数理解析研究所講究録
第 704 巻 1989 年 68-76



# Sur des conditions nécessaires pour l'équation d'évolution pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans la classe de Gevrey.

Keiichiro KITAGAWA (Univ.d'Ehimé)
北 川 桂 一 郎 (愛媛大・理)

Il s'agit du problème de Cauchy <u>homogène</u> :

$$(PC)\quad \begin{cases} L(t,x;\partial_t,\partial_x)u(t,x)=0 & (t,x)\in[0.T_0]xR^d \\ \partial_t^{j-1}u(0,x)=\varphi_j(x) \quad j=1,..,m & \end{cases}$$

pour une équation linéaire aux dérivées partielles à coeffifients de la classe de Gevrey.

$$L(t,x;\partial_t,\partial_x)u(t,x)\equiv[\partial_t^m-\sum_{j=1}^m a_j(t,x;\partial_x)\partial_t^{m-j}]u(t,x)=0$$

où $\quad a_j(t,x;\xi)=\sum_{\alpha,k} t^{\sigma(j\alpha k)}x^{\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(t,x)\xi^\alpha$

avec $\quad x^{\nu(j\alpha k)}=x_1^{\nu_1(j\alpha k)}\cdots x_d^{\nu_d(j\alpha k)}$ et $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_d^{\alpha_d}$ .

Nous considérons des conditions nécéssaires pour que ce problème de Cauchy soit bien posé dans la classe de Gevrey.

Sur ce sujet, nous mentionnons tout d'abord un travail de S.Mizohata[9]. Il y a montré une condition nécessaire pour une équation de <u>p-évolution</u> : Cette condition pour p=1 est bien connue comme la <u>condition d'hyperbolicité</u> (<u>Théorème de Lax-Mizohata</u>). Depuis les recherches sont orientées en deux directions indépendamment : le cas $p>1$ et celui $p\leq 1$.

Au cas $p>1$, nous citons des recherches sur la parabolicité, par exemple, de K.Igari[1] et M.Miyake[8].

Au cas $p\leq 1$, si les racines caractéristiques sont bien distinctes, la condition de S.Mizohata (condition d'hyperbolicité) est déjà suffisante. On a considéré donc les cas dégénérés où les racines ne sont plus distinctes : Parmi eux nous envisageons ici un cas particulier mais canonique où toutes les racines se coincident à zéro ; Dans ce cas cette dégénérescence est représentée par celle des coefficients. Au cas où la multiplicité de racines est constante, cas représenté par $p<1$, ce sont des recherches sur la condition de Levi. Nous considérons ici le cas où la multiplicité de racines est variable et que toutes les racines coincident à zéro à l'origine : C'est juste le cas $p<1$ à l'origine si l'on redéfinit le poids $p$ ponctuellement. Nous en citons des recherches de V.Ja.Ivrii,[2],[3],[4] T.mandai[7] et S.Mizohata[13],[14],[16],[17].

Sur le cas où $p=1$, il y a des recherches plus approfondies, dans la classe de Gevrey, sur la nécessité de l'hyperbolicité : nous en citons celles de T.Nishitani[18] et S.Mizohata[11].

Ces recherches ramifiées en trois directions différentes en apparence ne sont qu'une à faire comme la généralisation au cas dégénéré du théorème de S.Mizohata[9]. Les améliorations de la méthode de S.Mizohata[9] faites par lui-même[10],[11],[12],[13],[14],[15],[16],[17] et Y.Takei[20] nous permettent de généraliser le théorème de S.Mizohata[9] au cas dégénéré actuel.

Sur cette généralisation, notre collegue T.Sadamatsu[19] travaille dans la catégorie de fonctions $C^{\infty}$. Tandisqu'il traite le cas à coefficients $C^\infty$, nous traittons le cas à coefficients de Gevrey Bien qu'on puisse faire pareillement, le traitement du cas $C^\infty$ est pas mal différent de celui au Gevrey et nous envoyons les lecteurs, au cas à coefficients $C^\infty$, à la note de T.Sadamatsu.

Signalons toutefois que l'on acquiert, au cas non kowalevskien ($p>1$), plus d'informations par supposer les coefficients à la classe de Gevrey : plus réguliers sont les coefficients, plus on montre des conditions nécessaires.

Par comparaison aux travaux de V.Ja.Ivrii ou de Mandai cités ci-hauts, nous soulignons que nous envisageons le problème de Cauchy <u>homogène</u> et ceci <u>à t=0 fixé</u>.

Pour énoncer notre résultat nous commençons par explication de notre terminologie.

