数理解析研究所講究録
第 704 巻 1989 年 95-113

正則解の大域的存在と陪特性曲線

京大理　竹井　義次
(Yoshitsugu Takei)

§1　序、

$P(z, D_z)$ を，正則函数を係数にもつ m 階の線型微分作用素とする。$\mathbb{C}^n$ の与えられた領域において，微分方程式：

(1)　　$P(z, D_z)\, u = f$

が，正則な右辺 f に対して正則な解 u をもつかどうかという問題について，これから考えていくことにしたい。とりわけ，正則解の存在を保障する幾何学的な十分条件を見出すのが，本稿の目標である。

この問題に関して，鈴木[9]は今から約15年前，作用素 P が一階，特に $P = \partial/\partial z_1$ の場合に，次の非常に興味深い結果を示した。

定理（鈴木[9]）　X を $\mathbb{C}^n$ の正則領域，$\mathcal{O}(X)$ を X 上の正則函数の全体，$P = \partial/\partial z_1$ とする。

$\mathbb{C}^n \ni z$ に対して，$\{w \in X ; w_j = z_j \text{ for } j = 2, \cdots, n\}$ の z を含む連結成分を L_z で表す。$L_z = L_{z'}$ なる時，z と z' は同値であると定め，この同値関係による X の商空間を X/P とかく。

この時，$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ が成り立つ為には，次の三条件が満たされることが必要かつ十分である。

i) 任意の $z \in X$ について，L_z は単連結。

ii) X/P の位相は Hausdorff。

iii) X/P は $\mathbb{C}^{n-1}$ の正則領域。

定理の中に現われた L_z とは，z を含む P の（階）特性曲線に他ならない。この鈴木の定理は，正則解の大域的存在という我々がこれから扱おうとしている問題と階特性曲線とのつながりを，作用素が一階の場合に限ってではあるが，明確にしたものと言えよう。以下では，高階の方程式の場合への，この定理の（一つの）一般化について述べる。

§2　記号

まず，以下の議論で必要となる記号の準備から始めよう。

Ω を $\mathbb{C}^n$ の相対コンパクトな強擬凸領域，$\mathcal{O}(\Omega)$ を Ω 上の正則函数の全体とする。Ω は，多重劣調和な実数値実解析函数

φを用いて，

$$\Omega = \{ z = x + iy \ ; \ \varphi(z) < 0 \}$$

と表されており，Ωの境界$\partial\Omega$上では，$\partial\varphi = \mathrm{grad}_z \varphi$ は消えないと仮定する。簡単の為，作用素Pは単一特性的であるとし，その主表象を$p(z,\zeta)$で表す。

複素パラメータ t に対して，次の常微分方程式：

$$(2) \quad \begin{cases} dz_j/dt = p^{(j)}(z(t),\zeta(t)) \\ d\zeta_j/dt = -p_{(j)}(z(t),\zeta(t)) \\ z(0) = z_0 \ , \ \zeta(0) = \zeta_0 \end{cases} \qquad \left(\text{ここで} \ p^{(j)} = \frac{\partial p}{\partial \zeta_j} \ , \ p_{(j)} = \frac{\partial p}{\partial z_j} \right)$$

の解$\{(z(t;z_0,\zeta_0),\zeta(t;z_0,\zeta_0))\}$を，$(z_0,\zeta_0)$を出るPの陪特性帯と呼ぶ。それに対して，その底空間$\mathbb{C}^n_z$への射影を，(z_0,ζ_0)を出るPの陪特性曲線と呼び，$\mathcal{C}_{(z_0,\zeta_0)}$で表す。

以下の議論において，度々，次のシンボルが現れる。

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha(z_0) &= \textstyle\sum_{j,k=1}^n p^{(j)}\overline{p^{(k)}}\partial_j\bar{\partial}_k\varphi(z_0) \\ \beta(z_0) &= \textstyle\sum_{k=1}^n p_{(k)}p^{(k)} + \sum_{j,k=1}^n p^{(j)}p^{(k)}\partial_j\partial_k\varphi(z_0) \\ \kappa_j(z_0) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \overline{p^{(k)}}\partial_j\bar{\partial}_k\varphi(z_0) \\ \lambda_j(z_0) &= p_{(j)} + \textstyle\sum_{k=1}^n p^{(k)}\partial_j\partial_k\varphi(z_0) \\ \delta(z_0) &= \alpha(z_0)^2 - |\beta(z_0)|^2 \end{aligned}$$

