数理解析研究所講究録
第 706 巻 1989 年 58-66

無限和の収束と無限積の収束

九大理 佐藤 坦 (HIROSHI SATO)

$\{x_k\}$ を $x_k+1>0$ なる実数列とするとき, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の収束と $\prod_{k=1}^{\infty}(1+x_k)$ の収束は, 一般には同等でない。ただし本稿を通して $\prod_{k=1}^{\infty}(1+x_k)$ が収束するとは $\exists \lim_n \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)>0$ なることを言うものとする。ところが $\{X_k\}$ を $X_k+1>0$, a.s. なるマルチンゲール差列とすると $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ の概収束と $\prod_{k=1}^{\infty}(1+X_k)$ の概収束は同等である。(Sato [4]).

本稿の目的は, Lepingle et Mémin の結果と方法に基いて, $\{X_k\}$ が独立変数列の場合に得られた Sato [3] の結果を精密化し, さらに additive martingale の場合に拡張することにある。

(I) 無限和の収束と無限積の収束

$\{x_k\}$ を $x_k+1>0$ なる実数列で, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ が共に収束するとき, $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+x_k)$, さらには $\prod_{k=1}^{\infty}(1+x_k)$ の収束が導かれる。このことに注意すると Carleson の

定理から次が示される。

THEOREM 1. $\{a_k\}$ を実数列で，$\sum_k a_k^2 < +\infty$，且つ $a_0 \neq -1$ とすると $\sum_k a_k e^{2\pi i k t}$，$\prod_k (1 + a_k e^{2\pi i k t})$ は殆んど全ての $t \in [0, 1]$ について収束する。

マルチンゲール差列について次が知られている。

THEOREM 2. $\{X_k, \mathcal{F}_k\}$ をマルチンゲール差列，即ち $\mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}] = 0$, a.s. で $X_k + 1 > 0$, a.s. となるものとする。このとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ 概収束} \iff \prod_{k=1}^{\infty} (1+X_k) \text{ 概収束}$$

cf. Sato [4]

(II) Lepingle et Mémin の結果

Lepingle et Mémin [2] で次の命題が証明されている。

THEOREM 3 (L. et M. [2], Prop I-5).

$M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$, $T = [0, +\infty)$ を local martingale で $\Delta M_t > -1$, $P(\lim_{t \to \infty} M_t = -\infty) = 0$ となるもの，

$$\mathcal{E}(M)_t \equiv \exp\left[M_t - \frac{1}{2} \langle M^c \rangle_t \right] \prod_{s \le t} (1 + \Delta M_s) e^{-\Delta M_s}$$

とする。このとき

$$\{ \mathcal{E}(M)_\infty > 0 \} = \{ \langle M^c \rangle_\infty + \sum_{0 < s < +\infty} \Delta M_s^2 < +\infty \}$$

THEOREM 4 (L. et M. TH. II-5)

$M=(M_t, \mathcal{F}_t)$, $t\in T$, を quasi-left continuous martingale 且つ $\Delta M_t > -1$, a.s. $\forall t\in T$ とする。

また process

$$Z_t \equiv \langle M^c\rangle_t + \sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2 I_{\{|\Delta M_s|\le 1\}} + \sum_{s\le t}\Delta M_s I_{\{\Delta M_s>1\}}$$

に対して predictable compensator $\{C_t\}$ が存在するものとする。　このとき、

$$\text{ess.sup}\, C_\infty < +\infty \Rightarrow \mathbb{E}[\sup_t \mathcal{E}(M)_t] < +\infty$$

(III)　独立確率変数列の場合

THEOREM 5

$\{X_k\}$ を独立確率変数列で $1+X_k>0$, a.s. 且つ $\mathbb{E}[X_k]=0$ とする。　このとき次の (A)〜(F) は全て同値。

(A)　$\mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n X_k|] < +\infty$

(B)　$\sum_{k=1}^n X_k$ は L^1-収束（一様可積分）

(C)　$\sum_k X_k$ は概収束

(D)　$\prod_k (1+X_k)$ は概収束

(E)　$\prod_k (1+X_k)$ は L^1-収束（一様可積分）

(F)　$\mathbb{E}[\sup_n \prod_{k=1}^n (1+X_k)] < +\infty$

（証明）（B）〜（E）の同値性はSato[3]で示した。
また（A）⇒（B）と（F）⇒（E）は明らか。

（C）⇒（A）コルモゴロフの三級数定理と仮定より

$$\mathbb{E}[X_k : |X_k| \leq 1] + \mathbb{E}[X_k : X_k > 1] = \mathbb{E}[X_k] = 0$$

