

Walsh 関数 再訪

東北学院大学教養学部 渡利 千波

(Chinami Watari)

序. 一説によると、Walsh 関数はすでに 19 世紀末頃一部の電気工学者に利用されていたとのことであるが、数学者にとっては 1923 年の Walsh [W] に始まるというのが定説であり、理論としての形を成し始めたのはその後の 1932 年の Paley [P] からである。位相群一般論の整備に伴い、1949 年の Fine [F1] の "dyadic group" によって新時代が切開かれ、これが Walsh 関数を扱う標準的な場であることになって現在にいたっている。

ここでは、"dyadic group" に別の角度から着目し、新しい可能性を探ることにしたい。計算機の普及によって bit images の取扱手法が開発されているので、純粹数学を離れた応用の面で利用できるのではないか、との期待もある。

1. Paley による定義 と L^p 理論

Paley [P] は実軸上に次の形で Walsh 関数を構成した。

Rademacher 関数 $\{\phi_k\}$: $\phi_0(x) = \text{sign}(\sin 2\pi x)$,

$$\phi_k(x) = \phi_0(2^k x)$$

Walsh 関数 $\{\psi_n\}$: $\psi_0(x) = 1$.

$n \geq 1$ に対しては n を 2 進法展開して

$$n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$$

($n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 0$) とするとき

$$\psi_n(x) = \phi_{n_1}(x) \cdot \phi_{n_2}(x) \cdot \cdots \cdot \phi_{n_r}(x).$$

Rademacher 関数は、 $[0, 1)$ 上の独立関数系であり、平均が 0 であることから直交している。その事実が Walsh 関数系の直交性を惹き起こしており、Paley はほとんどこの性質だけを利用して、今日彼の名で呼ばれる「分解定理」を証明し、それを中心に $L^p(0, 1)$ の関数の Walsh Fourier 級数の理論を展開している。

(分解定理のの易しい証明については後に述べる。)

Walsh 関数系が有界な正規直交系であることから、 $[0, 1)$ 上の可積分関数を Fourier 展開することが可能になるが、その 2^n 次の部分和に着目すれば、(今日の言葉で martingale をなしていることから、不定積分の微分からも)、もとの関数に平均で、またほとんどすべての点で、収束することがわかる。特に、Fourier 係数がすべて 0 に等しい関数は 0 (と区別できない関数) に限られ、Walsh 関数系は完

備である。

2. Fine の dyadic group.

Paley の定義の背後にある群論的構造に注目して、Walsh 関数系の定義の自然な舞台となる dyadic group を導入したのは Fine [F1] である。彼は、 $\{0,1\}$ の可算直積に Tychonov 位相を入れた コンパクトアーベル群 すなわち dyadic group G を考え、その連続な指標が Walsh 関数である、との解釈を提示した。実軸上では符号関数の積として不連続であった Walsh 関数が、その場を得て連続関数となったことで、近似理論、ひいては (Walsh) Fourier 級数の絶対収束等の議論が可能になった。

後の都合があるので少し内容に立入って紹介しよう。

dyadic group G の元は

$$x = \{x_n\} \quad x_n = 0 \text{ or } 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

(番号が 0 から始まっていることに注意)

という数列である。 G には $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ の

「和」 $z = \{z_n\}$ が

$$z_n = |x_n - y_n| = x_n + y_n \pmod{2} \quad \text{によって定義される。}$$

この演算を (後に明らかになる理由によって) Δ で表すことにしよう。 0 のみから成る数列が G の単位元 0

であり、 G のすべての元は自分自身の逆元である。 G の元の位数が 2 であるから、 G の指標のとりうる値は ± 1 に限られることに注意しておこう。

Fine はこの他、 $\text{dist}(x, y) = \sum |x_n - y_n| 2^{-n}$ によって G の距離づけを行ない、後に他の研究者によって G 上の Lipschitz classes が取扱われる基礎を築いた。この距離についても次節で触れる。

