数理解析研究所講究録
第704巻 1989年 114-139

無限次元射影空間上の擬凸領域について

福岡工業大学　西原　賢 (Masaru Nishihara)

§0. 序

変数の数が有限個であるか無限個であるかにかかわらず，正則関数の定義域 D が与えられたとき，D において十分多くの正則関数が存在し D を存在領域とする正則関数が存在するかという問題は，基本的かつ重要な問題である。

この問題は Levi の問題と関連して，Oka[14] の研究をはじめとして種々の研究がなされてきた（Siu [15] を参照，変数無限の場合は Dineen [1, Appendix I] を参照）

この講究録において，$\mathbb{C}$ 上の分離的局所凸空間から導入される複素射影空間上の領域において，Levi の問題を論じる。射影空間上の Levi の問題は無限次元複素多様体でこの問題を考える際の第一歩であり，$\mathbb{C}^*$-作用で不変な正則関数および無限遠点の近傍で定義された正則関数の解析接続を論ずる際に重要である。ここでは，シャウダー基底をもつ複素フレッシェ空間から導入される射影空間上の領域に対して，Levi の

問題を肯定的に解く。この結果の応用として，次の indicator 定理を得ることができる。

Eをシャウダー基底をもつ複素フレッシェ空間，Xは複素DFN空間とする。fをE上の階数1の正斉次多重劣調和関数とする。そのとき，

$$\overline{\lim_{y \to x}} \overline{\lim_{s \to +\infty}} (1/s) \log |u(sy)| = f(x) \quad (x \in E)$$

をみたす指数型整関数 u が存在する。特にEが核型であれば，E′上の解析的汎関数 μ で

$$\overline{\lim_{y \to x}} \overline{\lim_{s \to +\infty}} (1/s) \log |\mu(\exp sy)| = f(x) \quad (x \in E)$$

をみたすものが存在する。これは，Kiselman [6]，Lelong [7]，Martineau [8] の結果の無限次元への拡張である。

§1．準備．

この講究録において，考える局所凸空間はすべてC上の分離的局所凸空間とする。E，Fを局所凸空間とし，UをEの開集合とする。写像 $f : U \longrightarrow F$ が連続で，各 $(a, b) \in U \times (E - \{0\})$ とF上の連続線形汎関数 α に対して，関数

$\lambda \longrightarrow \alpha \circ f(a+\lambda b)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ がそれが定義される所で正則であるとき，f は正則であるという。関数 $P : U \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ が多重劣調和であるとは，P が U で上半連続で各 $(a, b) \in U \times (E-\{0\})$ に対して，関数 $\lambda \longrightarrow P(a+\lambda b)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ がそれが定義される所で劣調和であるときをいう．

有限次元の場合と同様に局所凸空間の開集合の間の正則写像を使って，局所凸空間をモデルとする複素多様体を定義することができる。局所凸空間をモデルとする複素多様体の間の正則写像，その上の正則関数，多重劣調和関数等も有限次元の場合と同様に定義することができる．今後，複素多様体はすべて局所凸空間をモデルとする複素多様体とする。従って，一般に無限次元である。複素多様体 M に対して，M 上の正則関数全体の空間を $H(M)$ で表わす。複素多様体 Ω から，複素多様体 M への局所正則同型写像 φ が存在するとき，(Ω, φ) は M 上のリーマン領域と呼ぶ。

(Ω, φ)，(Ω', φ') を M 上のリーマン領域とする。正則写像 $\lambda : \Omega \longrightarrow \Omega'$ が $\varphi = \varphi' \circ \lambda$，をみたすとき，$\lambda$ は (Ω, φ) から (Ω', φ') への写像と呼ばれる。(Ω, φ) を複素多様体 M 上のリーマン領域とし，$\mathfrak{F} \subset H(\Omega)$ とする。M 上のリーマン領域 (Ω', φ') に対して，(Ω, φ) から (Ω', φ') への写像 λ が Ω の $\mathfrak{F}$－拡大であるとは，各 $f \in \mathfrak{F}$ に

に対して，$f' \circ \lambda = f$ となる $f' \in H(\Omega')$ が一意的に存在するときをいう。(Ω, φ) から (Ω', φ') への写像 λ が Ω の正則拡大であるとは，λ が Ω の $H(\Omega)$-拡大であるときをいう。Ω が $\mathfrak{F}$-正則領域であるとは，Ω の各 $\mathfrak{F}$-拡大が同型であるときをいう。Ω が正則領域であるとは，Ω が $H(\Omega)$-正則領域であるときをいう。Ω が存在領域であるとは，Ω が $\{f\}$-正則領域であるような $f \in H(\Omega)$ が存在するときをいう。

