数理解析研究所講究録 12
第 707 巻 1989 年 12-17

Hyponormal 作用素と uniformly convexity

上越教育大学　長 宗雄

Abstract. The purpose of this lecture is to show that if an operator T is a hyponormal operator on a uniformly convex space then $co\,\sigma(T) = \overline{V(T)} = V(B(X), T)$.

X を complex Banach space とし. X^* を X の dual space とする. また.

$$\Pi = \{(x, f) \in X \times X^* : \|f\| = f(x) = \|x\| = 1\}$$

とする. $T \in B(X)$ に対して.

$$V(T) = \{f(Tx) : (x, f) \in \Pi\} : \text{spatial numerical range of } T.$$

$$V(B(X), T) = \{F(T) : F \in B(X)^*, \|F\| = F(I) = 1\} : \text{numerical range of } T.$$

と定義する. このとき. 次の性質は. 良く知られている.

$$co\,\sigma(T) \subset \overline{V(T)} \quad , \quad \overline{co}\, V(T) = V(B(X), T).$$

[定義].

(1) T : hermitian $\Leftrightarrow$ $V(T) \subset \mathbb{R}$

(2) T : hyponormal $\Leftrightarrow$ $^\exists H, K$: hermitian ; $T = H + iK$ かつ $i(HK - KH) \geqq 0$

(3) T : normal $\Leftrightarrow$ $^\exists H, K$: hermitian ; $T = H + iK$ かつ $HK = KH$.

ただし. $T \geqq 0$ とは. $V(T) \subset \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : a \geqq 0\}$ のときをいう.

Bonsall and Duncan [3] により. T が normal 作用素であるならば.

任意の Banach space 上で

$$co\,\sigma(T) = \overline{V(T)} = V(B(X), T)$$

が成立する.

[定義]

Banach space X : uniformly convex $\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}, \exists_{\delta>0} ; \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geqq \varepsilon$
$\Rightarrow \|x+y\| \leqq 2(1-\delta)$.

次の2つの定理を示すことが目的である.

定理1. X を uniformly convex とする. $T = H + iK$ を X 上の hyponormal 作用素とする. このとき次の (1), (2) が成立する.

(1). $a \in \sigma(H) \Rightarrow \exists b \in \sigma(K) ; \ a + ib \in \sigma(T)$.

(2). $b' \in \sigma(K) \Rightarrow \exists a' \in \sigma(H) ; \ a' + ib' \in \sigma(T)$.

定理2. X を uniformly convex とする. $T = H + iK$ を X 上の hyponormal 作用素とするとき

$$co\,\sigma(T) = \overline{V(T)} = V(B(X), T)$$

が成立する.

証明のための準備としてまず. Bonsall and Duncan [4] の Lemma 20.3 と Corollary 20.10 より次の lemma を得る.

Lemma 1. H を hermitian とする. $x \in X$; $\|x\| = 1$ とする.

$$Hx = 0 \Rightarrow {}^{\exists} f \in X^* ;\ (x, f) \in \Pi \text{ かつ } H^* f = 0.$$

Lemma 2. X を uniformly convex とする. $T \geqq 0$ とし.

$(x, f) \in \Pi$ に対して. $f(Tx) = 0 \Rightarrow Tx = 0.$

この lemma は. Mattila [9] により. X が strictly c-convex でも成立する.

次に. 複素数の有界数列のなす空間上の Banach limit Lim を1つ fix して. X の有界列のなす空間 $\tilde{X}$ を $\mathrm{Lim}\,\|x_n\|^2 = 0$ となる数列 $\{x_n\}$ の全体 N により $\tilde{X}/N$ を作り. これの completion を X° とする.

norm は.

$$\|\{x_n\} + N\| = (\mathrm{Lim}\,\|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

である. また. $T \in B(X)$ に対して.

$$T^\circ(\{x_n\} + N) = \{Tx_n\} + N$$

となる T° を対応させることにより

$$T \to T^\circ : B(X) \longrightarrow B(X^\circ)$$

は. isometric isomorphism onto a closed subalgebra of $B(X^\circ)$. となり. さらに. de Barra [1] により

(*) $\quad \sigma(T) = \sigma(T^\circ),\quad \sigma_\pi(T) = \sigma_\pi(T^\circ) = \sigma_p(T^\circ)$ かつ $\overline{\mathrm{co}}\, V(T) = \overline{V(T^\circ)}$

であることが知られている. さらに次の lemma が成立する.

