数理解析研究所講究録
第 706 巻 1989 年 39-47



# Bergman spaces, Bloch functions and martingales

相工大 村本克志 (Katsushi Muramoto)

## 1. 準備と定理

複素平面$\mathbb{C}$の単位円板を$D$, その境界を$\partial D$で表す. $\partial D$上のBMO函数とBMO martingaleの関係は良く知られている. 本稿では$D$上のBMOA (= Bloch) 函数とmartingaleの関係を調べる.

解析函数$f: D \to \mathbb{C}$が$D$上のBloch函数とは

$$\|f\|_B = \sup_{z \in D} (1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

$D$上のBloch函数の全体を$B(D)$で表す. 解析函数$f: D \to \mathbb{C}$が$D$上のBMOA函数とは

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{\Delta:\text{ ball in } D} \left\{ \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta |f(z) - f_\Delta|^2 dA(z) \right\}^{1/2} < \infty,$$

ただし，dA は面積要素，$|\Delta| = \int_\Delta dA$，$f_\Delta = \frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta f(z)\,dA(z)$．D上のBMOA函数全体をBMOA(D)で表す．解析函数 $f$：D → $\mathbb{C}$ に対して次の不等式が成立する．

$$\|f\|_{BMO} \leqq \|f\|_B \leqq 2\sqrt{2}\,\|f\|_{BMO}$$

Coifman, Rochberg and Weiss [3], Muramoto [8].

次に，確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$と$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$を与えておき，この空間上の複素ブラウン運動$(B_t)$が定義されているものとする．$(Z_t^x) = (X_t^x + \sqrt{-1}\,Y_t^x)$が $x \in D$ を出発する $D$ ブラウン運動とは，

$$Z_0^x = x, \qquad d\langle Z^x, Z^x\rangle_t = \frac{1}{2}(1-|Z_t^x|^2)^2 d\langle B, B\rangle_t,$$

詳しく述べると

$$d\langle Z^x, Z^x\rangle_t = d\langle X^x, X^x\rangle_t + d\langle Y^x, Y^x\rangle_t$$

$$d\langle X^x, X^x\rangle_t = d\langle Y^x, Y^x\rangle_t = \frac{1}{2}(1-|Z_t^x|^2)^2\,dt$$

$$d\langle X^x, Y^x\rangle_t = d\langle Y^x, X^x\rangle_t = 0$$

簡単の為に，$(Z_t)=(Z_t^0)$ とする．$C^2$ 函数 $u: D \to \mathbb{R}$ に対して

$$u(Z_t^x)-u(Z_0^x) = \text{local. mart.} + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_D u(Z_s^x)\,ds$$

が成立する。ここで $\Delta_D$ は Laplace-Beltrami operator of Poincaré disk $D$ である。解析函数 $f: D \to \mathbb{C}$ に対しては

$$E[\,|f(Z_t^x)-f(Z_0^x)|^2\,] = E[\int_0^t |f'(Z_s^x)|^2 d\langle Z^x, \overline{Z^x}\rangle_s\,]$$

$$= E[\int_0^t |f'(Z_s^x)|^2 (1-|Z_s^x|^2)^2 ds\,]$$

が成立する（Meyer [7]）。

Holomorphic martingale $(U_t)$ が $\mathcal{B}$-martingale とは，定数 $c \geqq 0$ が存在し，任意の stopping time $T$ に対し

$$E[\,|U_T - U_0|^2\,] \leq c^2\,E[T].$$

上の不等式をみたす最小の $c$ を $\|U\|_{\mathcal{B}}$ で表す．

以上の準備の下で次の定理が成立する．

<u>定理</u>　$f : D \to \mathbb{C}$ を解析函数とする。

(i) 任意の $x \in D$ に対し

$$\| f(Z^x) \|_{\mathcal{B}} \leqq \| f \|_B \left( \leqq 2\sqrt{2} \, \| f \|_{BMO} \right)$$

(ii) ある $x \in D$ に対し

$$\left( \| f \|_{BMO} \leqq \right) \| f \|_B \leqq \| f(Z^x) \|_{\mathcal{B}}$$