(Ω, φ) を局所凸空間 E 上のリーマン領域とする。$A \subset E$ に対して，連続写像 $\sigma : A \longrightarrow \Omega$ が A 上の切断であるとは，A において $\varphi \circ \sigma = id$ をみたすときをいう。$\mathscr{V}(E)$ を E における0のすべての円形凸開近傍全体の集合とする。$X \subset \Omega$ および $V \in \mathscr{V}(E)$ をとる。各 $x \in X$ に対して，$\varphi(x) + V$ 上の切断 $\sigma : \varphi(x) + V \longrightarrow \Omega$ で $\sigma \circ \varphi(x) = x$ となるものが存在するとき，各 $a \in V$ に対して $x + a = \sigma(\varphi(x) + a)$ とおく。そのとき，集合 $X + V \subset \Omega$ を $X + V = \{x + a\,;\, x \in X, a \in V\}$ によって定義する。

$f \in H(\Omega)$ とする。そのとき，各 $x \in \Omega$ に対して連続な n 次同次多項式 $P^n f(x) : E \longrightarrow \mathbb{C}$ と $V \in \mathscr{V}(E)$ が存在して，$x + V \subset \Omega$ でかつ $f(x + a) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x)(a) \quad (a \in V)$ は V で一様に収束する。

M を複素多様体とし，M 上に距離 d が定義されていて M

の位相を定義しているものとする。(Ω, φ)をM上のリーマン領域とする。Eの点 z と正数 ε に対して，Mの d に関する開球を $B_d(z, \varepsilon) = \{w \in M ; d(w, z) < \varepsilon\}$ によって定義する。各点 $x \in \Omega$ に対して，正数 ε と Ω における x の近傍 $\Delta_d(x, \varepsilon)$ をえらんで写像 $\varphi | \Delta_d(x, \varepsilon) : \Delta_d(x, \varepsilon) \longrightarrow B_d(x, \varepsilon)$ が位相同型であるようにできる。x の開近傍 $\Delta_d(x, \varepsilon)$ を中心 x，半径 ε の距離 d に関する Ω の開球と呼ぶ。(Ω, φ) 上の距離 d に関する境界距離 δ_d を $\delta_d(x) = \sup\{\varepsilon ; \Delta_d(x, \varepsilon)$ が存在する。$\}$によって，定義する。

§2．局所凸空間から導入される複素射影空間

この章では，局所凸空間から導入される複素射影空間の簡単な性質について，述べる。

Eを局所凸空間とする。z，z'を $E-\{0\}$ の点とする。z と z' とが同値であるとは，$z' = \lambda z$ となる $\lambda \in \mathbb{C}-\{0\}$ が存在するときをいう。この同値関係による $E-\{0\}$ の商空間をEから導入された複素射影空間と呼び，$\mathbb{P}(E)$ で表わす。Qを $E-\{0\}$ から $\mathbb{P}(E)$ への商写像とする。各 $\xi \in E-\{0\}$ に対して，ξ の同値類を$[\xi]$によって表わす。そのとき，$Q(\xi) = [\xi]$ が成立する。$\mathbb{P}(E)$ に $E-\{0\}$ から導入される商位相を入れると，$\mathbb{P}(E)$ は分離的位相空間となる。

E上の連続線形汎関数全体の空間を E' で表す．$S=\{(f,a)\in E'\times E;\ f(a)\neq 0\}$ とおく．各 $f\in E'-\{0\}$ に対して，Eの超平面 $E(f)$ と $\mathbb{P}(E)$ の開集合 $U(f)$ を $E(f)=\{\xi\in E;\ f(\xi)=0\}$，$U(f)=\{[\xi]\in\mathbb{P}(E);\ f(\xi)\neq 0\}$ によってそれぞれ定義する。各 $(f,a)\in S$ に対して，$U(f)$ から $E(f)$ の上への位相同型写像を $\varphi_{(f,a)}([\xi])=(1/f(\xi))\xi-(1/f(a))a$，$([\xi]\in U(f))$ によって定義する。そのとき，族 $\{U(f),\varphi_{(f,a)}\}_{(f,a)\in S}$ は $\mathbb{P}(E)$ の複素構造を定義する．

Eを複素フレッシェ空間とする。そのとき，Eの位相を定義する半ノルム達の増加列 $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ が存在する．Eの位相と同値な，Eの距離 d を $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(x-y)}{2^n(1+\alpha_n(x-y))}$ によって定義することができる。Eは距離 d により，完備距離空間となる．$S_d(E)=\{x\in E;\ d(x,0)=\frac{1}{2}\}$ とおく。$\sup\{d(x,0);\ x\in E\}=1$ で $d(0,0)=0$ であるから，中間値の定理により $S_d(E)$ は空でない閉集合である。各 $\theta\in\mathbb{R}$ に対して $d(e^{i\theta}x,0)=d(x,0)$ であるから，各 $x\in S_d(E)$ と各 $\theta\in\mathbb{R}$ に対して $e^{i\theta}x\in S_d(E)$ が成立する．位相空間 $\mathbb{P}(E)$ は $S_d(E)$ の商空間で，Eの部分空間としての $S_d(E)$ の位相は $\mathbb{P}(E)$ の商空間としての位相を導き，その位相は $\mathbb{P}(E)$ のもとの位相と同じである．$S_d(E)$ は $\mathbb{P}(E)$ 上の円周群を構造群とする主ファイバーバンドルの全空間であ