G と $[0, 1)$ との間には、 $[0, 1)$ の元を 2 進法展開して得られる数列を考えることで、(可算個の例外を無視すれば) 1 対 1 の対応がつけられる。この対応のもとで Rademacher 関数は $\phi_k(x) = (-1)^{x_k}$ と表される。

直接の検証で Rademacher 関数に対して

$$\phi_k(x \Delta y) = \phi_k(x) \cdot \phi_k(y)$$

が見られるから、それらの積である Walsh 関数に対しても同じ関係が成立し、Walsh 関数は G の指標であり、「最高位の Rademacher 関数」に注目すれば、連続であることも容易に見られる。逆に、 G の任意の連続指標 χ は単位元の適当な近傍で 1 であるから、 $\chi(x)$ の値は x の最初の有限個の「成分」 x_1, \dots, x_n で定まる。

第 j 成分だけが 1 で、他の成分がすべて 0 である G の元を $x(j)$ と書くことにすれば、 $\chi(x(j)) = -1$ をみ

たす有限個の j に対する Rademacher 関数を x に乗じた関数は恒等的に 1 になる。つまり、 x はこれらの Rademacher 関数の積に他ならない。

3. Walsh 関数の新解釈 あるいは dyadic group の新解釈

dyadic group G の元は 数列

$$x = \{x_n\} \quad x_n = 0 \text{ or } 1, n = 0, 1, \dots$$

であるが、これを非負整数全体の集合 Z_+ の部分集合と同一視することができる。実際には G の元 x に対して Z_+ の部分集合 $x = \{j \mid x_j = 1\}$ を対応させればよい。 G における加法が $P(Z_+)$ (Z_+ の部分集合全体の成す族) における対称差 Δ に対応することも容易に見られる。実はこの理由から前節において G の演算を Δ と書いたのであった。

周知のように (たとえば Halmos [H] 第 1 章の演習問題) 任意の集合 S に対して $P(S)$ は 加法 Δ 、乗法 \cap に関して可換環をなすから、この解釈に立てば、 G にもう 1 つの演算 \cap が考えられることになる。あるいは、dyadic group は Boolean ring に他ならない、といってもよい。目下のところ演算 \cap に関する Walsh 関数の目ぼしい性質が見つかっていないので、単なる憶測の域を出ない

が、 G を "flags space" Z_+ の部分集合全体の Boolean ring と見れば、対称差は "flags space" における演算としては "xor" で、 \cap は同じく "and" で与えられるから、将来において数値計算等に Walsh 関数を使おうとする際に利用できるであろう。

Fine の与えた G の metric にしても、

$$\min \{n : x_n \neq y_n\} = k \quad \text{であるとき} \quad \rho(x, y) = 2^{-k}$$

と定めると、同値な距離が得られるばかりでなく、 $\rho(x, y)$ はいわゆる "ultrametric" 「超距離」で、

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \text{よりも強い三角不等式}$$

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\} \quad \text{が成立する。}$$

超距離も距離の一種であるから、点集合 E の直径

$$\text{diam}(E) = \sup \{\rho(x, y) ; x, y \in E\}$$

が定義されるが、強い三角不等式のために、一見奇妙な事実が成立する。定義から容易に証明されるので、結果だけを二三挙げておく。

任意の 3 角形は 2 等辺 3 角形で、底辺長は等辺長を越えない。

閉球の任意の点はその球の中心で、直径は半径に等しい。

特に、閉球は開集合である。

dyadic group G を Z_+ の部分集合全体の Boolean ring と見る立場では、 G の単位元は Z_+ の空集合に、Rademacher 関数は Z_+ の 1 点から成る集合に対応し、 G の双対群の元である Walsh 関数は Z_+ の有限部分集合に対応する。特に、 ψ_0 は Z_+ の有限部分集合の 1 種である空集合に対応している。

4. dyadic martingales と Paley の分解定理.

