

代用電荷の適正配置について

宮崎大・工 四ッ谷 晶二 (Shoji Yotsutani)

§ 1. 序

この研究は賛田研究室(宮大・工・電力工学講座)との共同研究⁸⁾⁻¹⁰⁾である。特に、山本英人の修士論文⁹⁾、武富秀樹の卒業論文⁸⁾に詳細が報告されている。

代用電荷法は、簡単な原理で高い精度の近似解が得られ誤差の評価もできる⁷⁾ので、放電研究や高電圧機器の設計などの広い範囲で利用されている。しかし、有限要素法や境界要素法と比較すると、まだ代用電荷法の適用範囲は狭い。その理由の大きな一つとしては、近似解の精度を上げるのに境界の変化の著しい所に代用電荷(仮想電荷)と拘束点を密に置くという経験則が信じられてきたが、これらの配置は技巧的で"経験と勘"を必要とすることがある。経験が少ないと多くの場合不適当な配置を採用することになる。

そこで、"経験と勘"に頼らず高精度の解が容易に得られるように電荷点、拘束点の適正配置を機械的に求める方法を

確立する必要がある。

以下、§2で数値実験の結果をのべ、§3では問題点およびその関連事項についてのべる。付録として、数値実験の資料と説明をのせてある。

§2. 数値実験

代用電荷法の代用電荷の機械的な配置法の第一歩として、楕円および正多角形等の内部ディリクレ問題の場合の数値実験を行なった。その結果は以下のように要約される。

(1) 真の解が $(x+iy)^n$ ($n=1,2,3,\dots$) の実部のとき、

楕円の場合については、ジョーユフスキー変換により円の外部が楕円の外部に等角写像されることに着目し、円に対する最も自然な電荷点、拘束点の配置⁴⁾ (拘束点は境界の円周上に、電荷点は同心円上にあり、且つ双方とも円の等角度分割線上にある) を写像することによって通正配置が得られることが分った。

しかし、一般的な形状の場合、電荷点の配置について等角写像の方法を適用することは難しくなる。ところが、正多角形領域、星型領域等のかんり一般的な領域についても、単純に境界から十分離れた円周上に電荷的互均等に配置するだけでも高精度の解がえられる。なお、楕円領域の場合もこの方

法は有効である。

以上のことは、真の解が全平面で調和であるいろいろな境界値に対しても同様の傾向を示した。


(2) 境界値が解析的でないとき

円の内部領域に対し、代用電荷と拘束点は最も自然な配置を用い、境界値の関数のなめらかさを変えて境界上での最大誤差の影響をしらべた。境界値は連続であるが導関数が不連続な場合は、代用電荷を離せば離す程精度が悪くなる。これは解析的な境界値の場合と全く逆の現象である。通常の問題への応用においては、領域の形状は複雑だが境界値は定数の場合が多いのを見逃されたいことである。また、なめらかでない境界値に対しては代用電荷法による計算精度は極端に悪くなる。このように境界値のなめらかさが精度に大きな影響を与えることは、桂田-岡本の論文⁴⁾の証明から十分納得される。

§3. まとめ

真の解が全平面で調和で領域も星型程度までなら代用電荷を円状に十分離しておけば実用上十分に思われる。

しかし、一般的には代用電荷の適正配置の爲には、領域の形状および境界値のなめらかさを十分配慮しなければならない。

4),5),7) い。特に、領域がひとくくびれた場合（例えば ），単に円状に離して代用電荷をおく方法ではうまくゆかない。また、真の解が全平面で調和でなく、限られた範囲でしか調和でない場合も、状況は微妙である。実際、自由境界問題の数値計算⁶⁾や、一般の領域を標準的領域（円板等）に写す等角写像を数値的に求める為に天野により開発された代用電荷法を応用する場合^{1),2),3)}にこの問題に直面する。天野によれば、§2で述べた楕円のときと同様に、基本的には等角写像（あるいはそれに似たもの）で写して電荷配置を求めるのが一般的に有効であり、多くの経験がそれを裏づけているとのことである。詳しいことは、天野の一連の仕事¹⁾⁻³⁾を参照されたい。

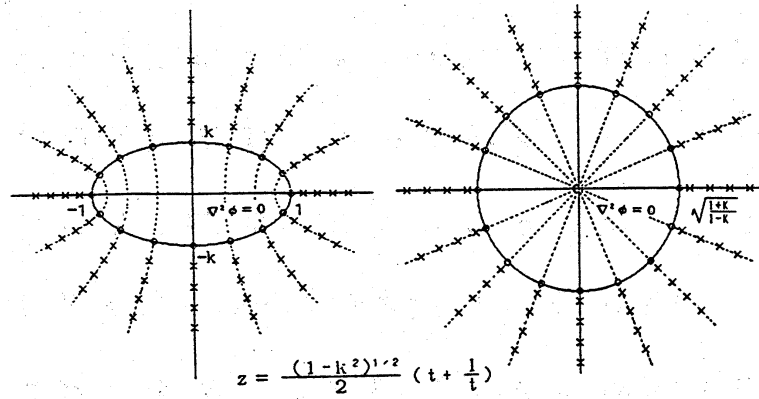
付録

図1(a)に示すような楕円 ($x^2+y^2/k^2=1$, ただし, $0 < k < 1$) 上で境界値 ($\phi_r = x^2 - y^2$) が与えられている内部ディリクレ問題, すなわち, $\nabla^2 \phi = 0$ (領域内), $\phi = \phi_r$ (境界上) を解く場合を考える。ここで, つぎのジュウコフスキー変換

$$z = \frac{(1-k^2)^{1/2}}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (1)$$