ここで，$\partial_j = \partial/\partial z_j = (\partial_{x_j} - i\partial_{y_j})/2$ ，$\bar{\partial}_j = \partial/\partial\bar{z}_j = (\partial_{x_j} + i\partial_{y_j})/2$ であり，また$p^{(j)}(z_0,\partial\varphi(z_0))$の変数$(z_0,\partial\varphi(z_0))$を略して，$p^{(j)}$等とかいた。（以下，しばしば変数の$(z_0,\partial\varphi(z_0))$や$z_0$

は省略されるであろう)。

§3 condition (Pos)

我々は,方程式(1)のΩにおける正則解を問題としている。従って(1)に加えて,更にCauchy-Riemannの方程式も考慮に入れる必要がある。即ち,我々の考察の対象は,次の微分方程式系である。

$$(4)\qquad \mathcal{M}:\begin{cases} P(z,D_z)u = f & \\ \bar{\partial}_j u = 0 \qquad \text{for } j=1,2,\cdots,n \end{cases} \qquad \text{in } \Omega$$

$\bar{\partial}_j$の御蔭でこの方程式系は楕円型になる。その結果,柏原-河合[1]の楕円型境界値問題の理論の応用が期待される。実際この観点から,河合[3]は,(1)の正則解の存在について次の結果を示した。

characteristic boundary point の全体を

$$C_0 = \{ z\ ;\ \varphi(z) = 0\ ,\ p(z, \partial\varphi(z)) = 0 \}$$

とおく。C_0の各点z_0に対して,エルミート形式$Q_{z_0}(\tau)$ ($\tau \in \mathbb{C}^{n+1}$)を,

$$Q_{z_0}(\tau) \overset{\text{def}}{=} (\tau_1, \cdots, \tau_{n+1}) \left(\begin{array}{c|c} \partial_j \bar{\partial}_k \varphi(z_0) & \begin{matrix} \lambda_1(z_0) \\ \vdots \\ \lambda_n(z_0) \end{matrix} \\ \hline \overline{\lambda_1(z_0)} \cdots \overline{\lambda_n(z_0)} & \alpha(z_0) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \overline{\tau_1} \\ \vdots \\ \overline{\tau_{n+1}} \end{pmatrix}$$

で定義しよう。この時，C_0 の任意の点でこの $Q_{z_0}(\tau)$ が，次の正値性の条件：

$(\mathrm{Pos})_{z_0}$　$Q_{z_0}(\tau)$ が $\{\tau \in \mathbb{C}^{n+1} ; \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi(z_0)\tau_j = 0\}$ 上正定値

を満たすならば，P の値域 $P\mathcal{O}(\Omega)$ は，$\mathcal{O}(\Omega)$ において余次元有限となる。即ち，

<u>定理（河合［3］）</u>　$(\mathrm{Pos})_{z_0}$ が C_0 の任意の点 z_0 で成り立つならば，

$$\dim H^1(\Omega ; \mathcal{S}) < +\infty$$

ここで $\mathcal{S}$ は，方程式 $Pu = 0$ の正則解のつくる層 $\mathrm{Ker}(\mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O})$ を表す。

更に，Ω がこの条件を満たしながら一点に収縮可能ならば，$H^1(\Omega ; \mathcal{S})$ が消える事も知られている（［4］，定理2の系）。より正確に述べると，次の四条件を満たす点 z_1 が存在すれば，$H^1(\Omega ; \mathcal{S}) = 0$ が成り立つ。

1）任意の z に対して $\varphi(z) \geqq \varphi(z_1)$ 。

2）$\displaystyle\bigcap_{t>\varphi(z_1)} \{z ; \varphi(z) < t\} = \{z_1\}$ 。

3）任意の $z \neq z_1$ に対して $\partial\varphi(z) \neq 0$ 。

4) $p(z, \partial\varphi(z)) = 0$ かつ $z \neq z_1$ である点 z においては $(\mathrm{Pos})_z$ が成り立つ。

