ である。上式に部分積分公式を適用することにより以下の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} cu^{(f)}(\xi) = & \int_{\Omega_i} \lambda u^{(f-1)}(x) \phi^*(x, \xi) dx \\ & + [u^{(f)}(x) \phi^*_{,x}(x, \xi)]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ & - [u_{,x}^{(f)}(x) \phi^*(x, \xi)]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ & + [\mu \bar{u} u^{(f)}(x) \phi^*(x, \xi)]_{x_{i-1}}^{x_i} \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、重み関数 ϕ^* は

$$\phi^*_{,xx} + \mu \bar{u} \phi^*_{,x} - \lambda \phi^* = \delta(x - \xi) \quad (24)$$

を満足する基本解として以下のように与えられる。

$$\phi^*(x, \xi) = -\frac{1}{2\gamma} \exp\left[-\left\{\frac{\beta(x-\xi)}{2} + \gamma|x-\xi|\right\}\right] \quad (25)$$

ただし, $\gamma = \sqrt{\lambda + \beta^2/4}$, $\beta = \mu \bar{u}$ である。

式(23)を各 Ω_i 内で整理することにより式(17), さらに全体系に対しては式(18)と同様な τ 時間ステップに関する離散化方程式を得る。ここで, 各時間ステップ毎の方程式を解く際に, 関数 \bar{u} として式(20)を選んだ場合には, 収束計算を必要としないが, 式(21)を採用した場合には収束計算が必要となる。

3. 2 Navier-Stokes方程式の解析

ここでは, Navier-Stokes方程式と非圧縮性の連続の方程式の初期値-境界値問題(1)-(5)に関して, 時間依存型の基本解を利用した場合の一般化された境界要素法による定式化を示す。

対象としている領域 Ω の部分領域 Ω_i 内で式(1), (2)の非線形微分方程式を線形化する。さらに得られた方程式系を行列形式で簡単に表現すれば次式となる。

$$L_{IJ}(\bar{u}_j)U_J = 0 \quad (I, J=1, 2, 3) \quad \text{in } T \times \Omega_i \quad (26)$$

ただし, $[L_{IJ}(\bar{u}_j)]$ は Ω_i 内で線形化された微分作用素行列であり, $\{U_J\}$ は流速ベクトルと圧力からなる未知ベクトル

を表わし、それぞれ以下のように与えられる。

$$L_{IJ}(\bar{u}_j) = \begin{bmatrix} (-ReD_t - Re\bar{u}_j D_j + \Delta) \delta_{ik} + D_i D_k & -ReD_k \\ D_i & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\{U_j\} = [U_1, U_2, U_3]^T = [u_1, u_2, p]^T \quad (28)$$

また、関数 \bar{u}_i は Ω_i 内の境界 Γ_i 上での未知量の平均値として仮定されている。

ここで、線形化された微分作用素行列 (26) に対する基本解テンソル V_{iL}^* を用い、式 (26) の時空間に関する重みつき残差法の表現に、空間について Gauss の発散定理と時間については部分積分公式を適用することにより以下の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} C_{LK} U_K(\mathbf{y}, t_f) &= \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_i} u_L(\mathbf{x}, t) \Sigma_{iL}^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, t_f) d\Gamma(\mathbf{x}) dt \\ &\quad - \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_i} \tau_L(\mathbf{x}, t) V_{iL}^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, t_f) d\Gamma(\mathbf{x}) dt \\ &\quad - \int_{\Omega_i} Re u_L(\mathbf{x}, t_{f-1}) V_{iL}^*(\mathbf{x}, t_{f-1}; \mathbf{y}, t_f) d\Omega(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (29)$$

ただし, c_{LK} は形状係数であり, Σ^*_{iL} はトラクションベクトル τ_i に対応し, V^*_{iL} を用いて次のように定義される。

$$\Sigma^*_{iL} \equiv (-V^*_{3L} \delta_{Lj} + \text{Re} \bar{u}_j V^*_{iL} + V^*_{iL,j} + V^*_{jL,i}) n_j \quad (30)$$

また, 基本解テンソル V^*_{iL} を決定するためには, 次の微分方程式

$$\Delta(\text{Re} D_t + \Delta)\phi^* = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - t_f) \quad (31)$$

を満足する以下の基本解 ϕ^* が用いられる。

$$\phi^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, t_f) = -\frac{H(t_f - t)}{2\pi \text{Re}} \left\{ \log \tilde{r} - \frac{1}{2} E_i(-\alpha \tilde{r}^2) \right\} \quad (32)$$