により, t 平面における円の外部 $|t| \geq \{(1+k)/(1-k)\}^{1/2}$ は z 平面における楕円の外部 $\{(x, y); x^2+y^2/k^2 \geq 1\}$ に等角写像されることに着目する。そして, 図1(b)に示したように, t 平面上で円の等角度分割線上にあって円周上にある点に電荷, 拘束点が置かれた最も自然な電荷, 拘束点の配置⁴⁾を同図(a)の z 平面上に写像したものを, 楕円の場合の電荷, 拘束点配置として用いた。

比較のために, 等角写像を適用せず, 等角度で境界を分割した点に拘束点を置き境界拡大法⁷⁾で等角度分割線上に電荷点を配置した場合, 及び図3の従来の場合の誤差をまとめて図4に示した。また, 図1(a)での誤差分布を図5に, 図1(a)の楕円境界を縮小率(短軸/長軸, 長軸一定)で変化させた場合の誤差特性を図6に示した。さらに, 境界値となる多項式を3次式にした場合($\phi_r = x^3 - 3xy^2$)の誤差特性を図7に示した。



○: 拘束点 ×: 電荷点

(a) z 平面 (b) t 平面

図1 電荷, 拘束点の配置

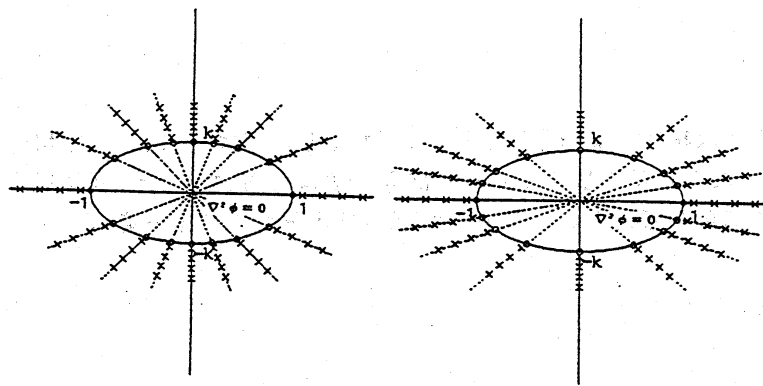


図2 等角度分割による配置

図3 従来の配置

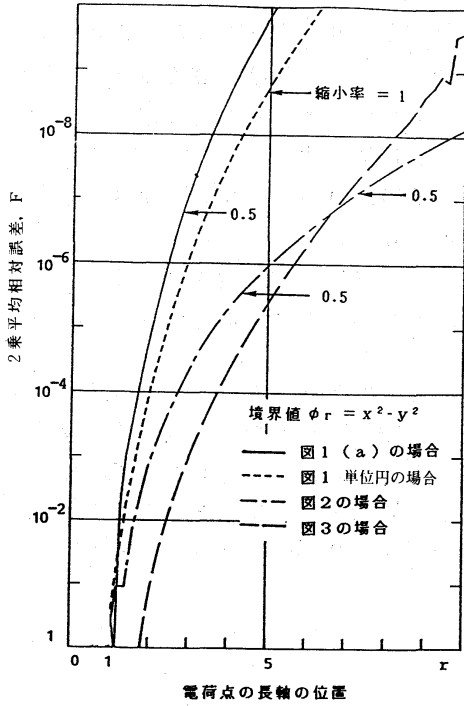


図4 電荷点配置と誤差

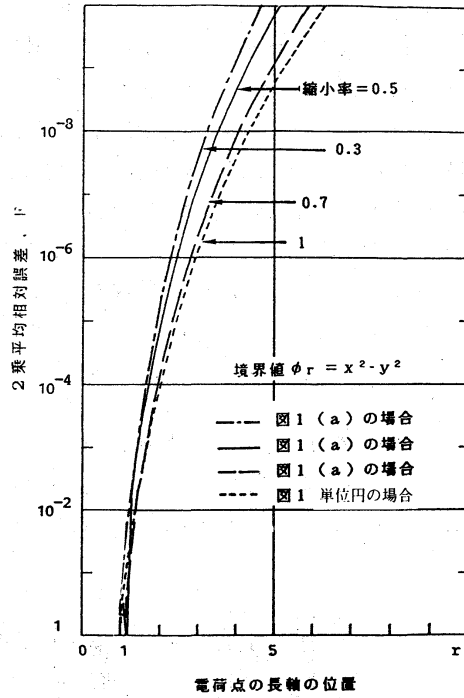


図6 縮小率による誤差の比較

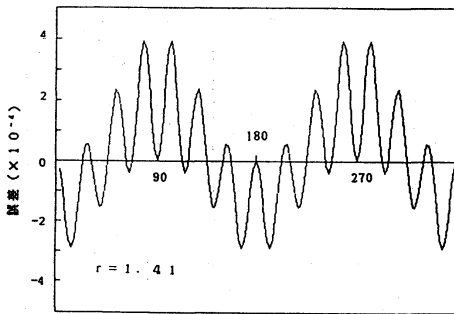


図5 境界上の誤差分布

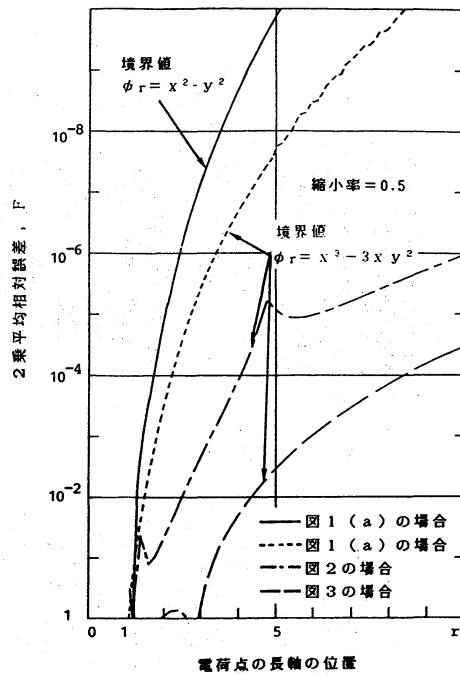


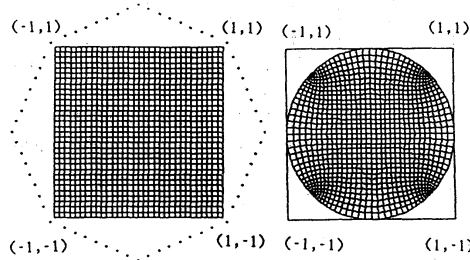