る。$S_d(E)$ は距離空間の部分空間であるから，$S_d(E)$ 上に距離が導入され $S_d(E)$ 上の距離により $\mathbb{P}(E)$ 上の距離 $\rho(x,y)$ が
$\rho(p,p') = \inf\{d(x-y)\,;\, z\in Q^{-1}(p)\cap S_d(E),\ z'\in Q^{-1}(p')\cap S_d(E)\}$ $(p,p'\in\mathbb{P}(E))$
によって導入される。そのとき，$\mathbb{P}(E)$ の距離 $\rho(\ ,\ )$ による位相は $\mathbb{P}(E)$ のもとの位相と一致し，この距離 $\rho(\ ,\ )$ により $\mathbb{P}(E)$ は完備距離空間となる。

E を局所凸空間とする．(Ω,φ) を複素射影空間上のリーマン領域とする．$E-\{0\}$ は複素乗法群 $\mathbb{C}^*$ を構造群とする $\mathbb{P}(E)$ 上の正則主バンドルの全空間である。

(2.1) $\qquad X = \{(z,w)\in\Omega\times(E-\{0\})\,;\, \varphi(z) = Q(w)\}$

によって定義される Ω と $E-\{0\}$ とのファイバー積 X を考える。$\tilde{\varphi}$, $\tilde{Q}$ をそれぞれ X のそれぞれ $E-\{0\}$, Ω への射影とする。そのとき $(X,\tilde{\varphi})$ は E 上のリーマン領域である。各 $(z,w)\in X$ と $\lambda\in\mathbb{C}^*$ に対して，$\lambda\cdot(z,w)=(z,\lambda w)$ とおく。そのとき $\lambda\cdot(z,w)\in\Omega\times(E-\{0\})$ は X に属する．写像 $(\lambda,x)\longrightarrow\lambda\cdot x$，$((\lambda,x)\in\mathbb{C}^*\times X)$ は $\mathbb{C}^*\times X$ から X の上への正則写像である．そのとき，Ω はこの $\mathbb{C}^*$-作用による X の商空間で $\tilde{Q}$ は X から Ω の上への商写像である。X は $\mathbb{C}^*$ を構造群とする Ω 上の正則主バンドルの全空間である。

次の可換図式を得る。

(2.2)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{Q}} & \Omega \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\varphi}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ E-\{0\} & \xrightarrow{Q} & \mathbb{P}(E) \end{array}$$

f を X の正則関数とする。$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}\cdot x)\,d\theta$ $(x \in X)$ とおく。そのとき，$\hat{f}$ は X の正則関数で各 $\eta \in \mathbb{R}$ に対して $\hat{f}(e^{i\eta}\cdot x) = \hat{f}(x)$ が成り立つ。一変数正則関数の一致の定理により，$\hat{f}(\lambda\cdot x) = \hat{f}(x)$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$ が成り立つ。それ故に $\hat{f}$ は各 $z \in \Omega$ に対して，$\tilde{Q}^{-1}(z)$ 上で定数関数となる。従って，$f^*(z) = \hat{f}(\tilde{Q}^{-1}(z))$ $(z \in \Omega)$ によって，Ω 上の正則関数を定義することができる。この講究録において，X における正則関数 f から Ω における正則関数 f^* を構成するこの方法をしばしば使う。

F を E の閉部分空間とする。$X_F = \tilde{\varphi}^{-1}(F-\{0\})$, $\Omega_F = \varphi^{-1}(\mathbb{P}(F))$ とおく。X_F は Ω_F 上の $\mathbb{C}^*$ を構造群とする正則主バンドルである。(2.2) から次の可換図式を得る。

(2.3)
$$\begin{array}{ccc} X_F & \xrightarrow{\tilde{Q}|X_F} & \Omega_F \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\varphi}|X_F} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi|\Omega_F} \\ F-\{0\} & \xrightarrow[Q|(F-\{0\})]{} & \mathbb{P}(F) \end{array}$$

Mを有限次元の複素多様体とし，(Ω, φ)をM上のリーマン領域とする。Mの各点xに対して，Mにおけるxの開近傍$U(x)$が存在して，$\varphi^{-1}(U(x))$がスタイン多様体かヌは空集合となるとき，Ωは擬凸であるという。

(Ω, φ)を射影空間$\mathbb{P}(E)$上のリーマン領域とする。Eの各有限次元部分空間Fに対して，有限次元射影空間$\mathbb{P}(F)$上のリーマン領域$(\Omega_F, \varphi|\Omega_F)$が擬凸であるとき，$(\Omega, \varphi)$は擬凸であるという。

補題 2.1. Eを局所凸空間とし，(Ω, φ)を射影空間$\mathbb{P}(E)$上のリーマン領域とする。Ωはφによって$\mathbb{P}(E)$と位相同型にならないものとする。そのとき，Ωが擬凸ならば，ファイバー積XもE上の擬凸領域である。

証明. FをEの任意の有限次元部分空間とする。そのときX_Fがスタイン多様体であることを示せばよい。Ωはφによって位相同型でないから，Eのある有限次元部分空間Gで$F \subset G$でかつ$\varphi|\Omega_G : \Omega_G \longrightarrow \mathbb{P}(G)$が位相同型とならないものが存在する。仮定より$\Omega_G$は擬凸であるから，Fujita [2], Kiselman [6], Takeuchi [17] によって，Ω_Gはスタイン多様体である。Ω_FはΩ_Gの閉部分多様体であるから，Ω_F