G には、 Z_+ の特定の元を含むか含まないかに基づいた、自然な有限分割の列と、それらに伴う atomic σ -fields の列 $\{F_n\}$ が考えられる。

F_0 は trivial σ -field、 $x_0 = 1$ である x と $x_0 = 0$ である x とに分割して ($0 \in Z_+$ を含む部分集合と含まない部分集合に分けて) F_1 、以下同様に定められる。各々の F_n は同じ大きさ (直径) の atoms 2^n 個からなっており、 F_n -atoms 相互間の距離は、それらをともに含むもっとも細かい分割の atom の直径で与えられる。 G の Haar 測度は、これらの atoms にその直径を測度として付与し、一般的な拡張 (Caratheodory 拡張) をすることで再構成される。

直観的には、Cantor の 3 分集合を作る操作を想定するのが便利であろう。各段階で残される "black intervals"

が、その段階に対応する atoms である。ただ、Cantor set の場合と違って、atoms の直径は各段階ごとに (1/3 ではなく) 1/2 になることには注意しておこう。この分割に伴う atomic σ -fields の列 $\{F_n\}$ による martingale が、Paley の分解定理の立役者である。

今日の言葉を利用すれば、Paley の分解定理はつぎのように述べられる。

定理 (Paley)

$f \in L^p(G)$ ($1 < p < \infty$) から $\{F_n\}$ -martingale $\{f_n\}$, その difference sequence $\{\delta_n\}$, square function $S(f)$ と定数列 ± 1 による martingale transform f^* とを作る。

p だけで定まり、 f に無関係な定数 c_1, c_2 が存在して

$$c_1 \|f\|_p \leq \|S(f)\|_p \leq c_2 \|f\|_p$$

$$c_1 \|f\|_p \leq \|f^*\|_p \leq c_2 \|f\|_p.$$

証明の方針 2つの不等式は Khintchin の不等式から同値であるから、後者だけを示せばよい。さらに、 $p = 2$ のときは等号で成立しているから、作用素 $f \rightarrow f^*$ が弱い (1, 1) 型であること、つまり 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda \operatorname{meas}(\{x ; |f^*| > \lambda\}) \leq 3 \|f\|_1$$

であることを示せばよい。

$|f|$ から作った $\{F_n\}$ -martingale $\{h_n\}$ を用いて
 $\tau = \inf \{n ; h_n > \lambda\}$ とおく。 $\{\tau = \infty\}$ 上では
 $|f| \leq \lambda$ である。 $g = f \cdot 1_{\{\tau = \infty\}}$,

(1 は indicator function) $b = f - g$ とおく。

f から f^* を作るのと同じく、 g, b からそれぞれ g^*, b^*
 を作ると、当然 $|f^*| \leq |g^*| + |b^*|$ であるから、

$$\{|f^*| > \lambda\} \subset \{|g^*| > \lambda\} \cup \{|b^*| > 0\}$$

である。右辺第1集合の測度は $g \in L^2(G)$ を利用して
 Chebyshev の不等式で評価され、 $(1/\lambda) \|f\|_1$ 以下である。
 第2の集合は、 b^* を構成する b の martingale difference
 が $\{\tau = \infty\}$ 上ではすべて 0 である（ここに、Paley の着
 目した独立性が効いてくる）ことから、 $\{\tau < \infty\}$ の部分集
 合であり、必要なら Doob の不等式を用いて、その測度が
 $(2/\lambda) \|f\|_1$ 以下であることがわかる。

あとは 1 と 2 の間を Marcinkiewicz 補間し、 $p > 2$ に
 対しては双対性によればよい。

5. 数列の「弱い」極限

dyadic group G を Z_+ の部分集合全体の Boolean ring
 と見る立場からは、 G の双対群が Z_+ の有限部分集合（自

然数 n を 2 進法展開して現われる指数の集合を n で表すことにする) 全体の Boolean ring になるのであった。これを Γ と表そう。 Γ を構成する源の Z_+ には $\text{shift} : k \rightarrow k+1$ があるから、 Γ の元 n を 1 つ固定して (Z_+ の有限部分集合 n を固定して) これを Z_+ における shift で動かす (自然数 n に 2 のべきを掛けて行く) ときの極限、いわば「 n 方向の極限」を考えることができる。また、 Γ に自然に定義されている包含関係に基づく半順序から、この半順序に関する極限が考えられる。どちらも通常の極限概念よりは「弱い」ものである。