図7 異なる境界値による電荷点配置と誤差の関係

図8(a)に示したような正方形(2×2)上で境界値 ($\phi_r = x^2 - y^2$) が与えられている領域の内部ディリクレ問題、すなわち、 $\nabla^2 \phi = 0$ (境界内)、 $\phi = \phi_r$ (境界上) を解く場合を考える。

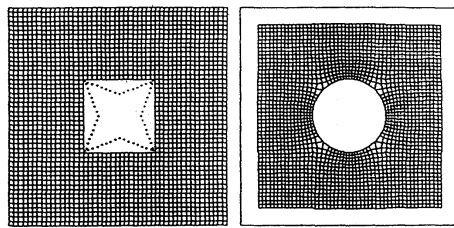
t平面からz平面への等角写像が楕円のように簡単な数式で求められることはまれである。正方形領域の等角写像もこの部類に属する。ここでは、天野氏により提案された代用電荷法を用いたz平面からt平面への等角写像 $t = f(z)$ の計算を利用して、正方形の外部(内部)領域から円の外部(内部)への等角写像を近似的に求めた^{2), 4)}。この場合、電荷点は、従来正方形領域の解析に用いられてきた方法で置かれた⁷⁾ (図8(a)参照)。正方形領域の内部等角写像を図8に、外部等角写像を図9に示した。

t平面の外部円領域からz平面の外部正方形領域への等角写像を直接求めることはできないが、 $|f(z)|$ の等高線を描く方法を応用して⁷⁾、t平面における同心円の正方形領域への像を求めることができる(図10参照)。

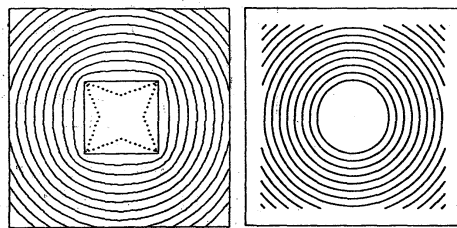
図10より円を境界とする領域の外部における等高線を正方形領域へ写像した等高線図は外側のもので円形となることがわかる。このことから、等角写像を利用しなくても単に正方形の外部領域の十分離れた位置の円周上に電荷点を配置すれば、正方形領域の内部において良い解が求められることが示唆される。電荷点は等間隔で、すなわち、円の等角度分割線上においたときの誤差特性を図11に示した。図に以下に数値実験のデータをのせた。