ただし, $E_i(\)$ は積分指数関数, $\alpha = \text{Re}/4(t_f - t)$, $\tilde{r}^2 \equiv \{x_i - y_i + (t_f - t)\bar{u}_i\}^2$ である。

次に, 境界積分方程式(29)に対する離散化表現を考える。各部分領域 Ω_i 内での流速ベクトル成分 u_i とトラクションベクトル成分 τ_i に関して次の近似的表現を与える。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{MN} \theta_M(t) \phi_N(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}_N, t_M) \quad (33)$$

$$\tau_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{MN} \tilde{\theta}_M(t) \tilde{\phi}_N(\mathbf{x}) \tau_i(\mathbf{x}_N, t_M) \quad (34)$$

ただし, ϕ_N と $\tilde{\phi}_N$ は空間に関する内挿関数, θ_M と $\tilde{\theta}_M$ は時間に関する内挿関数を表わす。

式(33), (34)を式(29)に代入し, 各部分領域内での離散化

を考慮することにより， f 時間ステップでの要素離散化方程式は式(17)と，また全体系に関する方程式は式(18)と形式的には同じになる。この結果， f 時間ステップでの流速ベクトルとトラクションベクトルは式(18)に単純な繰り返し代入法を適用することにより求められる。また，圧力は f 時間ステップでの流速とトラクションを用い，式(29)（ただし $k=3$ の場合に相当する）より陽的に計算される。

4. 数値計算例

前節までに展開してきた一般化された境界要素法の適用性及び有効性を示すために，以下の1次元及び2次元の非定常流れの問題を考える。

4. 1 Burgers方程式の問題

ここでは，初期値 - 境界値問題(6)-(9)に対する1次元粘性流れの数値計算例を示す。具体的な境界条件と初期条件については以下の2種類の場合を対象としている。

① Case 1

境界条件と初期条件

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(1,t) = 0 \quad (35)$$

$$u(x,0) = \sin \pi x \quad (0 < x < 1) \quad (36)$$

② Case 2

境界条件と初期条件

$$u(0,t) = 1, \quad u(10,t) = 0 \tag{37}$$

$$u(x,0) = 0 \quad (0 < x < 10) \tag{38}$$

ただし、以下の数値結果において n_{max} は収束計算をした場合の最大の繰り返し回数を表わす ($n_{max}=0$ の場合には収束計算なし)。また、 Δx は分割幅、 Δt は時間増分を表わす。

図1はCase 1に関する $\mu = 10^2$ の本解 (解析法 I, II の解) と厳密解¹³⁾ との比較を示す。全ての解ともに厳密解とのよい一致が示されている。図2はCase 1に関する $\mu = 10^5$ の本解と有限要素解^{14, 15)} との比較を示したものである。

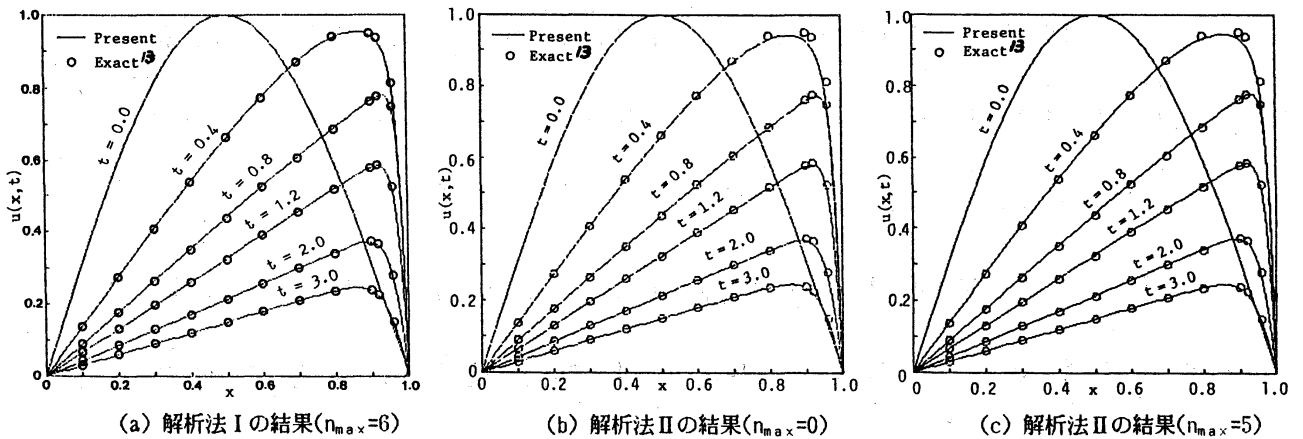


図1 $\mu = 10^2$ に関する本解と解析解との比較 ($\Delta x = 0.01, \Delta t = 0.01$)