ここで，エルミート形式 Q_{z_0} の由来について，一言述べておこう。$\mathfrak{M}$ の $\partial\Omega$ への (positive) tangential system を $\mathfrak{N}$ とすれば，$\mathfrak{N}$ の特性集合は，

(5) $\quad \mathrm{char}\,\mathfrak{N} = \{ (z, \frac{1}{i}\partial\varphi(z)) \ ; \ z \in C_0 \}$

で与えられる。すると実は，$\mathrm{char}\,\mathfrak{N}$ の点 $(z_0, \frac{1}{i}\partial\varphi(z_0))$ において $\mathfrak{N}$ の generalized Levi form ([8], Chap. III, §2.3., 定義 2.3.1.) が正定値である事と，$(\mathrm{Pos})_{z_0}$ が同値なのである ([7] 又は [5] を参照)。概略，楕円型境界値問題の理論により，tangential system $\mathfrak{N}$ の局所可解性と，$\mathfrak{M}$ の大域的可解性とが結び付いている。それ故に，河合の定理が成り立つと言えよう。

こうして，条件 $(\mathrm{Pos})_z$ は，(1) の正則解の大域的存在の為の一つの十分条件を与えていると考えられる。我々はこの条件を利用する。従って問題は，条件 $(\mathrm{Pos})_{z_0}$ ($z_0 \in C_0$) が，一体どんな幾何学的意味をもっているかを見出す事にある。

§4 bicharacteristical convexity

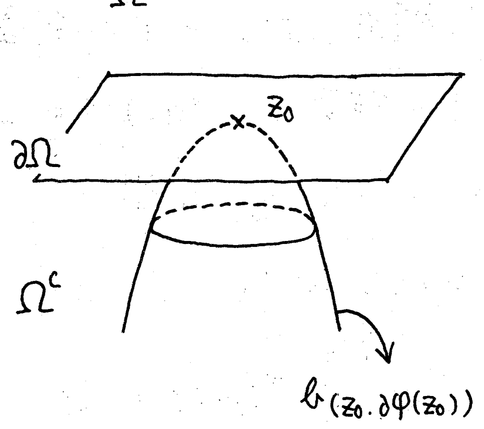
序で引用した鈴木の定理を見れば，$(\mathrm{Pos})_z$ と鈴木の定理に現われる様な幾何学的条件との間に何らかの関連がある事が

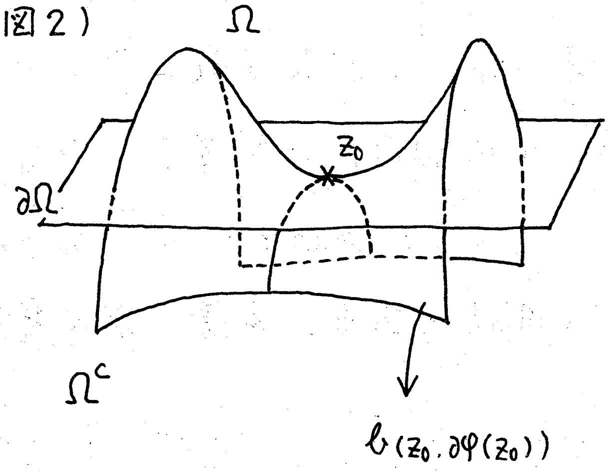
期待される。しかし，高階の作用素の場合には，陪特性曲線がその cotangential component に大きく左右されるという点を考慮に入れねばならない。$(\mathrm{Pos})_{z_0}$ が意味をもつのは $z_0 \in C_0$ の時のみである事，及び，Q_{z_0} の成分に現われる α や λ_j の表現式 (3) において，$p^{(j)}$ や $p_{(j)}$ の変数が $(z_0, \partial\varphi(z_0))$ である事，それよりも何よりも $\mathrm{char}\,\mathfrak{M}$ が (5) で与えられる事，これらの事情から，我々が扱うべきなのは $b_{(z_0, \partial\varphi(z_0))}$ $(z_0 \in C_0)$ という形の陪特性曲線であろうと思われる。以下，この種の陪特性曲線と $(\mathrm{Pos})_z$ の関係について調べていこう。