もまたスタイン多様体である。X_F は Ω_F 上の C^* を構造群とする正則主ファイバーバンドルであるから，Matsushima と Morimoto [9] によって X_F もまたスタイン多様体である。

§3. ファイバー積 X の性質

この章では，E がシャウダー基底をもつフレッシェ空間であるとき，前章で定義したファイバー積 X の性質を示べる。

フレッシェ空間 E はシャウダー基底 (e_n) をもつとする。そのとき，各 $x \in E$ に対して E 上の連続線形汎関数 $\xi_n \in E'$ が存在して，一意に

$$(3.1) \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x) e_n$$

と表わされる。ただし，$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x) e_n$ は通常の意味で，E の位相で収束するものとする。E_n を $e_1, e_2, \cdots, e_n$ によって生成される部分空間とする。$T_n : E \longrightarrow E_n$ を標準的な射影とする。開写像定理により，列 (T_n) は同程度連続でコンパクト集合上で恒等写像に一様収束し，E の位相を定義する連続半ノルムの増加列 (α_n) で条件 $\alpha_j = \sup_n \alpha_j \circ T_n$ をみたすものが存在する。(Ω, φ) を $\mathbb{P}(E)$ 上の連結リーマン領域で擬凸とする。そのとき，Ω と $E-\{0\}$ との

ファイバー積 X は補題 2.1 によって擬凸であり，かつ連結である。(e_n) を選びなおすことにより，$\tilde{\varphi}(X) \cap E_1 \neq \phi$ と仮定してよい。自然数 n に対して，$X_n = \tilde{\varphi}(E_n)$ とおく。補題 3.1 を述べる前に次のことを定義しておく。

S をスタイン多様体とし，K を S のコンパクト集合とする。$K(S) = \{x \in S\,;\ |f(x)| \leqq \sup_{y \in K} |f(y)|$，すべての $f \in H(S)\}$ とおく。$K(S)$ を K の S における正則凸被と呼ぶ。S_1 をスタイン多様体とし，S_2 を S_1 のスタイン開集合とする。S_2 が S_1 に関してルンゲであるとは，S_2 のコンパクト集合 K に対して，$K(S_1)$ が S_2 のコンパクト集合であるときをいう。

補題 3.1（Schottenloher [15]）．X の開集合の列 A_n と正則写像の列 $\tau_n : A_n \longrightarrow X_n$ が存在して，次の性質をみたす。

(a) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$, $X_n \subset A_n$, $\forall n \in N$

(b) $\tau_n | X_n = id$, $\tilde{\varphi} \circ \tau_n = T_n \circ (\varphi | A_n)$, $\tau_n \circ (\tau_{n+1} | A_n) =$ $= \tau_{n+1} \circ \tau_n = \tau_n$, $\forall n \in N$.

(c) $K + V \subset X$ をみたすコンパクト集合 $K \subset\subset X$ と $V \in \mathcal{V}(E)$ に対して，$K \subset A_n$, $\tau_k(x) \in x + V$, $\forall x \in K$, $\forall k \geqq n$ をみたす $n \in N$ が存在する。

(d) E の任意の有限次元部分空間 F に対して，$\tilde{\varphi}^{-1}(F)\cap A_n$ は，X_F に関してルンゲである。

補題 3.2 (Mujica [11]) E は連続なノルムをもつものとする。(A_n), (τ_n) は補題 3.1 をみたす 2 つの列とする。そのとき，次の性質をみたす 2 つの開集合の列 $C_n\subset B_n\subset A_n$ と列 $(V_n)\subset \mathscr{V}(E)$ が存在する．

(a) $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, $B_n\subset B_{n+1}$, $C_n+V_n\subset C_{n+1}$

(b) $B_n\cap X_k \subset\subset A_n\cap X_k$, $\forall k, n\in \mathbb{N}$.

(c) $\tau_k(C_n)\subset B_n\cap X_k$, $\forall k\geqq n$

E は連続なノルムをもつと仮定し，補題 3.2 における記号をそのまま使用する。K_n をコンパクト集合 $\overline{B_n\cap X_{n+1}}$ の X_{n+1} における正則凸包とする。X_{n+1} はスタイン多様体であるから，K_n は X_{n+1} のコンパクト集合で X_{n+1} においてルンゲである。補題 3.1 の (d) により，K_n は $A_n\cap X_{n+1}$ においてコンパクトである．各 $x\in X$ に対して，

$V(x)=\{\lambda\cdot x\ ;\ \lambda\in C^*\}$, $S(x)=\{e^{i\theta}\cdot x\ ;\ 0\leqq\theta<2\pi\}$