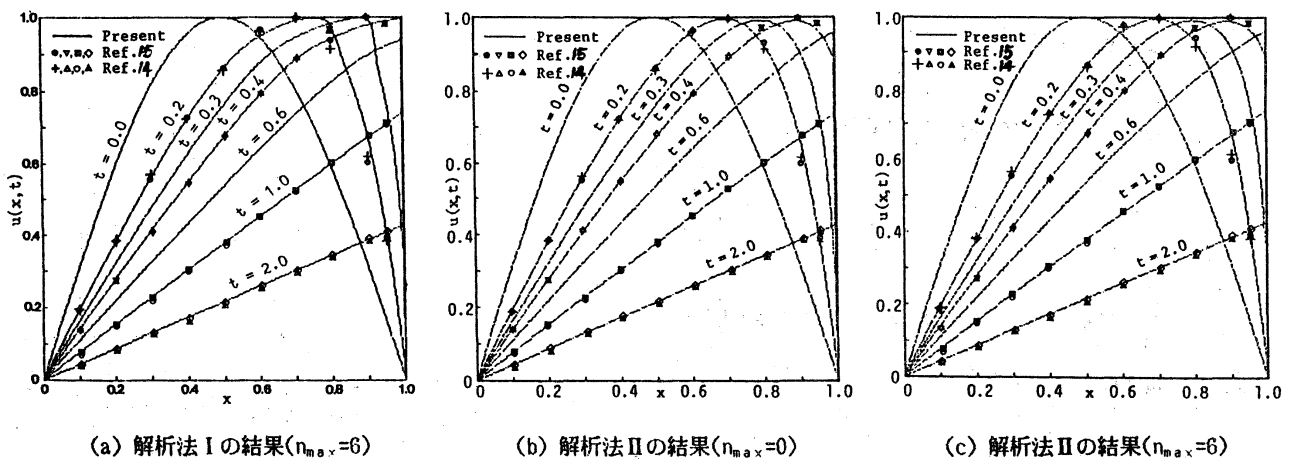
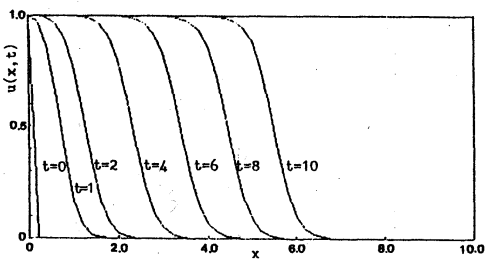
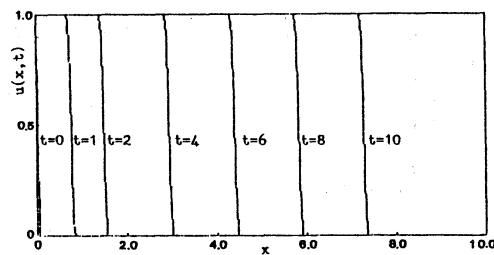


図2 $\mu = 10^5$ に関する本解と有限要素解との比較 ($\Delta x = 0.005, \Delta t = 0.005$)

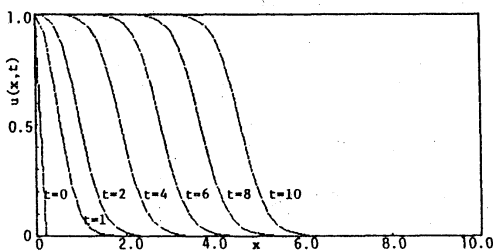
図3はCase 2に関する解析法I, IIから得られた数値結果(ただし, $\mu = 10$)の比較を示したものである。どの解析結果ともに波の形状は似通っているが, 波の進み方では解析法Iの結果が一番早い。図4はCase 2の $\mu = 10^3$ に関する数値結果の比較を示す。波形は $\mu = 10$ の結果よりもさらに鋭いことが判る。