まず，Euler の恒等式から，$z_0 \in C_0$ において，

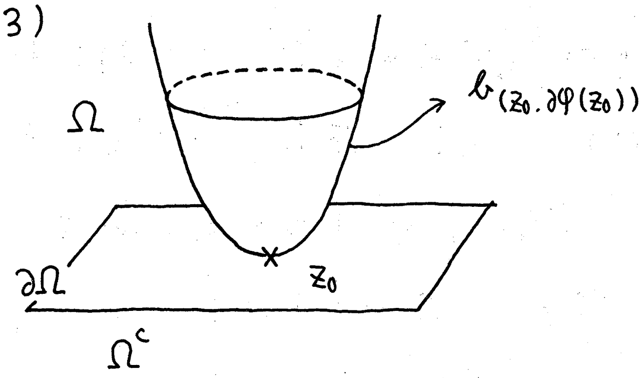
(6) $$\sum_{j=1}^{n} \partial_j\varphi(z_0)\, p^{(j)}(z_0, \partial\varphi(z_0)) = m\, p(z_0, \partial\varphi(z_0)) = 0$$

が成り立つ。これは $b_{(z_0, \partial\varphi(z_0))}$ と $\partial\Omega$ が z_0 で接している事を意味している。そこで，z_0 の近傍における Ω と $b_{(z_0, \partial\varphi(z_0))}$ の位置関係については，例えば次の図で表される様ないくつかの場合が考えられる。

(図1)


(図2)


(図3)



__定義__ $z_0 \in C_0$ に対して，$(z_0, \partial\varphi(z_0))$ を出る陪特性曲線を $z(t; z_0, \partial\varphi(z_0))$ で表す。不等式

$$(7)\qquad \left.\frac{\partial^2\varphi\,(z(re^{i\omega};\, z_0,\, \partial\varphi(z_0)))}{\partial r^2}\right|_{r=0} > 0$$

が任意の $\omega \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ時，Ω は z_0 で P に関して bicharacteristically convex である，或は P の陪特性曲線に関して凸であるという。

Ω が z_0 で bicharacteristically convex であるとは，z_0 の近傍で，図1の様に Ω と $b_{(z_0,\partial\varphi(z_0))}$ が共有点をもたないという事である。定数係数の場合の，実領域における実解析函数解の大域的存在に関する，河合[2]の結果から類推される様に，この bicharacteristical convexity と $(Pos)_{z_0}$ の間には，密接な関連がある。実際，次の命題が成り立つ。

<u>命題 1</u>　$z_0 \in C_0$ において $(\mathrm{Pos})_{z_0}$ が成り立つならば，Ω は z_0 で P に関して bicharacteristically convex である。

<u>証明</u>　陪特性曲線の方程式 (2) を用いれば，直接計算により，

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi\left(z\left(re^{i\omega};\ z_0,\ \partial\varphi(z_0)\right)\right)}{\partial r^2}\right|_{r=0}$$

$$= 2\left\{\alpha(z_0) + \mathrm{Re}\left[e^{2i\omega}\beta(z_0)\right]\right\}$$

を得る。一方，

$$Q_{z_0}\left(\left(p^{(1)}, \cdots, p^{(n)}, e^{-2i\omega}\right)\right)$$

(8)
$$= \left(p^{(1)} \cdots p^{(n)}\ e^{-2i\omega}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \lambda_1 \\ & \partial_j\bar{\partial}_k\varphi & & \vdots \\ & & & \lambda_n \\ \hline \bar{\lambda}_1 & \cdots & \bar{\lambda}_n & \alpha \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \overline{p^{(1)}} \\ \vdots \\ \overline{p^{(n)}} \\ e^{2i\omega} \end{array}\right)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} p^{(j)}\,\overline{p^{(k)}}\,\partial_j\bar{\partial}_k\varphi + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} p^{(k)}\lambda_k e^{2i\omega}\right) + \alpha$$

$$= 2\left\{\alpha(z_0) + \mathrm{Re}\left[e^{2i\omega}\beta(z_0)\right]\right\}$$