とおく。以下の一連の補題において，E は連続なノルムをもつとする．

補題 3.3. (b_n) を $b_n\in X_n$, $b_n\notin X_{n-1}$, $V(b_n)\subset X/K_n$

をみたす X の点列とする．そのとき，任意の正数列 (λ_n) に対して，X_n における正則関数 f_n の列 (f_n) が存在して，

(3.2) $$f_{n+1} | X_n = f_n ,$$

(3.3) $$|f_{n+1}(x) - f_n \circ \tau_n(x)| < \frac{1}{2^n} , \quad \forall x \in K_n$$

(3.4) $$\mathrm{Re}\, f_n(x) \geqq \lambda_n , \quad \forall x \in S(b_n)$$

をみたす。ただし $\mathrm{Re}\, f_n$ は f_n の実部を表わす。

証明．n に関する帰納法で示す．$n=1$ のときは，明らか．$1 \leqq k \leqq n$ をみたす k に対して，(3.2), (3.3), (3.4) をみたす正則関数 f_k が存在するものと仮定する。Gruman と Kiselman [4] の方法を使って，X_{n+1} 上の正則関数 F で，$|F(x) - f_n \circ \tau_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ $(\forall x \in K_n)$ をみたすものを構成することができる。$T = S(b_{n+1}) \cup K_n$，$V_{n+1} = V(b_{n+1})$ とおき，$\hat{T}$ を T の X_{n+1} における正則凸被とする．スタイン多様体における Oka-Cartan の定理と K_n が X_{n+1} の ルンゲコンパクト集合であることを使うと，

$\hat{T} \subset V_{n+1} \cup K_n$ であることがでてくる。$V_{n+1} \cap K_n = \phi$ であるから，$(\hat{T} \cap V_{n+1}) \cap K_n = \phi$ でかつ $\hat{T} = (\hat{T} \cap V_{n+1}) \cup K_n$ となる。$\hat{T}$ は X_{n+1} のルンゲコンパクト集合であるから，X_{n+1} における $\hat{T} \cap V_{n+1}$ のスタイン近傍 U_1 と K_n のスタイン近傍 U_2 が存在して $U_1 \cap U_2 = \phi$ をみたす。
$L = \sup\{|F(x)| ; x \in S(b_{n+1})\}$ とおく。$U_1 \cap V_{n+1}$ における正則関数 α を $\alpha(\lambda \cdot b_{n+1}) = (L + \lambda_{n+1} + 1)/\lambda\, \xi_{n+1} \circ \hat{\varphi}(b_{n+1})$ ($\lambda \cdot b_{n+1} \in U_1 \cap V_{n+1}$, $\lambda \in C^*$) によって定義する。$U_1 \cap V_{n+1}$ はスタイン多様体 U_1 の閉部分多様体であるから，Oka-Cartan の定理によって，U_1 上の正則関数 A で $A|V_{n+1} \cap U_1 = \alpha$ をみたすものがある。$U_1 \cup U_2$ 上の正則関数 B を $B|U_1 = A$, $B|U_2 = 0$ で定義する。$U_1 \cup U_2$ はルンゲコンパクト集合 $\hat{T}$ の X_{n+1} における近傍であるから，各 $x \in \hat{T}$ に対して $|G(x) - B(x)| < 1/\{2^{n+1}(L' + 1)\}$ をみたす X_{n+1} の正則関数 G が存在する。ここに $L' = \sup\{|\xi_{n+1} \circ \hat{\varphi}(x)| ; x \in S(b_{n+1}) \cup K_n\}$ とする。各 $x \in X_{n+1}$ に対して，$f_{n+1}(x) = F(x) + (\xi_{n+1} \circ \hat{\varphi}(x))\, G(x)$ とおく。このとき，f_{n+1} は X_{n+1} 上の正則関数で (3.2)，(3.3)，(3.4) の条件をみたしている。これは，証明を完了している。

補題 3.4. (ε_n) を $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ をみたす正数列とし，

(f_n) を $f_{n+1}|X_n = f_n$, $|f_{n+1}(x) - f_n \circ \tau_n(x)| < \varepsilon_n$ $(\forall x \in K_n)$ をみたす正則関数 $f_n \in H(X_n)$ の列とする。そのとき，$f|X_n = f_n$ をみたす X における正則関数 f が存在する。

証明. 補題 3.2 により，列 $(f_n \circ \tau_n)$ は各 C_n 上で X 上の正則関数 f に収束する。そのとき，f は $f|X_n = f_n$ をみたしている. これは証明を終っている。

補題 3.3 と補題 3.4 により，次の2つの補題を得ることができる。

補題 3.5. 補題 3.3 の仮定のもとで，各 $n \in \mathbb{N}$ と各 $x \in S(b_n)$ に対して，$\mathrm{Re}\, f(x) \geqq \lambda_n$ をみたす X 上の正則関数 f が存在する。

補題 3.6 F を E の任意の有限次元部分空間とする。そのとき，$H(X)$ から $H(\tilde{\varphi}^{-1}(F))$ への制限写像は全射である。

