

Krickeberg分解と \mathcal{H}^p

富山大・理 奥田 優 (Masaru Okuda)

L^1 -有界な martingale X に関する Krickeberg 分解 $X = X^{(1)} - X^{(2)}$ ($X^{(1)}, X^{(2)} \geq 0$) は、よく知られている。特に、ある付帯条件をみたすとき、その分解は一意的である。本稿では、クラス $\mathcal{H}^p \equiv \{X : \text{martingale} \mid X^* \equiv \sup_t |X_t| \in L^p\}$ ($1 \leq p \leq \infty$) について、 $X \in \mathcal{H}^p$ ならば、 $X^{(1)}$ は \mathcal{H}^p に属するか否か? という問題を考察する。

§1. Krickeberg 分解

$(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t))$ を通常の状態をみたす確率系とする。また、 (\mathcal{F}_t) -martingale の right continuity を仮定する。

一般に、2つの process X, Y が

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ for } \forall t \geq 0\}) = 1$$

のとき、 X と Y は indistinguishable というが、Krickeberg 分解での一意性は、この意味である。

定理 (K. Krickeberg (1956))

martingale $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ が L^1 -有界 (i.e., $\sup_t E[|X_t|] < \infty$) であるための必要十分条件は, positive martingale $X^{(1)}, X^{(2)}$ が存在して, $X = X^{(1)} - X^{(2)}$ と分解できることである。

特に、付帯条件

$$(I) \quad \sup_t E[|X_t|] = E[X_0^{(1)}] + E[X_0^{(2)}]$$

をみたす分解は、一意に存在する。

(証明)

必要性は明らか。十分性について述べよう。

$$X_t^{(1)} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n^+ | \mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.}$$

$$X_t^{(2)} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n^- | \mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.}$$

とおくと, $X^{(1)} = (X_t^{(1)}, \mathcal{F}_t)$, $X^{(2)} = (X_t^{(2)}, \mathcal{F}_t)$ は, positive で, 単調収束定理により, $s < t$ ならば, $E[X_t^{(i)} | \mathcal{F}_s] = X_s^{(i)}$ ($i=1,2$) となるから martingale となる。また, 明らかに, $X = X^{(1)} - X^{(2)}$ a.s.。更に, 等式 (I) をみたす。実際に,

$$\begin{aligned} E[X_0^{(1)} + X_0^{(2)}] &= E\left[\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n^+ + X_n^- | \mathcal{F}_0]\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[E[|X_n| | \mathcal{F}_0]] \quad (\because \text{単調収束定理}) \\ &= \sup_t E[|X_t|] \end{aligned}$$

最後に, 分解の一意性を示す。

2つの positive martingale Y, Z が, 条件をみたしていれば,

$$X_n^+ \leq Y_n, \quad X_n^- \leq Z_n$$

が成り立つので, $E[X_n^+ | \mathcal{F}_t] \leq Y_t$, $E[X_n^- | \mathcal{F}_t] \leq Z_t$,
 即ち, $X_t^{(1)} \leq Y_t$ a.s., $X_t^{(2)} \leq Z_t$ a.s. が得る。

ところが仮定により, $E[X_0^{(1)}] = E[Y_0]$, $E[X_0^{(2)}] = E[Z_0]$,
 即ち, $E[X_t^{(1)}] = E[Y_t]$, $E[X_t^{(2)}] = E[Z_t]$ だから, 結局,
 $X_t^{(1)} = Y_t$ a.s., $X_t^{(2)} = Z_t$ a.s. . X の右連続性から,
 $X^{(1)}$ と Y , $X^{(2)}$ と Z は, indistinguishable. \square

L^1 -有界でない martingale の例を述べるのは簡単で,
 たとえば, 1次元の Brownian Motion $B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ が
 そうである。実際に,

$$E[|B_t|] = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$$

従って,

$$\sup_t E[|B_t|] = \infty .$$

§2. クラス \mathcal{H}^p と Krickeberg 分解

$$X \in \mathcal{H}^p \equiv \{X : \text{martingale} \mid X^* \equiv \sup_t |X_t| \in L^p\}$$

($1 \leq p \leq \infty$) ならば, 明らかに L^1 -有界だから, Krickeberg の
 定理により, $X = X^{(1)} - X^{(2)}$; $X^{(1)}, X^{(2)}$: positive martingales
 で, 等式 (I) をみたす分解が一意的に存在する。そこで,

$$(II) \quad X \in \mathcal{H}^p \implies X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathcal{H}^p$$

が成り立つだろうか？ 結果は次の通り。

(i) $1 < p \leq \infty$ のとき： Doob の不等式により，(II) は成り立つ。

(ii) $p = 1$ のとき： (II) は成り立たない。

(i) については明らかだから，(ii) について少し説明する。

もし， $p = 1$ のとき (II) が成り立つとしたら， $\sup_t E[|X_\infty| | \mathcal{F}_t] \in L^1$ ができる。実際に， $X \in \mathcal{H}^1$ ならば 一様可積分であるから，

$$\begin{aligned} X_t &= E[X_\infty | \mathcal{F}_t] \\ &= E[X_\infty^+ | \mathcal{F}_t] - E[X_\infty^- | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

そこで，

$$X_t^{(1)} \equiv E[X_\infty^+ | \mathcal{F}_t], \quad X_t^{(2)} \equiv E[X_\infty^- | \mathcal{F}_t]$$

とおけば，

$X^{(1)}, X^{(2)}$ は， X の Krickeberg 分解 になっていることが容易に分かる。故に，

$$\begin{aligned} E[|X_\infty| | \mathcal{F}_t] &= E[X_\infty^+ | \mathcal{F}_t] + E[X_\infty^- | \mathcal{F}_t] \\ &= X_t^{(1)} + X_t^{(2)} \end{aligned}$$

従って，(II) が成り立てば， $\sup_t E[|X_\infty| | \mathcal{F}_t] \in L^1$.