ここで (6) により，ベクトル $\tau_0 = \left(p^{(1)}, \cdots, p^{(n)}, e^{-2i\omega}\right)$ は $\sum_{j=1}^{n} \partial_j\varphi \cdot \tau_{0,j} = 0$ をみたす。故に $(\mathrm{Pos})_{z_0}$ が成り立つという仮定から，(8) の左辺は正，よって (7) が従う。　(証了)

この命題 1 により，bicharacteristical convexity は，$(\mathrm{Pos})_{z_0}$ が

成り立つ為の必要条件である事がわかった。しかしそれは十分条件ではない。bicharacteristical convexity は，P が一階の時には，ほぼ，鈴木の定理の中の条件 i) 及び ii) に対応する。例えば先の図で言うと，図3の状況では条件 i) が，図2の状況では条件 ii) が，それぞれ満たされていないのである。それ故，$(\mathrm{Pos})_{z_0}$ の幾何学的意味を見出す為には，鈴木の条件 iii) に対応する，P が高階の場合にも意味をもつ幾何学的な条件を求めねばならない。

§5 condition (Pos) と陪特性曲線の幾何

以下この節では，bicharacteristical convexity を仮定する。

§4 の冒頭に述べた様に，我々が注目しているのは，$b_{(z_0, \partial\varphi(z_0))}$ $(z_0 \in C_0)$ という形の陪特性曲線である。その全体（各々の陪特性曲線を $\mathbb{C}^n_z$ の部分集合と見た場合の合併）を $\widetilde{C_0}$ とかく。即ち，

$$\widetilde{C_0} = \{ w \,;\, \text{ある } z \in C_0 \text{ が存在して } b_{(z, \partial\varphi(z))} \ni w \}$$

$\widetilde{C_0}$ は，C_0 の一種の "bicharacteristic hull" とでも言えようか。同様に，

$$C_\varepsilon = \{ z \,;\, \varphi(z) = \varepsilon \,,\ p(z, \partial\varphi(z)) = 0 \}$$

$$\widetilde{C_\varepsilon} = \{ w \,;\, \text{ある } z \in C_\varepsilon \text{ が存在して } b_{(z, \partial\varphi(z))} \ni w \}$$

と定義する。すると bicharacteristical convexity の仮定から，

各$\widetilde{C}_\varepsilon$は，$|\varepsilon|$が十分小のとき，$z_0$の十分小さな近傍において，実余次元1の実解析的な超曲面となり，陪特性曲線：

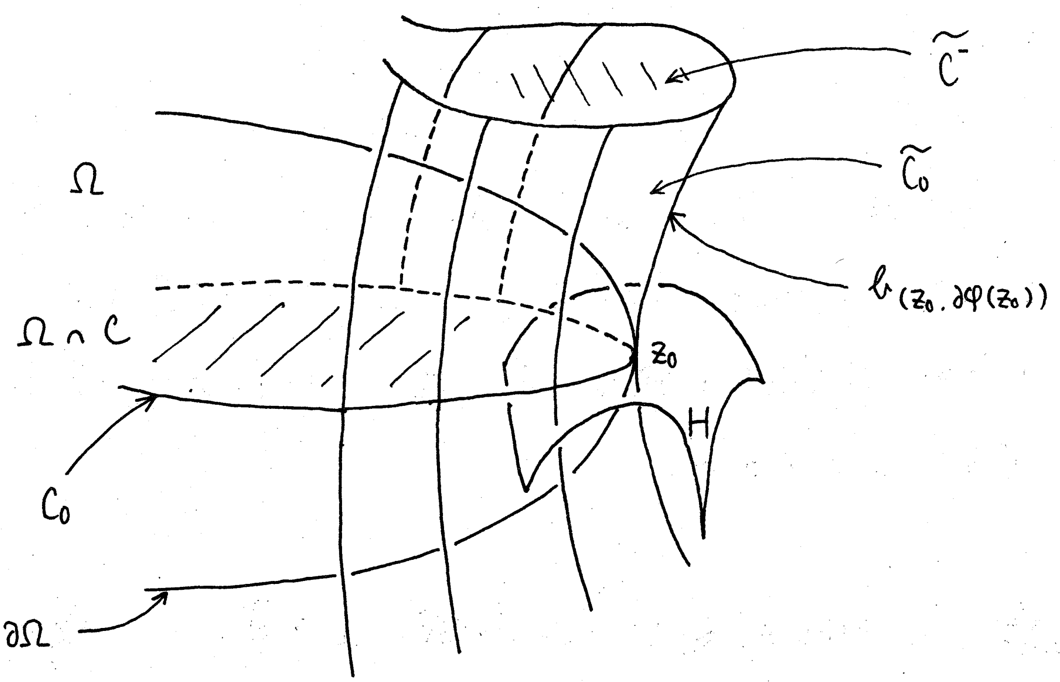
$$b_{(z,\partial\varphi(z))} \qquad (z \in C = \{ z\ ;\ p(z,\partial\varphi(z)) = 0 \})$$