に注意すると

(1) $\sum_k \mathbb{E}[X_k : X_k > 1] = \sum_k |\mathbb{E}[X_k : |X_k| \leq 1]| < +\infty$

(2) $\sum_k \mathbb{E}[X_k^2 : |X_k| \leq 1] < +\infty$

が示される。

$$X_k = (X_k I_{\{|X_k| \leq 1\}} - \mathbb{E}[X_k I_{\{|X_k| \leq 1\}}]) + X_k I_{\{X_k > 1\}}$$
$$+ \mathbb{E}[X_k I_{\{|X_k| \leq 1\}}] \equiv U_k + V_k + W_k$$

とおくと、$\sum_k U_k$ は L^2-収束，従って

$$\mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n U_k|] \leq \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n U_k|^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq 2(\sum_k \mathbb{E}[U_k^2])^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$$\therefore \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n X_k|] \leq \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n U_k|] + \mathbb{E}[\sup_n \sum_{k=1}^n V_k]$$
$$+ \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n W_k|] \leq \mathbb{E}[\sup_n |\sum_{k=1}^n U_k|]$$
$$+ \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[X_k : X_k > 1] + \sum_{k=1}^\infty |\mathbb{E}[X_k : |X_k| \leq 1]| < +\infty$$

（C）⇒（F）　まず $u \geq -1$ に対して

$$\sqrt{1+u}-1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+u}\,(\sqrt{1+u}-1)^2(\sqrt{1+u}+2)\geqq 0$$

となることから $(1+u)^{\frac{1}{2}}\geqq 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}u^2$, $u\geqq -1$ に注意すると

$$1\geqq \mathbb{E}[(1+X_k)^{\frac{1}{2}}]\geqq 1-\frac{1}{2}\mathbb{E}[X_k^2 : |X_k|\leqq 1]$$

また

$$M_n\equiv\prod_{k=1}^{n}(1+X_k)\ ,\quad \tilde{M}_n\equiv\prod_{k=1}^{n}\frac{(1+X_k)^{\frac{1}{2}}}{\mathbb{E}[(1+X_k)^{\frac{1}{2}}]}$$

は共に平均 1 の正マルチンゲールであり.

$$(M_n)^{\frac{1}{2}}\leqq \tilde{M}_n\leqq \prod_{k=1}^{n}\frac{(1+X_k)^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}\mathbb{E}[X_k^2 : |X_k|\leqq 1]}$$

$$\leqq e^{\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_k^2 : |X_k|\leqq 1]}(M_n)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Doobの不等式と(2)より

$$\mathbb{E}[\sup_n M_n]\leqq \mathbb{E}[\sup_n(\tilde{M}_n)^2]$$

$$\leqq 4\,\mathbb{E}[(\tilde{M}_\infty)^2]$$

$$\leqq e^{2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_k^2 : |X_k|\leqq 1]}\,\mathbb{E}[M_\infty]$$

$$\leqq e^{2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_k^2 : |X_k|\leqq 1]}<+\infty$$

よって(F)が示された。

(IV) 加法過程の場合.

THEOREM 6 $\{X_t : t\in T\}$, $T=[0,+\infty)$ を加法過程

で $\mathbb{E}[X_t]\equiv 0$, 確率連続且つ path は右連続左極限を持つ (càdlàg) ものとし，また $X_0=0$, a.s. さらに

$$\Delta X_t > -1, \quad \forall t\in T, \quad \text{a.s.}$$

を仮定する。 このとき次の条件は全て同値.

(A) $\mathbb{E}[\sup_t |X_t|] < +\infty$

(B) $\{X_t : t\in T\}$ は一様可積分

(C) $\exists X_\infty = \lim_{t\to+\infty} X_t$, a.s.

(D) $\mathcal{E}(X)_\infty > 0$, a.s.

(E) $\{\mathcal{E}(X)_t : t\in T\}$ は一様可積分

(F) $\mathbb{E}[\sup_t \mathcal{E}(X)_t] < +\infty$

(証明)

(A)⇒(B)⇒(C), (F)⇒(E) は明らか.

(E)⇒(D) $\{X_t\}$ が加法過程であることから $\{\mathcal{E}(X)_\infty > 0\}$ は末尾事象. 従って 0-1 法則より $P(\mathcal{E}(X)_\infty > 0) = 0$ または 1. 他方 (E) より $P(\mathcal{E}(X)_\infty > 0) > 0$. 故に $P(\mathcal{E}(X)_\infty > 0) = 1$.