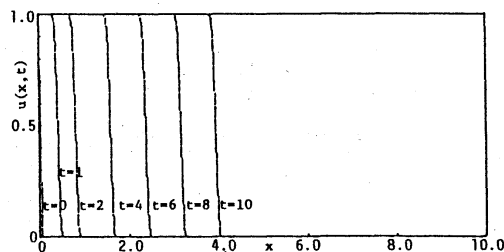
(a) 解析法Iの結果($n_{max}=12$)



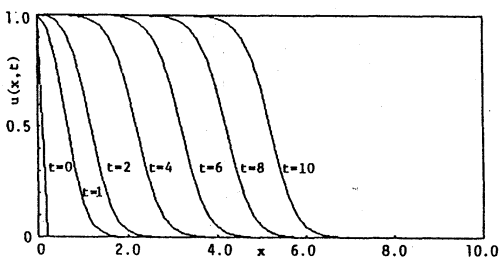
(a) 解析法Iの結果($n_{max}=16$)



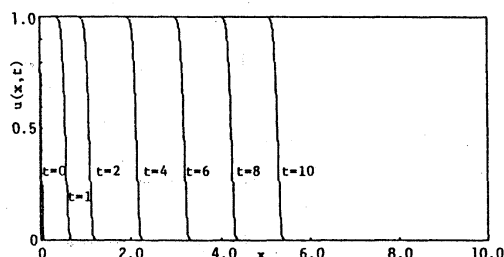
(b) 解析法IIの結果($n_{max}=0$)



(b) 解析法IIの結果($n_{max}=0$)



(c) 解析法IIの結果($n_{max}=9$)



(c) 解析法IIの結果($n_{max}=12$)

図3

図4

$\mu = 10$ に関する数値結果の比較($\Delta x=0.2, \Delta t=0.2$)

$\mu = 10^3$ に関する数値結果の比較($\Delta x=0.05, \Delta t=0.05$)

4. 2 Poiseuille流れの問題

2次元粘性流れ問題のベンチマークとして良く知られているPoiseuille流れの問題を考える。対象とする境界形状と境界条件及び要素メッシュを図5に示す。図6は $Re=1$ に対する $t=0.25$ での流速ベクトルを表わしている。ただし、時間増分 Δt は0.05とした。

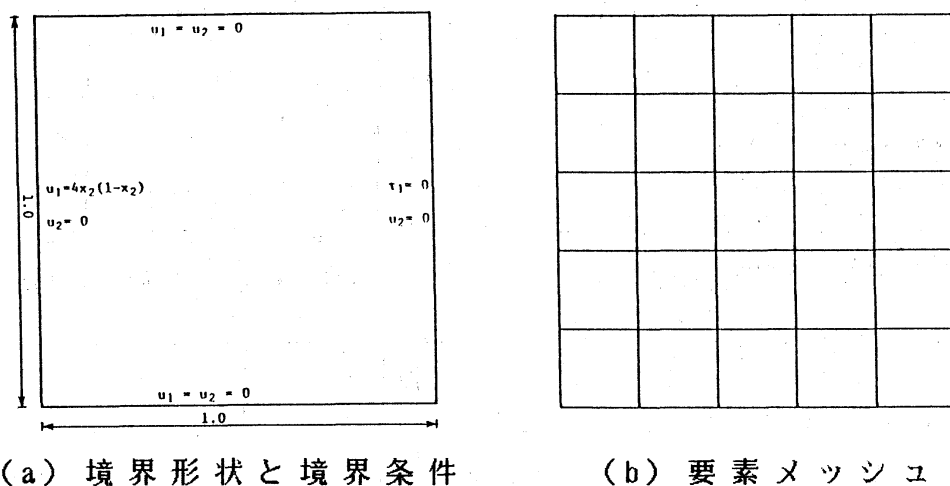
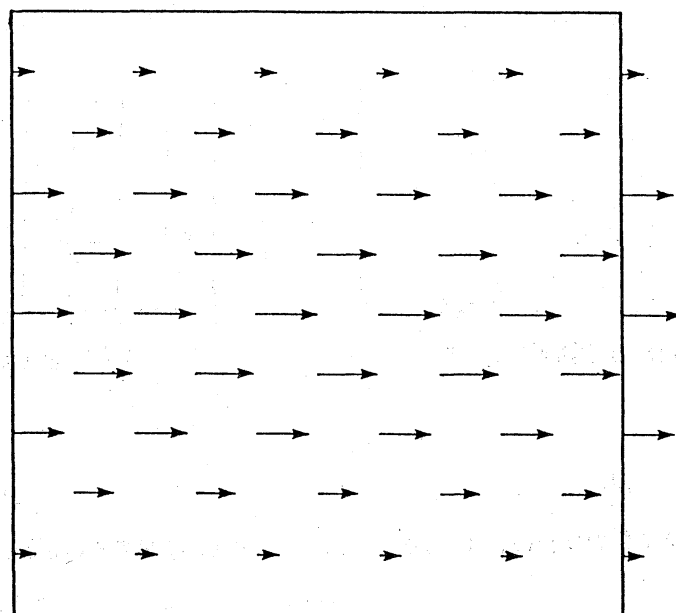