の全体は，z_0の近傍に一つの foliation structure を定める事がわかる。（証明については[6]を参照されたい）。我々は，Pが一階の場合の特性曲線の族に対応するものとして，この foliation structure を利用する。

特に，超曲面$\widetilde{C}_0$によって区切られてできる二つの領域のうち，Ωを含む方を$\widetilde{C}^-$とかく。正確には，

$$\widetilde{C}^- \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{\varepsilon<0} \widetilde{C}_\varepsilon$$

$\widetilde{C}^-$は，Ωの"bicharacteristic hull"とでも呼べる様な領域である。陪特性曲線を実1次元の如く考えて，図を書くと，



この時，次の命題が成り立つ。

命題 2　Ω は z_0 で P に関して bicharacteristically convex と仮定する。H を，z_0 を通り，$b_{(z_0,\partial\varphi(z_0))}$ と横断的に交わる，正則な非特異超曲面とする。この時，$(Pos)_{z_0}$ が成り立つ為には，$\tilde{C}^- \cap H$ が z_0 で強擬凸である事が必要かつ十分である。

ここで，$\tilde{C}^- \cap H$ が z_0 で強擬凸であるとは，次の条件：

$$L_{z_0}(\sigma) = \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial w_j \partial \overline{w_k}}(z_0)\, \sigma_j \overline{\sigma_k} \quad \text{が}$$

$$\left\{ \sigma \in \mathbb{C}^{n-1} \;;\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial w_k}(z_0) \cdot \sigma_k = 0 \right\} \quad \text{上，正定値。}$$

を満たす実数値実解析函数 ψ を用いて，$\tilde{C}^- \cap H$ が，z_0 の近傍において

$$\tilde{C}^- \cap H = \{ w' \in H \;;\; \psi(w') < 0 \}$$

と表される時に言う。なお，$L_{z_0}(\sigma)$ を ψ の Levi form と呼ぶ。

この命題 2 の証明（の概略）については，次節で述べることにしよう。命題 1 と命題 2 をあわせれば，容易に次の主定理を得ることができる。

定理　$(Pos)_{z_0}$ が $z_0 \in C_0$ で成り立つ為には，次の二条

件 (a), (b) が共に満たされる事が必要かつ十分である。

(a) Ω は z_0 で P に関して bicharacteristically convex 。

(b) z_0 を通り, $b_{(z_0, \partial\varphi(z_0))}$ と横断的に交わる, (或る) 正則な非特異超曲面 H に対して, $\tilde{C}\cap H$ が z_0 で強擬凸。

系　$n=2$ の場合には, $(P_{os})_{z_0}$ が $z_0 \in C_0$ で成り立つ事と, Ω が z_0 で P に関して bicharacteristically convex である事とは同値である。

P が一階の作用素の場合, 我々が利用してきた foliation structure と, P の特性曲線によって定義されるそれとは完全に一致し, $\tilde{C}\cap H$ は, 鈴木の定理の中で用いられた X/P の, 一つの具体的な局所表現であると見なす事ができる。従って上の定理の条件 (b) は, 鈴木の条件 iii) を局所化したものと考えられる。この意味で, 上の定理は, 鈴木の定理の高階の方程式への一つの拡張であると言うことができよう。(勿論, 陪特性曲線と領域の境界との二次の接触を仮定した場合に限ってではあるけれども)。