そこで， $X \in \mathcal{H}^1$ であるが， $\sup_t E[|X_\infty| | \mathcal{F}_t] \notin L^1$ なる例を上げて，(II) が成り立たないことを示そう。必要なら連続なパラメータになおすことができるから，

離散パラメータの場合で反例を与えよう。つまり問題は、

$f \in \mathcal{H}^1$ であるが、 $(f_n) \equiv (E[f_\infty | \mathcal{F}_n]) \notin \mathcal{H}^1$
 となる martingale $f = (f_n)$ の存在 である。

まず、

$$\Omega \equiv (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$P \equiv$ Lebesgue measure on Ω

$$\mathcal{F}_n \equiv \sigma(\mathcal{B}((-\frac{1}{2}, -\frac{1}{n+1}] \cup [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2})) , (-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})) , n \geq 1$$

とし、

$$h(\omega) \equiv \frac{1}{\omega \log^2 |\omega|} , \omega \in \Omega$$

とおく。このとき、 $|h|$ は even ft. だから、

$$\begin{aligned} E[|h|] &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} h(\omega) dP \\ &= 2 [(-\log |\omega|)^{-1}]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\log 2} < \infty \end{aligned}$$

次に、

$$f_n \equiv E[h | \mathcal{F}_n] \quad (n \geq 1)$$

とすると、

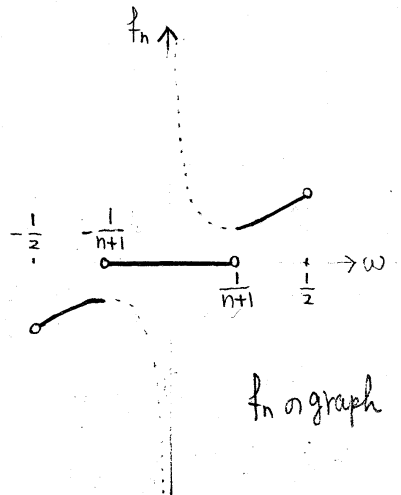
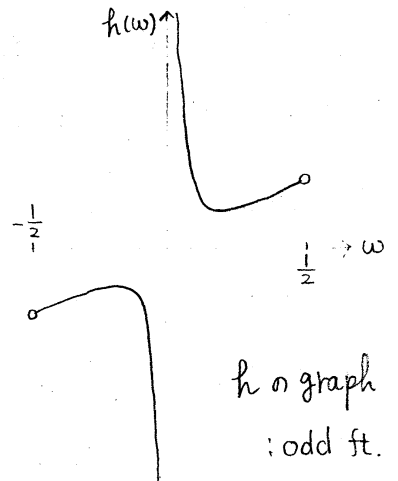
h が continuous ft. であること、

atom $(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ 上では odd ft.

であることに注意すれば、

$$f_n = h \quad \text{on } \Omega \setminus (-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$$

$$f_n = 0 \quad \text{on } (-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$$



従って,

$$f^* = |h| \in L^1 \quad \text{i.e.,} \quad f \in \mathcal{H}^1.$$

他方, (g_n) に関しては, h が continuous ft., $f_\infty = h$ に注意すれば,

$$g_n = |h| \quad \text{on } \Omega \setminus \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right).$$

atom $\left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$ 上では, g_n の定義から,

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{n+1}{2} \int_{-\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}} |h| \, dP \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{\omega \log^2 |\omega|} \, dP \quad (\because |h| : \text{even ft.}) \\ &= (n+1) \times [(-\log |\omega|)^{-1}]_0^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{\log(n+1)} \quad \text{on } \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

ところで,

$$h\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{\log^2(n+1)} \quad \text{だから,} \quad h\left(\frac{1}{n+1}\right) < g_n \quad (n \geq 2)$$

であるので, 各 n ($n \geq 1$) に対して,

$$g^* \geq g_n = \frac{n+1}{\log(n+1)} \quad \text{on } \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right)$$

従って,

$$g^* \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\log(n+1)} \cdot \mathbb{I}_{\left(-\frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+2}\right) \cup \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right)}.$$

故に,

$$\begin{aligned} E[g^*] &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{\log(n+1)} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2) \log(n+1)} \\ &= \infty \end{aligned}$$

$\therefore g^* \notin L^1$ i.e., $g \notin \mathcal{H}^1$.

従って, このことから, $p=1$ のとき (II) は成り立たないことが分かる。以上のことをまとめると, 次の結果が求まる。

命題

$X \in \mathcal{H}^1$ とする。このとき,

$$X^{(1)} \in \mathcal{H}^1 \iff E[|X_{\infty}| \mathcal{F}_t] \in \mathcal{H}^1.$$

なお, BMO については,

$$X \in \text{BMO} \implies E[X_{\infty}^+ | \mathcal{F}_t] \in \text{BMO}$$

が成立する。

参考文献

- [1] R. J. Elliott, Stochastic Calculus and Applications, Springer 1982.
- [2] N. Kazamaki, Krickeberg's decomposition for local martingales, Lecture Note in Math. 258, Springer 1972. 101-104.
- [3] K. Krickeberg, Convergence of martingales with a directed index set, Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 313-337.