Soient $\rho=(\rho_1,..,\rho_d)$, $\delta=(\delta_1,..,\delta_d)$, $s=(s_1,..,s_d)$, $s^\sim=(s_1^\sim,..,s_d^\sim)$ tels que $0 \le \delta_j < \rho_j \le 1 \le s_j^\sim \le s_j < +\infty$, $1 < s_j$ $(j=1,..,d)$

Nous expliquons brièvement les classes de Gevrey. Soient, pour un voisinage $\Omega$ de l'origine de $R^d$,

$$\gamma_R^s(\Omega)=\{f(x)\in C^\infty(\Omega);\ \forall K \text{ compact} \subset \Omega :\ \sup_{x\in K,\alpha} |f^{(\alpha)}(x)|/(\alpha!)^s R^s < \infty\}$$

$$\gamma^{(s)}(\Omega)=\bigcup_{R>0}\gamma_R^s(\Omega) \quad , \quad \gamma^{\langle s\rangle}(\Omega)=\bigcap_{R>0}\gamma_R^s(\Omega)$$

$$W_R^s =\{f(x)\in C^\infty(R^d);\ \sup_\alpha \|f^{(\alpha)}\|_{L^2}/(\alpha!)^s R^s < \infty\}$$

$$W^{(s)}=\bigcup_{R>0}W_R^s \quad , \quad W^{\langle s\rangle}=\bigcap_{R>0}W_R^s$$

où $(\alpha!)^s=\alpha_1!^{s_1}...\alpha_d!^{s_d}$ et $R^s=R^{s_1+...+s_d}$.

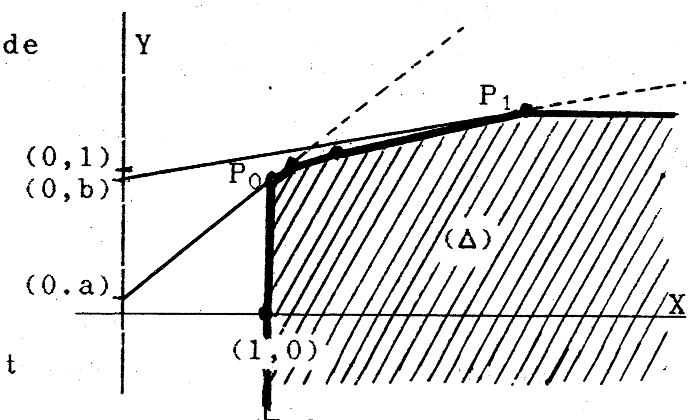
Nous disons qu'une fonction de $\gamma^{(s)}(\Omega)$ ou de $W^{(s)}$ est d'indice (s).

Nous supposons que les coefficients sont des fonctions d'indice $(\tilde{s})$ et nous considérons le problème de Cauchy dans la classe de Gevrey d'indice (s).

Soient : $a = \max_j \frac{\rho_j}{s_j}$ , et $b = \operatorname{Min}_j \frac{\rho_j - \delta_j}{\tilde{s}_j}$ .

Nous faisons correspondre à $(j\alpha k)$ le point $(1+\frac{\sigma(j\alpha k)}{j}, \frac{\rho\circ\alpha-\delta\circ\nu(j\alpha k)}{j})$ au plan X–Y ( $\rho\circ\alpha\equiv\rho_1\alpha_1+,.,+\rho_d\alpha_d$ , $\delta\circ\nu(j\alpha k)\equiv\delta_1\nu_1(j\alpha k)+,.,+\delta_d\nu_d(j\alpha k)$). Nous y ajoutons un point (1,0) exprès. Nous appelons le <u>polygone de Newton</u>, <u>noté par (Δ)</u>, le plus petit polygone à côtés de pente <u>non négative</u> contenant tous ces points.

Soit $P_0$ le point de contact de la tangente au (Δ), à pente non <u>négative</u>, tiré du point (0,a) : Quand cette tangente a un côté commun avec le (Δ), $P_0$ est convenu d'être pris pour le sommet à l'extrémité gauche de ce côté.



(Polygone de Newton)

Soit $P_1$ le point de contact de la tangente au (Δ), à pente non <u>négative</u>, tiré de (0,b) : Quand cette tangente a un côté commun avec le (Δ), $P_1$ est convenu d'être pris pour le sommet à l'extrémité gauche de ce côté. Et quand il n'y a pas de telle tangeante, $P_1$ est convenu d'être pris pour le sommet à l'extrême droite du (Δ). Soit $[P_0,P_1]$ l'ensemble de tous les sommets du (Δ) entre ces deux sommets, $P_0,P_1$ inclus.