(D)⇒(C) 定義より $\mathcal{E}(X)_t \leq \exp X_t$, $\forall t\in T$, a.s. 従って $P(\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty) \leq P(\mathcal{E}(X)_\infty = 0) = 0$. また仮定より $\Delta X_t > -1$ であるから TH.3 より

$$P\Big(\langle X^c\rangle_\infty + \sum_{0<s<+\infty} (\Delta X_s)^2 < +\infty\Big) = 1.$$

これよりまず $\exists \langle X^c\rangle_\infty = \lim_{t\to\infty} \langle X^c\rangle_t$, a.s.. また.

$\sum_{0<s<+\infty} |\Delta X_s|^2 < +\infty$, a.s. より $\#\{s \in (0,+\infty) : |\Delta X_s| > \frac{1}{2}\}$ $< +\infty$, a.s. であり. $|\Delta X_s| \leq \frac{1}{2}$ であれば

$$-|\Delta X_s|^2 \leq \log(1+\Delta X_s) - \Delta X_s \leq 0$$

である。 $\mathcal{E}(X)$ の定義から

$$\exists \lim_{t\to\infty} X_t = \lim_{t\to\infty} \log \mathcal{E}(X)_t + \frac{1}{2}\langle X^c\rangle_\infty + \sum_{0<s<+\infty} \{\log(1+\Delta X_s) - \Delta X_s\}$$

a.s.

(C) $\Rightarrow$ (A) $\exists X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$, a.s. より. 任意の $\varepsilon > 0$ について $\#\{s \in (0,\infty) : |\Delta X_s| > \varepsilon\} < +\infty$ となることに注意すると. 加法過程の一般論が適用出来て

$$X_t = Y_t + M_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \, I_{[1,+\infty)}(\Delta X_s) - a(t)$$

と分解される。 ここに $\{Y_t : t \in T\}$ は平均 0 の連続な（従って Gaussian）確率過程で $\exists Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y_t$, a.s.. Gaussian であることから. $\mathbb{E}[\sup_t |Y_t|] < +\infty$. 次に $\{M_t : t \in T\}$ は2乗可積分マルチンゲールで. $\mathbb{E}[M_\infty^2] < +\infty$. 従って $\mathbb{E}[\sup_t |M_t|]^2 \leq \mathbb{E}[\sup_t |M_t|^2] \leq 4\,\mathbb{E}[M_\infty^2] < +\infty$. $a(t)$ は連続関数で $\exists a(\infty) = \lim_{t\to\infty} a(t)$. 最後に $\mathbb{E}[\sup_t \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \, I_{[1,\infty)}(\Delta X_s)]$ $= \mathbb{E}[\sum_{0<s<+\infty} \Delta X_s \, I_{[1,\infty)}(\Delta X_s)] = a(\infty) < +\infty$.

(C) $\Rightarrow$ (F) (C) を仮定する。 このとき確率過程

$$Z_t \equiv \langle X^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} |\Delta X_s|^2 I_{(-1,1)}(\Delta X_s) + \sum_{s\leq t} \Delta X_s \, I_{[1,\infty)}(\Delta X_s)$$

の predictable compensator は

$$C_\infty = \mathbb{E}[\gamma_\infty^2] + \mathbb{E}[\sum_{s\le\infty}|\Delta X_s|^2 I_{(-1,1)}(\Delta X_s)]$$
$$+ \mathbb{E}[\sum_{s\le\infty}\Delta X_s\, I_{[1,\infty)}(\Delta X_s)] < +\infty$$

故に定理4が適用出来て、(F) が示される。 //

(V) 応用

定理5を無限直積測度の絶対連続性に適用すると次が得られる。

THEOREM 7　$\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度の列で $\mu_n \sim \nu_n$ (互いに絶対連続), $\forall n \in \mathbb{N}$ とする。このとき $\mu \equiv \Pi_n \mu_n \sim \nu \equiv \Pi_n \nu_n$ であるための必要十分条件は $\mathbb{E}_\mu[\sup_n \prod_{k=1}^n \frac{d\nu_k}{d\mu_k}] < +\infty$ となること。

文　献

[1] K. KITADA and H. SATO : On the absolute continuity of infinite product measure and its convolution. Prob. Theory. Related Fields 81 (1989) 609-627

[2] D. Lepingle et J. Mémin : Sur l'integrabilité uniforme des martingale exponentielles. Z.W.V.G. 42 (1978) 175-203

[3] H. SATO : On the convergence of the product

of independent random variables. J. Math. Kyoto Univ. 27 (1987) 381–385

[4] H. SATO : Convergence of sum and product of a martingale difference sequence. Hiroshima Math. J. 18 (1988) 69–72.