図5 Poiseuille流れの問題

図6 $t=0.25$ での流速ベクトル
($\Delta t=0.05$, $Re=1$)

4. 3 2次元正方形キャビティ内流れの問題

この問題に関する境界形状と境界条件及び要素メッシュを図7に示す。図8は $Re=10$ に対する各時間での流速ベクトルを表わしている。ただし、 Δt は0.1とした。図9は $Re=100$ （ただし、 $\Delta t=0.8$ ）に対する各時間での流速ベクトルを表わしている。また、 $Re=10, 100$ に対し垂直の中央線での水平方向の流速ベクトル u_1 の挙動をそれぞれ図10, 11に示す。

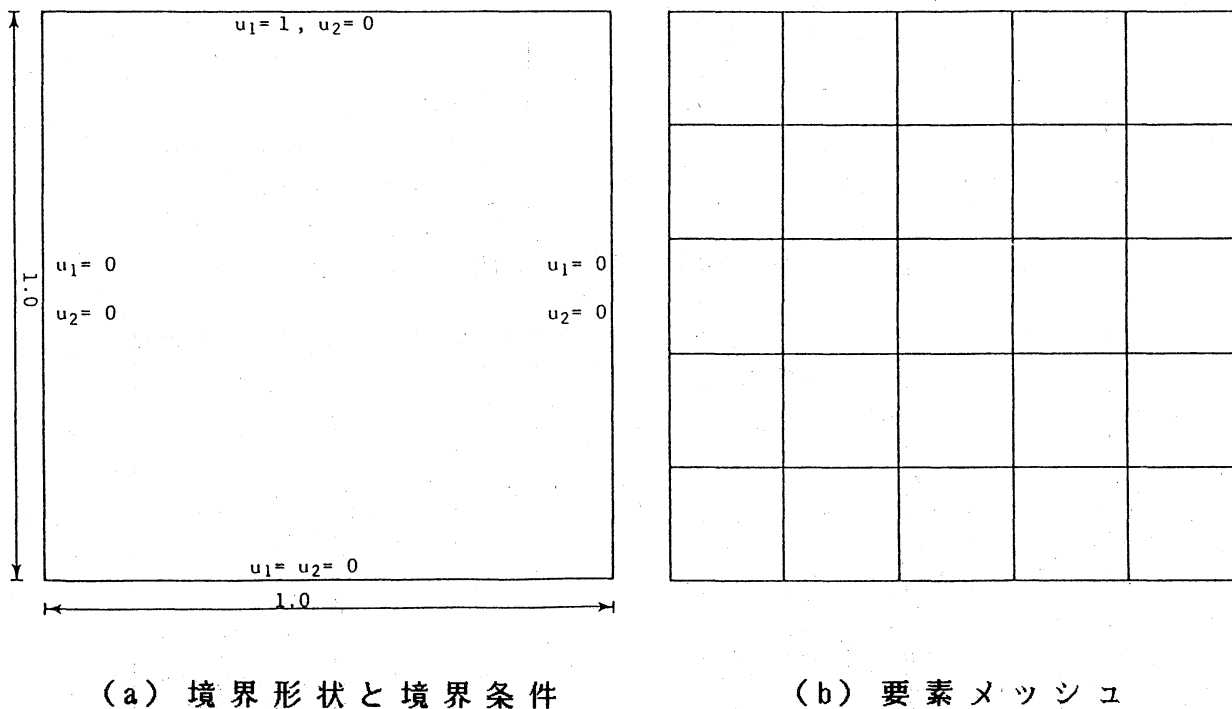


図7 Cavity流れの問題

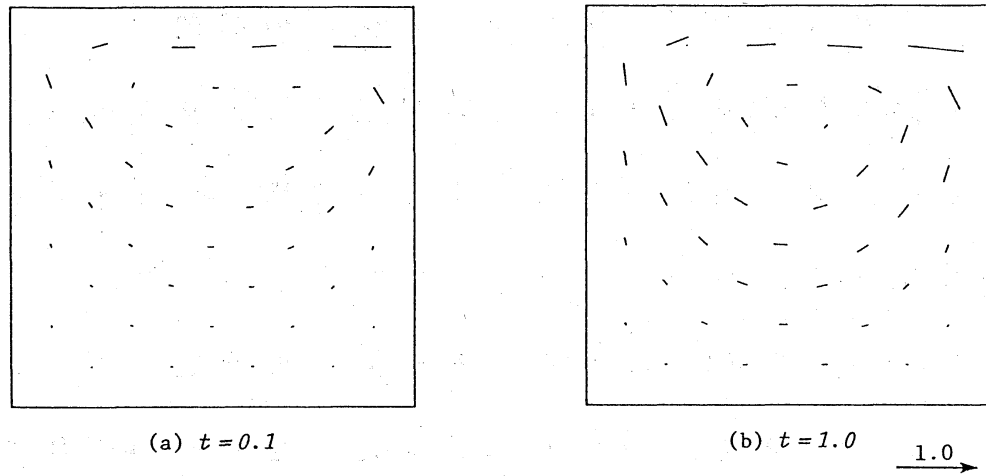


図8 Re=10に関する流速ベクトル

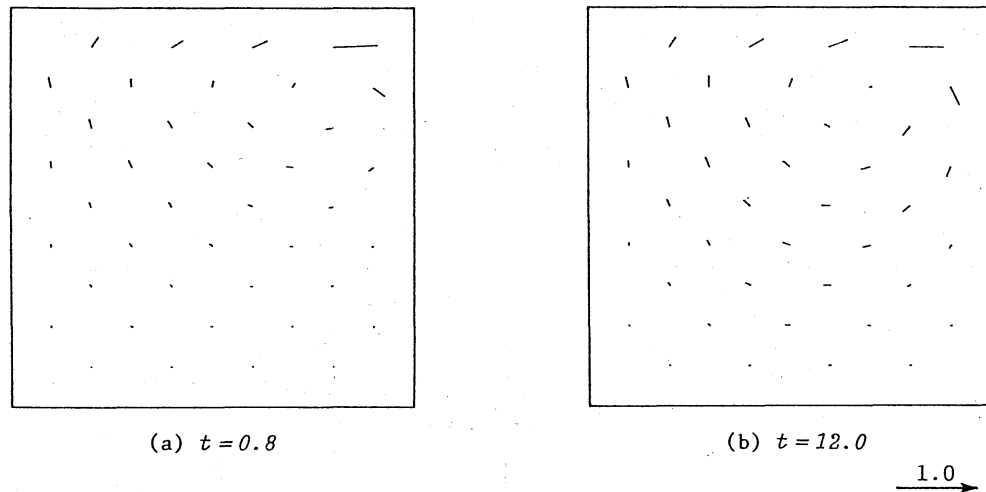


図9 Re=100に関する流速ベクトル

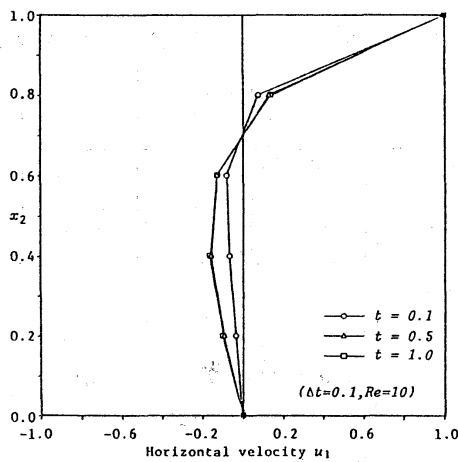


図10 垂直中央線での水平方向の流速ベクトル (Re=10)