Soit, pour un point $P\in[P_0,P_1]$,

$$\rho_P(\lambda)(t,x;\xi) \equiv \lambda^m - \sum_{(j\alpha k)\in\Gamma_P} a_{j\alpha k}(t,0)x^{\nu(j\alpha k)}(i\xi)^\alpha\lambda^{m-j}$$

où $\qquad \Gamma_P \equiv \{(j\alpha k);\ (1+\frac{\sigma(j\alpha k)}{j},\ \frac{\rho\circ\alpha-\delta\circ\nu(j\alpha k)}{j}) = P\ \}.$

Disons que le problème de Cauchy (PC) est (s)-bien posé au cas suivants :

<u>Version globale</u> :

Les coefficients sont de $C^0([0.T_0],W^{(s^\sim)})$, et il existe un T $(0<T\leq T_0)$ tel que, pour toutes les données $\varphi_j(x)\in W^{(s)}$ $(j=1,\ldots,m)$, il existe une et une seule solution $u(t,x)\in C^m([0,T],H^\infty)$.

<u>Version locale</u> :

Les coefficients sont de $C^0([0.T_0],\gamma^{(s^\sim)}(\Omega_0))$ et il existe un T $(0<T\leq T_0)$ et un voisinage de l'origine $\Omega_1\subset\Omega_0$ tels que, pour toutes les données $\varphi_j(x)\in\gamma^{(s)}(\Omega_0)$, il existe une et une seule solution $u(t,x)\in C^m([0,T],C^\infty(\Omega_1))$.

<u>Théorème</u>.

<u>Pour que le problème de Cauchy (PC) soit (s)-bien posé, il faut que la partie réelle de la racine de $\rho_P(\lambda)(0,x;\xi)=0$ soit non positive pour tous $\rho,\delta$ tels que $a\leq b$ et tout $P\in[P_0,P_1]$</u>.

<u>Remarques</u>.

1) A ce théorème, si l'on veut remplacer la classe (s) par la classe <s>, au lieu de choisir $P_0$ "à l'extrémité gauche du cotê", on choisit "à l'extrémité droite du coté" et on remplace la condition $a\leq b$ par $a<b$.

2) Ce théorème subsiste encore au cas $C^\infty$ si l'on remplace (0.a) par l'origine, qu'on choisit $P_0$ "à l'extrémité droite du coté" comme ci-haut, que l'on suppose $0\equiv a<b$ et qu'on remplace $W^{(s)}$ par $H^\infty$ et $\gamma^{(s)}(\Omega)$ par $C^\infty(\Omega)$ respéctivement.

La démonstration détaillée sera donnée dans [6]. Nous nous contentons ici de remarquer que la démonstration est faite par la méthode de micro-localisation de S.Mizohata tout pareillement à la démonstration du théorème inverse de Cauchy-Kowalevski [6],[10] : Seules différences sont d'une part on fait la localisation dépendant de n en x même et on met le poids suivant :

$$x_j \longrightarrow n^{-\delta_j} \quad \text{et} \quad \xi_j \longrightarrow n^{\rho_j} \qquad (\ 0\le\delta_j<\rho_j\le 1\ :\ j=1,\ldots,d)$$

D'autre part, pour developper le produit des opérateurs pseudo-différentiels en une série asymptotique on a donc besoin d'une forme un peu différente de celle ordinaire.

Nous terminons cette note par montrer quelques exemples qui montrent que les résultats sont similaires à ceux de V.Ja.Ivrii.

Exemples.

(1) $L_1(t,x;\partial_t,\partial_x)= \partial_t^2 - a(t,x)x^{2\mu}\partial_x^2 - b(t,x)x^{\nu}\partial_x.$

Pour que le (PC) soit (s)-bien posé, il faut que l'on ait

1) $a(0,0)\ge 0$

2) Si $\mu>\nu$, $s^{\sim}\le \frac{2\mu-\nu-1}{2\mu-\nu}s$ et $s\ge \frac{2\mu-\nu}{\mu-\nu}$ , alors on a $b(0,0)=0$.

(2) $L_2(t,x;\partial_t,\partial_x)= \partial_t^2 - a(t,x)t^{2\mu}\partial_x^2 - b(t,x)t^{\nu}\partial_x.$

Pour que le (PC) soit (s)-bien posé, il faut que l'on ait :

1) Si $\mu\le\nu+1$ ou que $\mu>\nu+1$, $s\le\frac{2\mu-\nu}{\mu-\nu-1}$, (sauf $s=s^{\sim}=\frac{2\mu-\nu}{\mu-\nu-1}$), alors on a

$a(0,0) \geq 0$

2) Si $\mu > \nu+1$ et $s \geq \frac{2\mu-\nu}{\mu-\nu-1}$, alors on a $b(0.0)=0$.