注)　わざわざ H という超平面を取らなくても, 本来は $\tilde{C}$ の形状が問題のはずだから, $C=\{z : p(z, \partial\varphi(z))=0\}$

の中で，$\tilde{C}\cap C$ 即ち $\Omega\cap C$ を考えれば十分なのではないか。我々の利用している陪特性曲線の初期値自身が，そもそも C 上で与えられている訳だから，その方が何かと好都合だろう……。こんな考え方もあり得るが，しかし，それではうまくいかない。その理由は次の点にあると思われる。鈴木の定理にしろ我々の主定理にしろ，"正則領域"や"強擬凸"といった言葉の背後に，陰にその複素構造が問題とされている。恐らく，X/P の多様体としての構造（特にその複素構造）は，元の空間 $\mathbb{C}^n$ と compatible に与えられる必要があるのであろう。多様体 C は，実余次元が 2 の解析的な部分多様体であって，決して正則ではないから，$\tilde{C}\cap C=\Omega\cap C$ を X/P の局所表現と見なすには無理がある。

§6 証明（の概略）

最後に，命題 2 の証明について述べよう。紙数の都合上，概略を解説するにとどめ，細部は省略させて頂く。計算など，詳しくは [6] を見られたい。

まず，$z_0=0$，$H=\{z_n=0\}$ となる正則な局所座標系 $(z_1,\cdots,z_n)$ をとる。この時，横断性の仮定から $p^{(n)}(0,\partial\varphi(0))\neq 0$ が成り立つ。以下，H の点を

$$H\ni w=(w',0)=(w_1,\cdots,w_{n-1},0)$$

と書くことにしよう。才一の問題は，

(9) $\widetilde{C} \cap H = \{ w = (w', 0) \in H \ ; \ \psi(w') < 0 \}$

を満たす函数 ψ を構成する事である。

何度も述べた様に，我々が利用している陪特性曲線の全体は，z_0 の近傍において foliation structure を定めている訳だから，H の各点 w に対して，w を通るこの種の陪特性曲線が唯一つ存在する。即ち，$w \in b_{(z, \partial\varphi(z))}$ を満たす $z = z(w) \in C$ が唯一つ存在する。すると，w が $\widetilde{C}$ に属するかどうかは，その唯一つ存在する点 $z(w) \in C$ における φ の値によって決定される。ところが，この種の陪特性曲線の初期値が C 上で与えられているが故に，w から対応する $z(w)$ を求める事は，それほど容易ではない。

そこで，パラメータ $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathbb{C}^n$ を導入し，(w, θ) から出る陪特性帯 $\{(z(t; w, \theta), \zeta(t; w, \theta))\}$ を考えよう。この陪特性帯が，上で述べた w を通る $b_{(z, \partial\varphi(z))}$（の持ち上げ）に一致する為には，次の $(n+1)$ コの方程式が満たされればよい。

$$\begin{cases} p(z(t; (w', 0), \theta), \partial\varphi(z(t; (w', 0), \theta))) = 0 \\ \zeta_j(t; (w', 0), \theta) = \partial_j \varphi(z(t; (w', 0), \theta)) \end{cases}$$
$$(\text{for } j = 1, \cdots, n)$$

bicharacteristical convexity の仮定から，陰函数の定理が使

えて，この $(n+1)$ コの方程式は，$(t, w', \vartheta) = (0, 0, \partial\varphi(0))$ の近傍で

$$(t, \vartheta) = (T(w'), \Theta(w'))$$

と，t と ϑ について解くことができる。（ここで T と $\Theta = (\Theta_1, \cdots, \Theta_n)$ は，いずれも w' の実解析函数）。これは，$w = (w', 0)$ に対応する $z = z(w) \in C$ が，

$$z = z(T(w'); (w', 0), \Theta(w'))$$

によって与えられる事を意味している。従って，$\psi(w')$ を

$$\psi(w') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(z(T(w'); (w', 0), \Theta(w')))$$