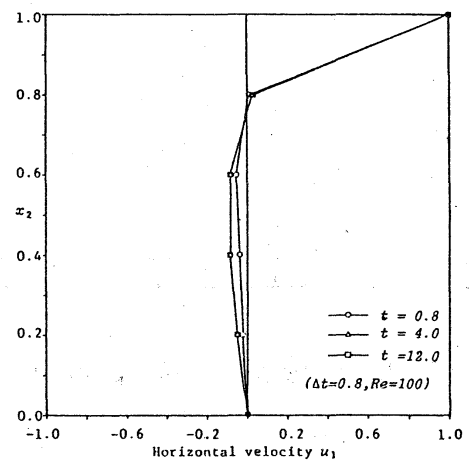


図11 垂直中央線での水平方向の流速ベクトル (Re=100)

5. おわりに

Navier-Stokes 方程式と連続の方程式あるいはその 1 次元モデルである Burgers 方程式によって支配されている粘性流体の非定常流れの問題に対し、一般化された境界要素法による定式化及び数値計算例を示した。特に、本解析法では部分領域法の考え方を利用しているために、最終的に得られる離散化方程式は、“帯性の係数行列を有し単純な繰り返し代入法を適用することにより解かれる”という特徴がある。

具体的な数値計算例として、最初、Burgers 方程式の問題に関する数値シミュレーションを行なった。厳密解及び有限要素法による解との比較を通して、比較的大きい非線形パラメータに対しても本手法が精度、安定性ともに優れたものであることを示した。次に、2次元の非圧縮性粘性流れの問題として Poiseuille 流れと Cavity 流れの問題を選び、比較的低い Reynolds 数に対する計算を行なった。

今後は、2次元の問題に対して高い Reynolds 数流れの問題を含むより多くの数値計算を行ない、本手法の適用性及び有効性を高めたい。

参考文献

- 1) Peyret, R. and T.D.Taylor (1983) ; Computational Methods for Fluid Flow, Springer-Verlag.
- 2) Thomasset, F. (1981) ; Implementation of Finite Element Methods for Navier - Stokes Equations, Springer-Verlag.
- 3) Wu, J.C.(1982) ; Problems of General Viscous Flow, Development in Boundary Element Methods 2(Eds., P. K.Banerjee and R.P.Shaw), Applied Science Pub., 69
- 4) Onishi, K., T.Kuroki and M.Tanaka (1984) ; An Application of Boundary Element Method to Incompressible Laminar Viscous Flows, Engineering Analysis 1 (3), pp.122.
- 5) Skerget, P., A.Alujevic and C.A.Brebbia(1984) ; The Solution of Navier-Stokes Equations in terms of Vorticity-Velocity Variables by Boundary Elements, Boundary Elements, pp.4/41.
- 6) Tosaka, N.and Kakuda, K.(1986); Numerical Simulations for Incompressible Viscous Flow Problems Using the Integral Equation Methods, in Boundary Elements VIII (Eds., Tanaka, M. et al.), pp.813, Springer-Verlag.

- 7) Tosaka, N., Kakuda, K. and Fukushima, N. (1988); Integral Equation Method for Viscous Fluid Flow Problems, International Conference on Computational Engng. Science, (Eds., S.N. Atluri et al.), pp.54.vi.1
- 8) Tosaka, N. (1989) ; Integral Equation Formulations with the Primitive Variables for Incompressible Viscous Fluid Flow Problems, Computational Mech.4, 89-103
- 9) Tosaka, N. and Kakuda, K. (1988) ; The Generalized Boundary Element Method for Nonlinear Problems, in Boundary Elements X, Vol.1, pp.3-17
- 10) 角田和彦, 登坂宣好(1988); 一般化された境界要素法による Burgers方程式の近似解析, 境界要素法論文集第5巻, pp.311-316
- 11) 角田和彦, 登坂宣好(1988); 積分方程式法による粘性流れ問題の新しい近似解法, 第2回計算力学シンポジウム報文集, pp.171-176
- 12) Kakuda, K and Tosaka, N. ; The Generalized Boundary Element Approach to Burgers' Equation, (submitted)

- 13) Cole, J.D. (1951) ; On a Quasi-Linear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics, Quarterly of Applied Mathematics, 9, 225-236
- 14) Varoğlu, E. and Finn, W.D.L. (1980) ; Space-Time Finite Element Incorporating Characteristics for the Burgers' Equation, Int. J. Num. Meth. Engng., 16, 171-184
- 15) Nguyen, H. and Reynen, J. (1984); A Space-Time Finite Element Approach to Burgers' Equation, Numerical Methods for Non-Linear Problems, Vol. 2 (Eds., Taylor C. et al.), pp. 718-728, Pineridge Press