(3) $L_3(t,x;\partial_t,\partial_x) = \partial_t - a(t,x)x^{\mu}\partial_x^2 - b(t,x)x^{\nu}\partial_x$.

Pour que le (PC) soit (s)-bien posé, il faut que l'on ait :

1) Si $\mu$ est paire, alors on a Re $a(0,0) \geq 0$, et si $\mu$ est impaire, alors on a Re $a(0,0)=0$.

2) Si $\mu > 2\nu$, $\tilde{s} \leq \frac{\mu-\nu-1}{\mu-\nu}s$ et $s \geq \frac{\mu-\nu}{\mu-2\nu}$, alors on a Im $b(0,0)=0$.

(4) $L_4(t,x;\partial_t,\partial_x) = \partial_t - a(t,x)t^{\mu}\partial_x^2 - b(t,x)t^{\nu}\partial_x$.

Pour que le (PC) soit (s)-bien posé, il faut que l'on ait :

1) Si $\mu \leq 2\nu+1$ ou que $\mu > 2\nu+1$ et $s \leq \frac{\mu-\nu}{\mu-2\nu-1}$, (sauf $s=\tilde{s}=\frac{\mu-\nu}{\mu-2\nu-1}$), alors on a Re $a(0,0) \geq 0$

2) Si $\mu > 2\nu+1$ et $s \geq \frac{\mu-\nu}{\mu-2\nu-1}$, alors on a Im $b(0,0)=0$.

<u>Bibliographie.</u>

[1] K. Igari : Well-Posedness of the Cauchy Problem for Some Evolution Equations. Publ. Res.Inst.Math.Sci. 9 (1974) 613-629.

[2] V.Ja.Ivrii-V.M.Petkov : Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed. Uspehi Mat.Nauk, 29(1974),3-70. (Russian Math. Surveys, 29 (1974) 1-70.

[3] V.Ja.Ivrii : Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey classes Sib.Math.J. 17-4-6 (1976) 921-931. (Sib.Mat.Z.17-6 (1976)

(1256-1270.)

[4] V.Ja.Ivrii : Conditions that the Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity be well posed in Gevrey classes. Soviet Math.Dokl. 16-2 (1975) 501-503.

[5] K.Kitagawa : Sur le théorème de Cauchy-Kowalevski — Une remarque sur le mémoire du même title de S.Mizohata. (en préparation)

[6] K.Kitagawa : Sur des conditions nécessaires pour l'équation d'évolution pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans la classe de Gevrey. (en préparation)

[7] T.Mandai : Generalized Levi conditions for weakly hyperbolic equations - An attempt to treat the degeneracy with respect to the space variables. Publ.Res.Inst.Math.Sci.22-1 (1986) 1-23.

[8] M.Miyake : Degenerate parabolic differential equations — Necessity of the well-posedness of the Cauchy problem. J.Math. Kyoto Univ. 14 (1974) 461-476.

[9] S.Mizohata : Some remarks on the Cauchy problem. J.Math, Kyoto Univ.,1-1 (1961) 109-127.

[10] S.Mizohata : On the Cauchy-Kowalevski theorem. Math.Anal.& Appl. part B Advances in Math. Suppl. Studies vol 7 B (1981) (Acad.Press) 617-652.

[11] S.Mizohata : On the hyperbolicity in the domain of real analytic functions and Gevrey classes. Hokkaido Math. J. 12-3 (1983) 298-310.

[12] S.Mizohata : On analytic regularities, Séminaire sur Propagation des singularités et opérateurs différentiels (J.Vaillant), Hermann (1985), 82-105

[13] S.Mizohata : Sur l'indice de Gevrey, Séminaire sur Propagation des singularités et opérateurs différentiels (J.Vaillant), Hermann (1985) 106-120.

[14] S.Mizohata : On the Cauchy problem for hyperbolic equations in $C^{\infty}$ and Gevrey classes. Proc. of VIII Escola Latino-Americana de Matematica (1986) (Springer)

[15] S.Mizohata : On the Cauchy problem. (Lecture note at Wuhan) Acad. Press. (1986)

[16] S.Mizohata : On the Cauchy problem for hyperbolic equations and related problems (micro-local energy method) Taniguchi Symposium "Hyperbolic Equations and Related Topics".

[17] S.Mizohata : On the Levi condition. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes (J.Vaillant).

[18] T.Nishitani : On the Lax-Mizohata Theorem in the Analytic and Gevrey Classes. Proc. Japan Acad. 53--A-3 (1977) 88-90

[19] T.Sadamatsu : On a necessary condition for the well-posedness of the Cauchy problem for evolution equations. (en preparation)

[20] Y.Takei : Mizohata's micro-localization. Master Thesis, Kyoto Univ. 1986.