Lemma 3. (de Barra [2]).

X: uniformly convex $\rightleftarrows$ X° : uniformly convex.

定理 1 の証明.

(1) について.　$\sigma(H)=\sigma_\pi(H)$ であるので. extension space X° で考えると (*) より. $a\in\sigma_p(H^\circ)$ であるので. $Ker(H^\circ-a)$ は X° の non-zero subspace である.

$x^\circ\in Ker(H^\circ-a)$; $\|x^\circ\|=1$ とすると. Lemma 1 より.

$$^\exists f\in X^{\circ *} \ ;\ \|f\|=f(x^\circ)=1 \text{ かつ } (H^{\circ *}-a)f=0.$$

そこで. $C=i(HK-KH)$ とおくと. 仮定から $C\geqq 0$ また. (*) より $C^\circ\geqq 0$.

$$f(C^\circ x^\circ)=i\,\hat{x}^\circ(K^{\circ *}(H^{\circ *}-a)f)-i\,f(K^\circ(H^\circ-a)x)=0.$$

ここで. Lemma 3 より. X° は uniformly convex であるので

さらに Lemma 2 により

$$C^\circ x^\circ=0$$

である. 従って. $(H^\circ-a)K^\circ x=0$ を得る.

以上のことから. $Ker(H^\circ-a)$ は K° で invariant であることが示される。

従って. (*) により

$$^\exists b\in\mathbb{R},\ ^\exists \underset{\neq 0}{y^\circ}\in Ker(H^\circ-a)\ ;\ K^\circ y^\circ=by^\circ$$

が言える. このことから (*) により.

$$b \in \sigma(K) \quad かつ \quad a+ib \in \sigma(T)$$

となるので (1) が示されたことになる。

(2) についても同様である.

Q.E.D.

定理2の証明.

$co\,\sigma(T) \subset \overline{V(T)} \subset V(B(X), T)$ は. 明らかに成立している.

今. $Re\,\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ とする.

このとき. 定理1より. $\sigma(H) \subset \mathbb{R}^+$ である.

H は hermitian であるので $V(B(X), H) \subset \mathbb{R}^+$ である.

従って. $$Re\,V(B(X), T) \subset \mathbb{R}^+$$

となっている.

また. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \alpha \neq 0$ に対して. $\alpha T + \beta$ は hyponormal であり.

mapping : $z \longrightarrow \alpha z + \beta$ により $V(T) \to V(\alpha T+\beta)$, $\overline{V(T)} \to \overline{V(\alpha T+\beta)}$

は. それぞれ onto に mapping されるので. 上で示した性質と合せると.

$$co\,\sigma(T) = \overline{V(T)} = V(B(X), T)$$

が示されたことになる.

Q.E.D.

References

1. G. de Barra. Some algebras of operators with closed convex numerical range. Proc. R. I. A. 72(1972). 145-154.

2. ——. Generalized limits and uniformly convexity. ibd. 74(1974). 73-77.

3. F. F. Bonsall and J. Duncan. Numerical ranges of operators on normed spaces and elements of normed algebras. Camb. Univ. Press. 1971.

4. ——. Numerical ranges II. Camb. Univ. Press. 1973.

5. M. Chō. Joint spectra of operators on Banach spaces. Glasgow Math. J. 28(1986). 69-72.

6. ——. Joint spectra of commuting normal operators on Banach spaces. Glasgow Math. J. 30(1988). 339-345.

7. ——. Hyponormal operators on uniformly convex spaces. to appear in Acta Sci. Math. (Szeged).

8. K. Mattila. Normal operators and proper boundary points of the spectra of operators on Banach spaces. Math. Dessertations. 19(1978).

9. ——. Complex strict and uniformly convexity and hyponormal operators. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 96(1984). 483-493.

Department of Math.
Joetsu Univ. of Education
Joetsu 943. Japan