§ 4. Levi の問題

この章では，シャウダー基底 (e_n) をもつフレッシェ空

間に対して，射影空間 $\mathbb{P}(E)$ 上のリーマン領域 (Ω, φ) で Levi の問題を肯定的に解く．

補題 4-1. Ω が正則領域であれば，Ω は擬凸である．

証明. Noverraz [13] より，証明を得ることができる．

定理 1. E をシャウダー基底をもつフレッシェ空間とし $\mathbb{P}(E)$ を E から導入される射影空間とする。(Ω, φ) は $\mathbb{P}(E)$ 上のリーマン領域で，Ω は φ によって $\mathbb{P}(E)$ と位相同型とならないものとする。そのとき，次の条件は同値である。

(1) Ω は擬凸である。

(2) E の任意の有限次元部分空間 F に対して，$\varphi^{-1}(\mathbb{P}(F))$ はスタイン多様体である。

(3) Ω は正則領域である．

(4) Ω は存在領域である。

証明は E が連続なノルムをもつ場合のみ証明する。一般の場合は，Mujica [11, Lemma 3.2] を使って E が連続なノルムをもつ場合に帰着すればよいのである．

が，やや煩雑である。従ってその証明は別の機会にゆづる。

そこでこの章を通して，Eは連続なノルムをもつものとする．前の章における記号を使う。 $S(K_n)=\{e^{i\theta}\cdot x;\ \theta\in[0,2\pi],\ x\in K_n\}$ とおく。 $S(K_n)$ は $X_{n+1}\cap A_n$ のコンパクト集合である。 $\widehat{S(K_n)}$ を X_{n+1} における $S(K_n)$ の正則凸被とする。 $\widehat{S(K_n)}$ は $A_n\cap X_{n+1}$ のコンパクト部分集合である。 $e^{i\theta}\cdot C_n=\{e^{i\theta}\cdot x;\ x\in C_n\}$ （ $\theta\in R$ ）とおく。各 $\theta\in R$ に対して，

$$(4.1)\qquad (e^{i\theta}\cdot C_n)\cap X_{n+1}\subset S(K_n)\subset\widehat{S(K_n)}$$

$$(4.2)\qquad \tau_n(e^{i\theta}\cdot C_n)\subset S(K_n)\subset\widehat{S(K_n)}$$

が成り立つ。次の一連の補題において，Ω は擬凸であると仮定する．

補題 4.2. X_n における正則関数 f に対して，次の条件をみたす X_{n+k} における正則関数 f_{n+k} が存在する。

(1) $f_n=f$.

(2) $f_{n+k}|X_{n+k-1}=f_{n+k-1}$

(3) 各 $x\in\widehat{S(K_n)}$ に対して，$|f_{n+k}(x)-f_{n+k-1}\circ\tau_{n+k-1}(x)|$

$< 1/2^{n+k}$

証明．Gruman と Kiselman [4] の方法により証明することができる．

注意 4.3．　$F(x) = \lim_{n \to \infty} f_{n+k} \circ \tau_{n+k}(x)$ によって，X 上の正則関数を得ることができる。このとき，$F | X_{n+k} = f_{n+k}$ で，各 $N \geq n$ に対して，$\sup\{|F(x)| ; x \in S(C_N)\} < \infty$ をみたす．ただし $S(C_N) = \{e^{i\theta} \cdot z ; (\theta, z) \in [0, 2\pi) \times C_N\}$ とする。

各 $m \geq 1$ に対して，$D_m = \tilde{Q}(C_m)$ とおく。

補題 4.4．z と w を Ω の相異なる 2 つの点とする．そのとき，$f(z) \neq f(w)$ でかつ，各 $m \geq 1$ に対して $\sup\{|f(p)| ; p \in D_m\} < \infty$ をみたす $f \in H(\Omega)$ が存在する。

証明．$\tilde{Q}(x) = z$, $\tilde{Q}(y) = w$ をみたす点 $x, y \in X$ をとる．$\{x, y, \tau_N(x), \tau_N(y)\} \subset C_N$ で $\tilde{Q}(\tau_N(x)) \neq \tilde{Q}(\tau_N(y))$ となる整数 N が存在する．$V(\tau_N(x))$, $V(\tau_N(y))$ はスタイン多様体 X_N の閉部分多様体である。Oka-Cartan

の定理により，$g|V(\tau_N(x))=2$ で $g|V(\tau_N(y))=0$ をみたす $g\in H(X_N)$ が存在する．補題 4.2，注意 4.3 により，$\sup_{t\in S(C_N)}|G(t)-g\circ\tau_N(t)|\leq\frac{1}{2^N}$ で各 m に対して $\sup\{|G(t)|;t\in S(C_m)\}<\infty$ であるような $G\in H(X)$ が存在する．各 $t\in X$ に対して

$$\hat{G}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(e^{i\theta}\cdot t)\,d\theta$$

とおく。そのとき，$\hat{G}$ は X 上の正則関数で各 $\zeta\in\Omega$ に対して，$\tilde{Q}^{-1}(\zeta)$ 上で定数関数である。$f(\zeta)=\hat{G}\circ\tilde{Q}^{-1}(\zeta)$ $(\zeta\in\Omega)$ とおく．そのとき，f は Ω 上の正則関数で，$\mathrm{Re}\,f(w)\leq\frac{1}{2}<\frac{3}{2}\leq$ $\leq\mathrm{Re}\,f(z)$ をみたす。これは証明を終っている．