(a) z平面 (b) t平面
図8 内部正方形領域の等角写像



(a) z平面 (b) t平面
図9 外部正方形領域の等角写像



(a) z平面 (b) t平面
図10 円の外部の等高線のz平面への写像

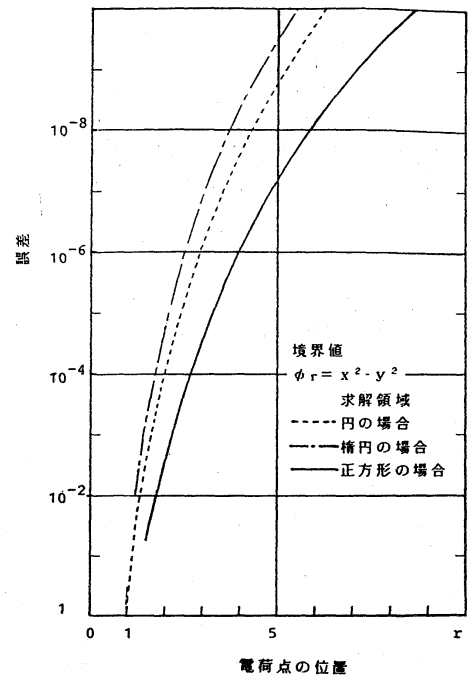
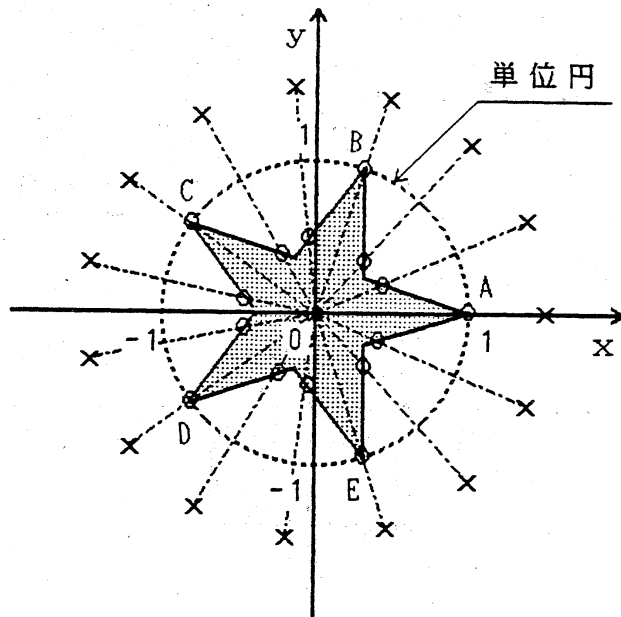


図11 異なる求解領域に対する電荷点の円配置による誤差



○ : 拘束点 × : 電荷点

星形

$$\phi_r = x^2 - y^2$$

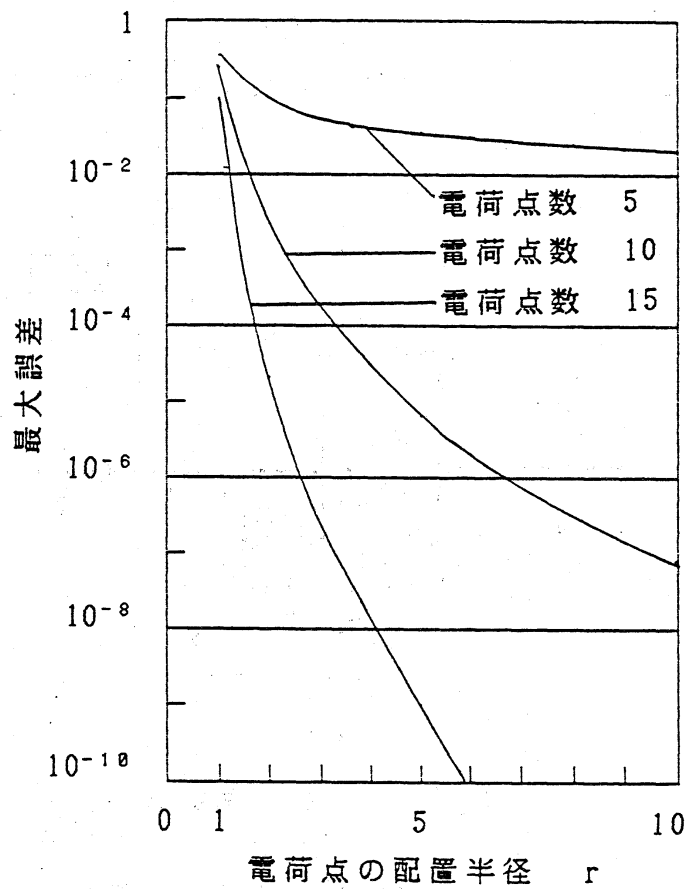
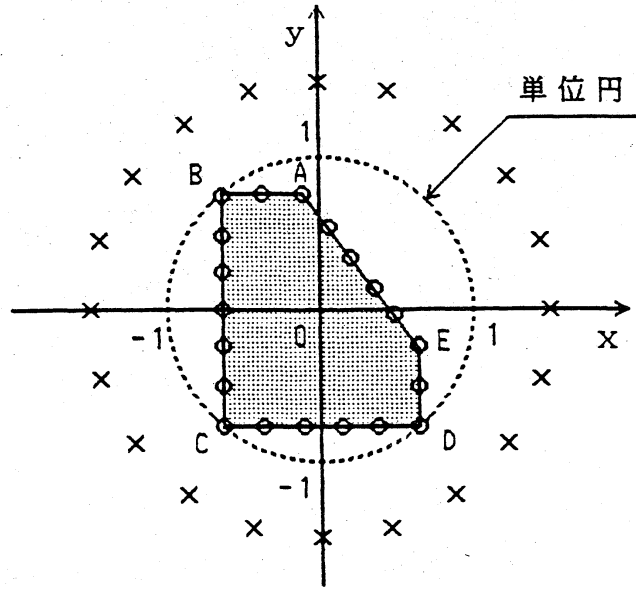
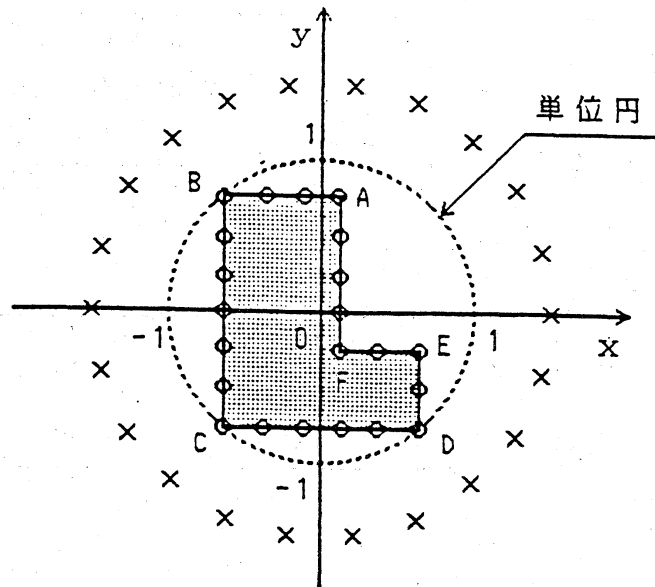