ただ、場合によってはこの「弱い」極限が通常の極限と一致することがある。とくに、(Walsh-)Fourier 級数の収束を考えるときには、包含関係に基づいた極限を考えれば十分である。この間の事情を少しだけ調べてみよう。

自然数 n (半角の — 細かな — 文字で表す) と、それを構成する 2 進べきの集合 n (全角の — 幅のある — 文字で表す) とを同一視する。たとえば、 $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$ を、 $13 = \{3, 2, 0\}$ と書くことにする。

定義 数列 $\{a_n\}$ が a に弱い意味で収束するとは、

任意の正の数 ε に対して自然数 N が定まり、 N を含む任意の自然数 m に対して $|a_m - a| < \varepsilon$ が成立する

ようにできることをいう。Hilbert 空間における弱収束の記号を借用して $a_n \rightarrow a$ と書いてもよいかもしれない。

N が多くの元をもてば、それに対応する N もその分だけ大きくなるから、通常の意味で数列 $\{a_n\}$ が a に収束するときは弱い意味でも $\{a_n\}$ は a に収束する。逆の成立しないことは、 $a_2^k = 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), $= 0$ (その他) という数列で見られる。

ところが、0 に近づく項をもつ級数の収束に関しては、弱い極限も通常の極限も同値であることが、つぎのようにして見られる。

級数の項を a_k , 部分和を s_n として $s_n \rightarrow s$ つまり弱い意味で $s_n \rightarrow s$ であるとしよう。

正の数 ε を与える。自然数 N が定まり、 N を含む任意の自然数 m に対して $|s_m - s| < \varepsilon/2$ が成立する。

他方、級数の項は 0 に収束するのであったから、十分大きい自然数 M に対して $|a_k| < \varepsilon/2N$ ($k \geq M$) である。

$L = M \cup N$ とおくと、 $n \geq L$ に対しては $m = n \cup N$ と

して $|s_n - s| \leq |s_n - s_m| + |s_m - s|$ で、

右辺第2項は $N \subset m$ から $|s_m - s| < \varepsilon/2$ 、第1項

は $s_n - s_m$ に含まれる項 a_k の個数が N を超えないこ

とからやはり $< \varepsilon/2$ である。

6. Walsh Fourier 変換に関連して

出発点になった "flags space" Z_+ の代りに、 Z 自体を "flags space" として、その部分集合の作る Boolean ring を解析の場とすれば、Fine [F2] にいう dyadic field (と、その上での Fourier 解析) ができる。ただ、 Z の部分集合全体ではなく、負の部分で「立っている "flags"」が有限個であるような部分集合の族を考えることに注意しておく。この注意があれば、Fine [F2] を翻訳するには困難はないであろう。

7. おわりに

演算 \cap の効用が見つかっていないのが大きな弱点ではあるが、dyadic group を見直して Boolean ring と考えることで、新しい発展の芽が出るのが期待される。Fourier 級数の収束問題では、Walsh 関数系は三角関数 (指数関数) にくらべてはるかに扱いやすいから、道具が 1 つふえれば、さらに有利になるであろう。

引用文献

[F1] Fine, N.J.

On Walsh Functions

Trans. Amer. Math. Soc. 65(1949).

[F2] -----

Generalized Walsh Functions

Trans. Amer. Math. Soc. 69(1950).

[H] Halmos, L. H.

Measure Theory, van Nostrand, New York (1946).

[P] Paley, R.E.A.C.

A Remarkable Series of Orthogonal Functions,

Proc. London Math. Soc.(II) 34(1932).

[W] Walsh, J. L.

A Closed System of Normal Orthogonal Functions,

Amer. Journ. Math. 45(1923).