$\mathscr{D}=\{D_n\}$ とおき，各 $f\in H(\Omega)$ に対して，$|f|_n=\sup\{|f(x)|;x\in D_n\}$ とおく。$A(\mathscr{D})=\{f\in H(\Omega);|f|_n<\infty,\ \forall n\geq 1\}$ とおく．そのとき，$A(\mathscr{D})$ はフレッシェ空間である．補題 4.4 とベールの定理を使うと次の補題を得ることができる．

補題 4.5　P を Ω の可算部分集合とし，Δ を $P\times P$ の対角集合とする．そのとき，各 $(x,y)\in P\times P-\Delta$ に対し

て，$g(x) \neq g(y)$ であるような $g \in A(\mathcal{D})$ が存在する．

定理 1 の証明．(1) と (2) が同値であることは，補題 2.1 の証明より出てくる．(3) から (1) は補題 4.1 から出てくる。(4) から (3) は明らか。

(1) から (4) を示す．$Q(\varphi_1) \in \varphi(\Omega)$ と仮定してよい。$\mathbb{P}(E)$ は可分であるから，$\mathbb{P}(E)$ の可算稠密集合 D が存在する．$P = \varphi^{-1}(D)$ とおく。そのとき，P は Ω の可算稠密集合である。補題 4.5 より，各 $(x, y) \in P \times P - \Delta$ に対して $g(x) \neq g(y)$ である $g \in A(\mathcal{D})$ が存在する。$L_n = \hat{Q}(K_n)$ とおく．そのとき，$\mathbb{P}(E)$ は距離空間であることを使うと，次の条件をみたす Ω の点列 (a_n) をみいだすことができる。

(i) $a_n \in \Omega \cap \varphi^{-1}(\mathbb{P}(E_n))$，$a_n \notin \Omega \cap \varphi^{-1}(\mathbb{P}(E_{n-1}))$

(ii) $a_n \notin L_n$

(iii) (Ω', φ') を $\mathbb{P}(E)$ 上のリーマン領域で，(Ω, φ) から (Ω', φ') への単射な写像 λ が存在するものとする そのとき，$\lambda(\Omega)$ の Ω' における境界は列 $(\lambda(a_n))$ の集積点である。

$\hat{Q}(b_n) = a_n$ となる X の列 (b_n) が存在する。補題 3.5 により，$\mathrm{Re}\, f(x) \geq n + |g(a_n)|$，${}^{\forall}x \in S(b_n)$ なる X.

の正則関数 f が存在する。そのとき，補題 4.4 と同様の方法で，$\mathrm{Re}\, f^*(a_n) \geq n + |g(a_n)|$ をみたす $f^* \in H(\Omega)$ が存在する。商 $(f^*(x) - f^*(y))/(g(x) - g(y))$ $((x,y) \in P \times P \setminus \Delta)$ の集合は可算集合である。従って $f^*(x) - f^*(y) \neq \theta(g(x) - g(y))$ $((x,y) \in P \times P \setminus \Delta)$ であるような $\theta \in (0,1)$ が存在する。$h = f^* - \theta g$ とおくと，Ω は h の存在領域である。これは証明を終っている。

注意 4.6. E が DFN空間で Ω が $\mathbb{P}(E)$ の単葉領域なら，X は E の領域であって，E 上のあるヒルベルトノルム $\|\cdot\|$ が存在して，X は可分プレヒルベルト空間 $(E, \|\cdot\|)$ の領域とみなすことができることが知られている。故に，Ω は $\mathbb{P}((E, \|\cdot\|))$ の領域とみなせる。よって Ω が DFN空間 E より導入された射影空間の領域であるとき，定理1はそのまま成り立つ。

§5. 応用

この章では E はフレッシェ空間又は DFN 空間とする。E 上の整関数の空間には compact open topology が入っているものとする。$H(E)'$ を E 上の解析的汎関数の空間とする。$H(E)'$ の位相は bounded open topology を入れる。

$u\in H(E)$ が指数型であるとは，E上のある連続な半ノルム α と正数 $k>0$, $c>0$ が存在して，$|u(x)|\leqq C\exp(k\alpha(x))$ $(x\in E)$ が成り立つときをいう。$\mu\in H(E)'$ に対して，フーリエ・ボレル変換を $\hat{\mu}(\xi)=\mu(\exp\xi(\cdot))$ $(\xi\in E'_{\tau_0}\subset H(E))$ によって定義する。ただし E'_{τ_0} は compact open topology をそなえた E の双対空間とする。そのとき，$\hat{\mu}\in \mathrm{Exp}(E'_{\tau_0})$ である。各 $u\in \mathrm{Exp}(E)$ に対して，u の indicator P_u を $P(\xi)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\dfrac{\log|u(t\xi)|}{t}$ $(\xi\in E)$ によって定義する。$\mu\in H(E)'$ の indicator を $P_\mu(\xi)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\dfrac{\log|\hat{\mu}(t\xi)|}{t}$ $(\xi\in E')$ によって定義する。$u\in \mathrm{Exp}(E)$ の indicator P_u の upper regularization $P_u^*(\xi)=\overline{\lim_{\zeta\to\xi}}P_u(\zeta)$ を考える。そのとき，P_u^* は次の性質 (i), (ii) をみたす。