図 12 電荷点の円配置による誤差



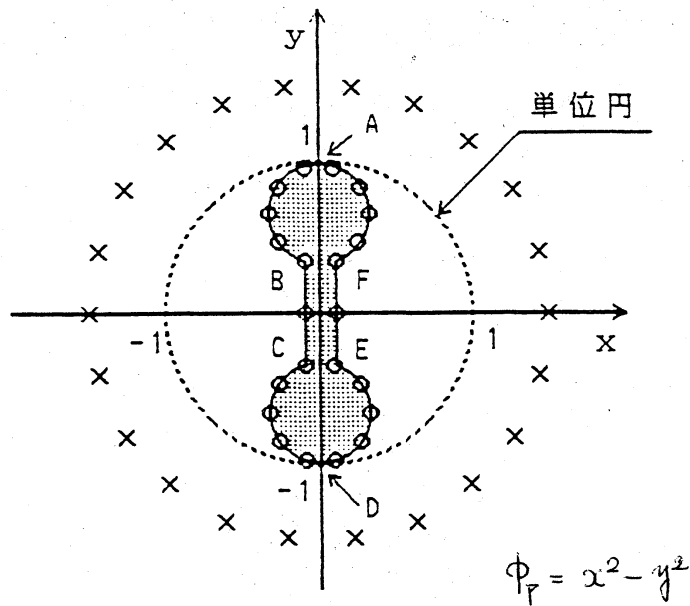
× : 電荷点 ○ : 拘束点

対称性の良くない領域 (a)



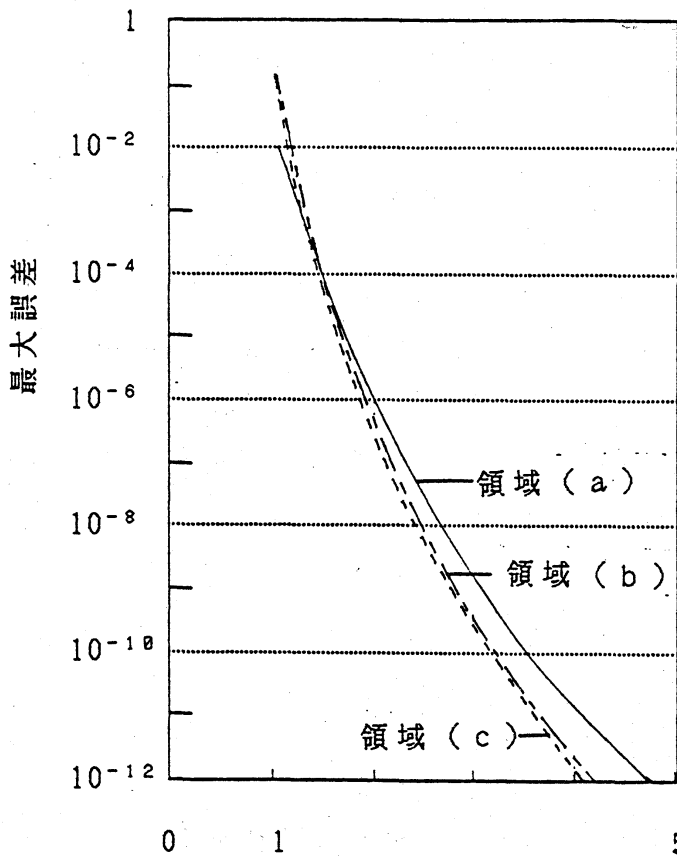
× : 電荷点 ○ : 拘束点

対称性の良くない領域 (b)