と定義すれば，原点の近傍において，(9) が成り立つ。

この ψ の Levi form を求めるには，直接計算を行えばよい（決してすぐに求まる訳ではないが）。結果だけ記せば，

$$L_0(\sigma) = \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2\psi}{\partial w_j \partial \overline{w_k}}(0)\,\sigma_j \overline{\sigma_k} \qquad \text{但し} \quad \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial\psi}{\partial w_j}(0)\,\sigma_j = 0$$

ここで，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial w_j \partial \overline{w_k}}(0) = \partial_j \overline{\partial_k}\varphi(0) + \frac{1}{\delta}\left(-\alpha \kappa_j \overline{\kappa_k} - \alpha \lambda_j \overline{\lambda_k} + \beta \kappa_j \overline{\lambda_k} + \overline{\beta} \lambda_j \overline{\kappa_k}\right)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial w_j}(0) = \partial_j \varphi(0)$$

さて最後に，$Q_0(\tau)$ と $L_0(\sigma)$ の関係を見出そう。τ を次の様に変換する。

$$
(10)\qquad
\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{n+1} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & & 0 & p^{(1)} & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & & \\ & 0 & & p^{(n)} & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & 0 \\ 0 & & 1 & & \\ \hline -c_1 & \cdots & -c_{n-1} & 1 & 0 \\ -d_1 & \cdots & -d_{n-1} & 0 & 1 \end{array}\right)
\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{n+1} \end{pmatrix}
$$

ここで，

$$
\begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \kappa_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} \qquad \text{for } j = 1, \cdots, n-1 .
$$

その際，横断性の仮定から $p^{(n)} \neq 0$ である事，及び bicharacteristical convexity の仮定から

$$
\delta = \det \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - |\beta|^2 \neq 0
$$

である事に注意されたい。この時，$Q_0(\tau)$ は次の様に変形される。

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
Q_0(\tau) &= (\tau_1 \cdots \tau_{n+1}) \left(\begin{array}{c|c} \partial_j \bar{\partial}_k \varphi & \begin{matrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{matrix} \\ \hline \bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n & \alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \vdots \\ \bar{\tau}_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= (\sigma_1 \cdots \sigma_{n+1}) \left(\begin{array}{c|c} R_{jk} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{matrix} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \bar{\sigma}_{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

但し，

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
R_{jk} &= \partial_j \bar{\partial}_k \varphi - (\kappa_j \ \lambda_j) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\kappa}_k \\ \bar{\lambda}_k \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial^2 \psi}{\partial w_j \partial \bar{w}_k}(0)
\end{aligned}
$$

しかも(10)の変換で，Q_0 の束縛条件 $\sum_{j=1}^{n} \partial_j\varphi(0)\tau_j = 0$ が，L_0 の束縛条件 $\sum_{j=1}^{n-1}(\partial\psi/\partial w_j)(0)\sigma_j = 0$ に対応していることも，容易に確かめられる。bicharacteristical convexity の仮定から $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ は正定値であるので，(11)及び(12)は，まさしく $(\mathrm{Pos})_{z_0}$ と ψ の Levi form の正定値性とが，同値であることを示している。

参考文献

[1] M. Kashiwara and T. Kawai : On the boundary value problem for elliptic system of linear differential equations, I, Proc. Japan Acad., 48 (1972), 712 - 715.

[2] T. Kawai : On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations (I), J. Math. Soc. Japan, 24 (1972), 481 - 517.

[3] ________ : Theorems on the finite - dimensionality of cohomology groups, III, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 243 - 246.

[4] ________ : ________, V, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 782 - 784.

[5] T. Kawai and Y. Takei : On a closed range property of a linear differential operator, Proc. Japan Acad., Ser. A,

62 (1986), 386 - 388.

[6] ________ : Bicharacteristical convexity and the semi-global existence of holomorphic solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients, (preprint).

[7] P. Pallu de La Barrière : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, I, J. Math. Pures et Appl., 55 (1976), 21 - 46.

[8] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara : Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math., No. 287, Springer, 1973, 265 - 529.

[9] F. Suzuki : On the global existence of holomorphic solutions of the equation $\partial u / \partial x_1 = f$, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, 11 (1972), 253 - 258.