(i) P_u^* は階数 1 の正斉次である。すなわち，各 $t>0$ に対して，$P_u^*(t\xi)=tP_u^*(\xi)$ が成り立つ。

(ii) P_u^* は E 上の多重劣調和関数である。

ここで，この事実の逆を考える。すなわち，上の性質 (i), (ii) をみたす E の関数 f が与えられたとき，$u\in \mathrm{Exp}(E)$ が存在して $f(\xi)=\overline{\lim_{\zeta\to\xi}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\dfrac{\log|u(t\zeta)|}{t}$ をみたすかということである。この問題を E がシャウダー基底をもつフレッシェ空間か又は DFN空間であるとき，肯定的に解くことができる。u の構成において，§4 において論じた

Leviの問題が重要な役割を演ずる。uの構成の概略を述べる。$f \equiv -\infty$なら，$u \equiv 0$とおけばよい。$f \not\equiv -\infty$と仮定する。$\omega_f = \{(\xi,\zeta) \in E \times \mathbb{C}\,;\, f(t\xi) < \mathrm{Re}\, t\zeta$ をみたす $t \in \mathbb{C}$ がある$\}$とおく。Qを$(E\times\mathbb{C})-\{0\}$から$\mathbb{P}(E\times\mathbb{C})$の上への商写像とする。Kiselman [6] により，$\omega_f' = Q(\omega_f)$は$\mathbb{P}(E\times\mathbb{C})$の擬凸領域である．$M = Q(\{(\xi,\zeta)\in\omega_f\,;\,\zeta=0\})$とおく。(§4より) $g' \in H(\omega_f')$で，$g'|M = 0$かつg'の存在領域がω_f'であるようなものが存在する。$g = g'\circ Q$とおき，$\Omega_f = \{\xi \in E\,;\, f(t\xi) < \mathrm{Re}\, t$ をみたす $t \in \mathbb{C}$ がある$\}$とおく．$0 \in \Omega_f$であるから，Ω_fの正則関数$h(\xi) = g(\xi,1)$は0で同次多項式の展開 $h(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\xi)$ をもつ．$u(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P_k(\xi)$とおく。このとき，$u$が求めるものであることが示せるが詳細は略する。

もしEが核型ならば，フーリエ・ボレル変換 $\mu \longrightarrow \hat{\mu}$ は$H(E)'$から$\mathrm{Exp}(E)$への全単射であるから，fはE'のある解析的汎関数のindicatorのupper regularizationでもある。以上まとめると，次の定理を得ることができる。

定理２．fをE上の階数１の正斉次多重劣調和とする。そのとき，fはE上の指数型整関数のindicatorのupper regularizationである。特にEが核型なら，E'上の解析的

汎関数でその indicator の upper regularization が、f に一致するものが存在する。

参考分献

[1] S. Dineen, Complex analysis in locally convex spaces, North-Holland Math. Studies, 57(1981).

[2] R. Fujita, Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, J. Math. Soc. Japan, 15(1963), 443-473.

[3] L. Gruman, The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces, Ill. J. Math., 18(1974), 20-26.

[4] L. Gruman and C. O. Kiselman, Le problème de Levi dans les espaces de Banach à base, C. R. A. Sc. Paris, 274(1972), 821-824.

[5] Y. Hervier, Sur le problème de Levi pour les espaces étalés Banachiques, C. R. Acad. Sc. Paris, 275(1972), 821-824.

[6] C. O. Kiselman, On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals, Acta Math., 23(1967), 1-35.

[7] P. Lelong, Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel, C. R. Acad. Sci. Paris, 260(1965), 1063-1066.

[8] A. Martineau, Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier- Borel, J. Analyse Math., 11(1963), 1-164.

[9] Y. Matsushima and A. Morimoto, Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, Bull. Soc. Math. France, 88(1960), 137-155.

[10] J. Mujica, Complex analysis in Banach spaces, North-Holland Math. Studies, 120(1986).

[11] J. Mujica, Holomorphic approximation in infinite-dimensional Riemann domains, Studia Math., 82(1985), 107-134.

[12] M. Nishihara, On a pseudoconvex domain spread over a complex projective space induced from a complex Banach space with a Schauder basis, J. Math. Soc. Japan, 39(1987)

[13] Ph. Noverraz, Pseudo-Convexité, Convexite Polynomiale et Domainnes d'Holomorphie en Dimension Infinite, North-Holland Math. Studies, 3(1973)

[14] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complex, IX, Domaines finis sans point critique intéreur, Japan. J. Math., 23 (1953), 97-155.

[15] M. Schottenloher, The Levi problem for domains spread over locally convex spaces with a finite dimensional Schauder decomposition, Ann. Inst. Fourier(Grenoble), 26(1976), 207-237.

[16] Y. T. Siu, Pseudoconvexity and the problem of Levi, Bull. Am. Math., Soc., 84(1978), 481-512.

[17] A. Takeuchi, Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, J. Math. Soc. Japan, 16(1964), 159-181.