× : 電荷点 ○ : 拘束点

対称性の良くない領域 (c)

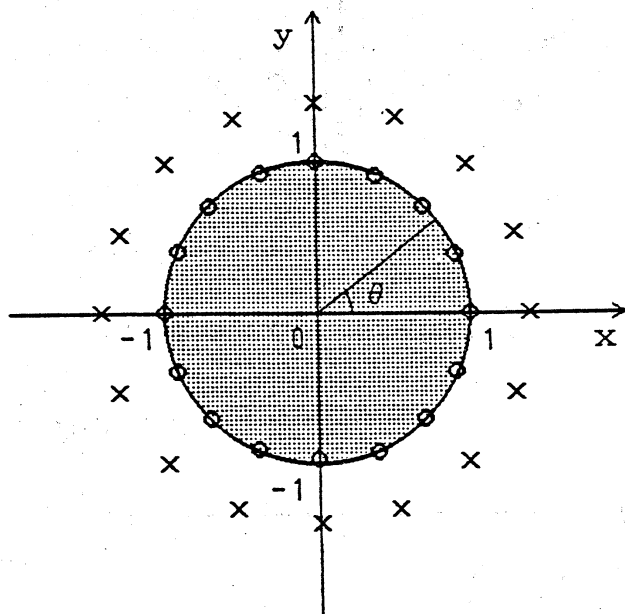


電荷点の配置半径 r

図 13 電荷点の円配置による誤差

境界値の求めらかさと精度

下図のように半径が1の内領域に対して電荷点、拘束点を最も自然に配置し、境界値を変えて解析を行う。境界値には以下の2つを用いる。



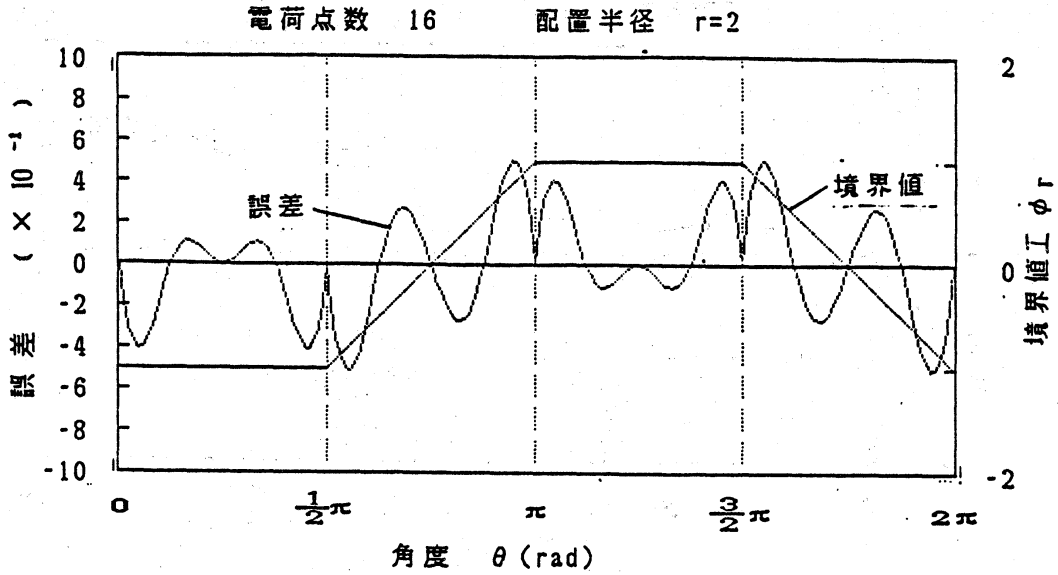
境界値 I

$$\left[\begin{array}{ll} 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \pi & ; \phi_r = -1 \\ \frac{1}{2} \pi < \theta < \pi & ; \phi_r = \sin \left(2\theta + \frac{1}{4} \pi \right) \\ \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2} \pi & ; \phi_r = 1 \\ \frac{3}{2} \pi < \theta < 2\pi & ; \phi_r = \sin \left(2\theta + \frac{3}{4} \pi \right) \end{array} \right.$$