## 2. 定理の証明

$x \in D$ と stopping time $T$ を固定しておく。

$$E[\, | f(Z_T^x) - f(Z_0^x) |^2 \,]$$

$$= E\left[ \int_0^T | f'(Z_s^x) |^2 \, d\langle Z^x, Z^x \rangle_s \right]$$

$$\leqq \| f \|_B^2 \, E\left[ \int_0^T \frac{1}{(1 - |Z_s^x|^2)^2} \, d\langle Z^x, Z^x \rangle_s \right]$$

$$\leqq \| f \|_B^2 \, E[\, T \,] .$$

これから(ii)の不等式が得られる。

次に，$0 \leqq a < \|f\|_B$ とする。$x \in D$ が存在し

$$a < (1-|x|^2)|f'(x)|.$$

$T(\xi) = \inf\{t>0 ; |Z_t^x - Z_0^x| \geqq \xi\} \wedge 1$ とおく．このときある $r>0$ に対して

$$E[\int_0^{T(r)} a^2 ds] < E[\int_0^{T(r)} (1-|Z_s^x|^2)^2 |f'(Z_s^x)|^2 ds]$$

$$= E[|f(Z_{T(r)}^x) - f(Z_0^x)|^2]$$

$$\leqq \|f(Z^x)\|_{\mathcal{B}} E[T(r)]$$

$$a^2 E[T(r)] < \|f(Z^x)\|_{\mathcal{B}} E[T(r)]$$

よって(ii)の不等式 $\|f\|_B \leqq \|f(Z^x)\|_{\mathcal{B}}$ が得られ，定理が証明された．

3。$\mathcal{B}$-martingale について

複素ブラウン運動$(B_t)$は$\|B\|_{\mathcal{B}}=\sqrt{2}$の$\mathcal{B}$-martingaleである。実際，stopping time $T$に対し

$$E[\,|B_T - B_0|^2\,] = 2E[T].$$

Holomorphic martingale $(M_t)$が$\mathcal{M}^2$-martingaleとは

$$\|M\|_2 = E[\sup_t |M_t|^2]^{1/2} < \infty .$$

このmartingale全体を$\mathcal{M}^2$で表す。上の例から，$\mathcal{B} \neq \mathcal{M}^2$である。

ところで，解析函数$f: D \to \mathbb{C}$に対し

$$\tilde{f}(z, w) = f(z) \qquad (\,|z|^2 + |w|^2 \quad 1\,)$$

とおく。簡単の為$f(0)=0$とする。また，$(Z_t)$，$(W_t)$を独立なブラウン運動とし，$\mu = \inf\{t>0;\ |Z_t|^2 + |W_t|^2 \geq 1\}$とおく。また，$N_t = \tilde{f}(Z_{t\wedge\mu}, W_{t\wedge\mu})$とおくと

$$\|N\|_2^2 = E[\sup_t |\tilde{f}(Z_{t\wedge\mu}, W_{t\wedge\mu})|^2]$$

$$\leqq 4\,E[|\tilde{f}(Z_\mu, W_\mu)|^2] = 4\,E[|f(Z_\mu)|^2]$$

$f \in B(D)$ であれば

$$\|N\|_2^2 \leqq 4\,E[\mu]\,\|f(Z)\|_{\mathcal{B}}^2$$

すなわち定数 $C \geqq 0$ が存在し，$\|N\|_2 \leqq C\|f(Z)\|_{\mathcal{B}}$ が成立する．この意味で $B(D) \subset \mathcal{M}^2$ が成立する．

一般には $\mathcal{M}^2$ と D 上の Bergman 空間が対応し，martingale の立場から構造を研究できるのではないかと思われるが，今後の仕事に待たなければならない。

## 文献

[1] S. Axler, The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators, Duke Math. J. 53 (1986), 315-332.

[2] A. Bearnstein II, Analytic functions of bounded mean oscillation, Aspect of contemporary complex analysis, Academic Press, New York, 1980, pp. 3-36.

[3] R. R. Coifman, R. Rochberg, and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Annals of Math. 103 (1976), 611-635.

[4] R. Durrett, Brownian motion and martingales in analysis, Wadsworth, Belmont, California, 1984.

[5] Y. Gotoh, On BMO functions on Riemann surface, J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985), 313-339.

[6] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1981.

[7] P. A. Meyer, Géométrie stochastique sans larmes, Sém. de Prob. XV, Lecture Notes in Math., 850, Springer, 1981, pp. 44-102.

[8] K. Muramoto, Harmonic Bloch and BMO functions on the unit ball in several variables, Tokyo J. Math. 11 (1988), 381-386.

[9] W. Rudin, Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^N$, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[10] R. M. Timoney, Bloch functions in several complex variables, I, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 241-267.