境界値 II

$$\left[\begin{array}{ll} 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \pi & ; \phi_r = -1 \\ \frac{1}{2} \pi < \theta < \pi & ; \phi_r = \frac{4}{\pi} \theta - 3 \\ \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2} \pi & ; \phi_r = 1 \\ \frac{3}{2} \pi < \theta < 2\pi & ; \phi_r = -\frac{4}{\pi} \theta + 7 \end{array} \right.$$

境界値工



注意: 電荷点を遠くに離すと精度が悪くなる。(通常の場合と逆)

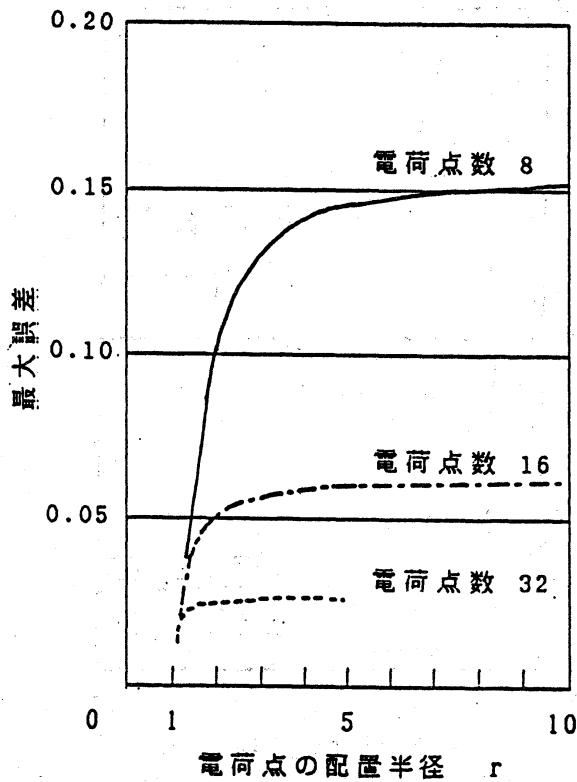


図 14 電荷点の円配置による誤差

境界値

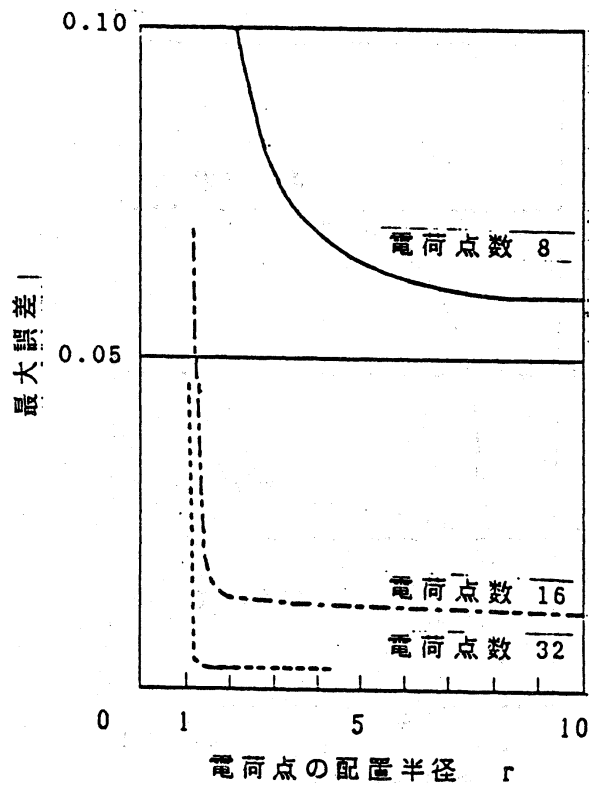
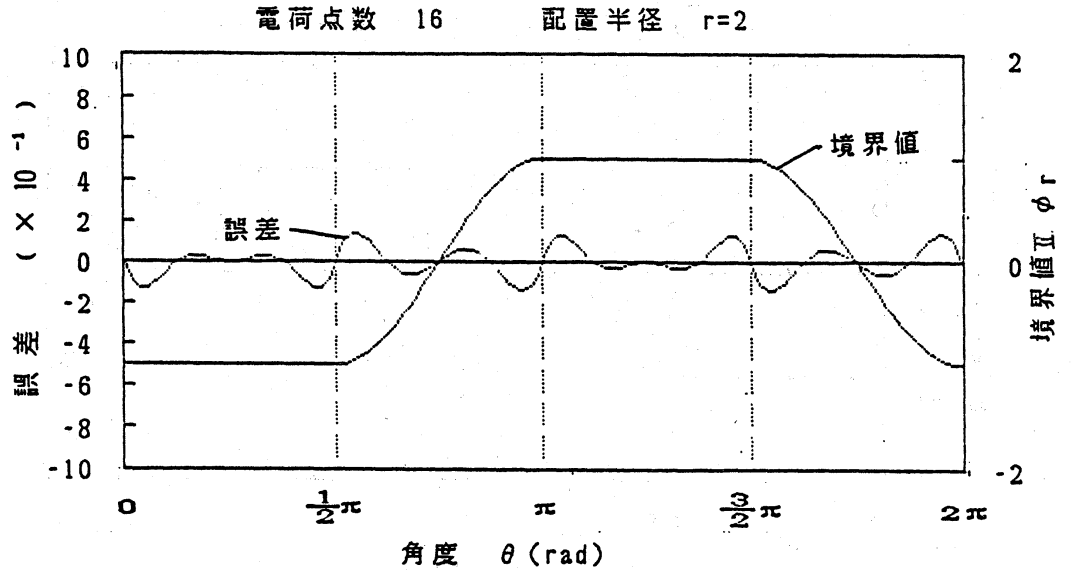


図 15 電荷点の円配置による誤差

その他の境界値に対する精度

円形領域に電荷点、拘束点を円形に16個配置して、その配置半径 r を変えたときの精度を調べた。境界値には以下の関数を用いた。

$$\phi_r = -\log |z - a|$$

$$E \in \cup \quad z = x + iy, \quad a = 2/5, 1/5, 1/8.$$

このとき、真の解は

$$\phi = -\log |z - \frac{1}{a}| - \log a$$

と与えられる。真の解の特異点は $z = \frac{1}{a}$ にある。

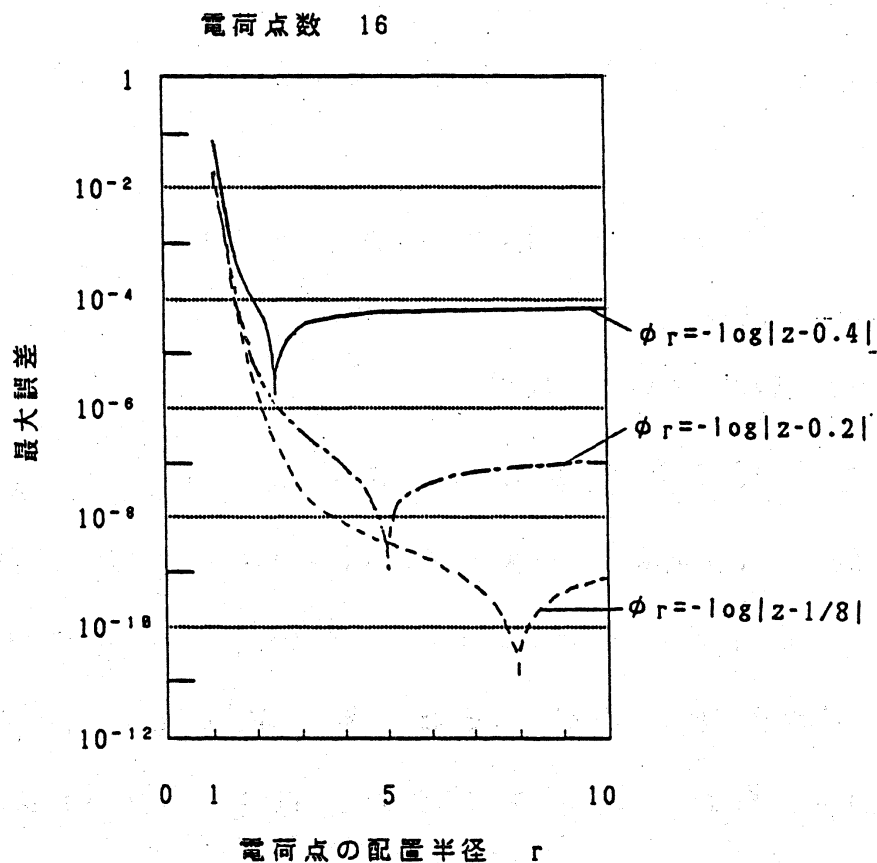


図 16 電荷点の円配置半径による誤差

参考文献

- 1) 天野 要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 7, p.p. 697-704 (1987).
- 2) 天野 要：代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 29, No. 1, p.p. 62-72 (1988).
- 3) 天野 要：代用電荷法に基づく2重連結領域等の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 29, No. 10 p.p. 914-924 (1988).
- 4) M. Katsurada and H. Okamoto: A mathematical study of the charge simulation method I, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo Sect. IA, Math. Vol. 35, No. 3, p.p. 507-518 (1988).
- 5) M. Katsurada: A mathematical study of the charge simulation method II, to appear.
- 6) M. Shōji: An application of the charge simulation method to a free boundary problem, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. Vol. 23, p.p. 523-539 (1986).
- 7) 村島 定行：代用電荷法とその応用，森北出版，1983.
- 8) 武富 秀樹：代用電荷法における代用電荷の適正配置について，宮崎大学工学部卒論(1989)
- 9) 山本英人：代用電荷法における代用電荷の機械的配置について，宮崎大学大学院工学研究科 修士論文 (1988).
- 10) 山本、大坪，賛田，四ノ谷：代用電荷法における仮想電荷の機械的配置について，宮崎大学工学部研究報告，Vol. 34, p.p. 73-77 (1988).