数理解析研究所講究録
第 707 巻 1989 年 18-33

BMO Inequality

Fumio Kubo and Shuhei Wada
(Dept.of Math.Toyama Univ.)

In the study of the classical isoperimertic problems, Wirtinger's several inequalities for L^p-function and its derivative, are available. In the first half of the present paper, the authers reviewed the discrete analogues for several Banach space norms of Wirtinger type functional inequalities from the operator theoretic point of view. In the second half, they discussed the functional BMO inequality together with finite dimensional discrete anlogue.

BMO不等式

富山大　理　　久保　文夫(Fumio Kubo)

富山大　理　　和田　州平(Shuhei Wada)

古典的等周問題を研究する上でWirtingerの不等式の様な微分を含むノルム不等式

$$\int f\,dt=0 \quad \Rightarrow \quad \|f\| \leq k\|f'\|$$

は有用である．このような不等式を以後Wirtinger型不等式と呼ぶことにする．

ここでは既に知られているWirtinger型不等式とその離散化を作用素ノルムの観点から見直す．但し離散化された不等式とは有限次元数ベクトル空間での差分を含む不等式

$$x_{n+1}=x_1,\ \sum_1^n x_i=0 \quad \Rightarrow \quad \|(x_i)\| \leq k\|(x_i-x_{i+1})\|$$

を指す．[5]によれば離散化された不等式は

$$x_{n+1}=x_1,\ \sum_1^n x_i=0 \Rightarrow B(x_i-x_{i+1})=(x_i)$$

を満たす行列Bの作用素ノルムを求めれば証明できる．この行列Bを求める方法はHurwitz[4]によるWirtingerの不等式の証明に対応するものである．

次にJohn-Nirenbergによって定義された有界平均振動ノルム(BMO)についてWirtinger型不等式が得られたことを報告する．まずBMOノルムの離散的類推から有限次元数ベクトル空間上のbmoノルムを定義しWirtinger型のbmo不等式を示す．先に紹介した離散化された不等式の証明は特定のセミノルムが持つ平行移動や射影に関する性質に影響される．またbmoも同じ性質を持つことが証明できる．従ってWirtinger型bmo不等式が得られる．この不等式の証明の類似によりWirtinger型BMO不等式が得られる．

1．種々のWirtinger型不等式

一次元トーラス$\mathbb{T}$上の絶対連続関数fとその導関数f'についてのL^pノルム不等式

$$\int_{\mathbb{T}} f\,dt=0 \Rightarrow \|f\|_p \le a\|f'\|_p$$

を考える．この形の不等式を満たす正の数aの最小値はpの値によって変わる．(a_pとおく)　a_pの値を求める方法は次の通りである．([3]，[4]，[8])　$p=2$の場合．周期関数fのFourier変換を$\hat{f}$とおけば　$\hat{f'}(n)=in\hat{f}(n)$，さらにPersevalの等式から

$$\|f\|_2^2=\sum_{n\neq0}|\hat{f}(n)|^2 \le \sum_{n\neq0}|in\hat{f}(n)|^2=\sum_{n\neq0}|\hat{f'}(n)|^2=\|f'\|_2^2$$

従って$\|f\|_2\le\|f'\|_2$である．また$f(t)\equiv\cos t$とおけば

$$\int_{\mathbb{T}} f\,dt = 0 \quad , \quad \|f\|_2 = \|f'\|_2$$

となり $a_2=1$ がわかる． $p=1,\infty$ の場合．

$$\hat{g}(0)=0 \quad , \quad \hat{g}(n)=\frac{1}{in} \quad (n \neq 0)$$

となる連続関数 g があれば

$$f = g * f'$$

となり $\|f\|_p \leq \|g\|_1 \|f'\|_p$ $(p=1,\infty)$ が成立する．実際

$$g(t)=\frac{-1}{\pi} \times \frac{\pi - t}{2}$$

とおくと上の条件を満たす．このとき $\|g\|_1 = \frac{\pi}{2}$ だから

$$\|f\|_p \leq \frac{\pi}{2} \|f'\|_p \quad (p=1,\infty) .$$

また $\int_{\mathbb{T}} f_k\,dt = 0$ となる関数列をうまく選べば

$$\frac{\|f_k\|_1}{\|f'_k\|_1} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

となり $a_1 = a_\infty = \frac{\pi}{2}$ がわかる． a_1 は Feinberg [3]，a_∞ は Northcott [8] による結果である．また先の不等式で $p=2$ の場合は Wirtinger の不等式として知られているが彼が第一発見者かどうかは不明である．([6]) 結果をまとめると次の通りである．

p	a_p	
1	$\frac{\pi}{2}$	Feinberg
2	1	Wirtinger
∞	$\frac{\pi}{2}$	Northcott

次にn次元数ベクトル空間上の差分$(I-S_n)$を含むℓ^pノルム不等式

$$x \in Y_n \Rightarrow \|x\|_p \leq \alpha \|(I-S_n)x\|_p$$

を考える．但しY_nは成分の和が0になるベクトルのつくる空間，S_nはシフト作用素とする．この不等式を満たす正の数αの最小値はpの値によって変わる．(α_pとおく)　まずY_nへの orthogonal projection　P_nに対して

$$B_n(I-S_n)=P_n \quad , \quad B_nP_n=B_n$$

となる作用素B_nを求める．作用素B_nが求まればその作用素ノルム$\|B_n\|_p$を用いて上の不等式は

$$\|B_nx\|_p \leq \|B_n\|_p \|x\|_p$$

と見ることができるからである．まずシフト作用素S_nを対角化することを考える．対角行列W_nを

$$W_n \equiv \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1})$$
$$(\omega \equiv e^{\frac{2\pi i}{n}})$$

とおくと次の等式(Heisenbergの交換関係)が成立する．

$$S_n^k W_n^\ell = \omega^{k\ell} W_n^\ell S_n^k$$

このとき[7]によれば

$$F_n \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1, & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}^*$$

に対し

$$F_n S_n F_n^* = W_n$$

となる．これでS_nは対角化できた．従って明らかに

$$F_n(I-S_n)F_n^* = I-W_n = \mathrm{diag}(0, 1-\omega, 1-\omega^2, \cdots, 1-\omega^{n-1}).$$

また作用素P_nをF_nを用いて対角化すれば

$$F_n P_n F_n^* = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1).$$

これらの事実からB_nは次の様に定義すればよいことがわかる.

$$B_n \equiv F_n^* \mathrm{diag}\left(0, \frac{1}{1-\omega}, \frac{1}{1-\omega^2}, \cdots, \frac{1}{1-\omega^{n-1}}\right) F_n$$

上式の右辺を計算すると

$$B_n = \frac{1}{2n}\begin{pmatrix} n-1 & n-3 & \cdots & -(n-3) & -(n-1) \\ -(n-1) & n-1 & \cdots & -(n-5) & -(n-3) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n-3 \\ n-3 & \cdots & \cdots & -(n-1) & n-1 \end{pmatrix}$$

となる．<u>$p=2$ の場合．</u> B_nの定義から明らかに

$$\|B_n\|_2 = \left|\frac{1}{1-\omega}\right| = \left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}$$

また任意の作用素 A に対し

$$\|A\|_p^{(r)} \equiv \max\{\|Ax\|_p : \|x\| \leq 1,\ x \in Y\}$$

とおくと明らかに $\|A\|_p^{(r)} \leq \|A\|_p$．さらに $\|P_n\|_2 \leq 1$ より

$$\|B_n x\|_2 = \|B_n P_n x\|_2 \leq \|B_n\|_2^{(r)} \|P_n x\|_2 \leq \|B_n\|_2^{(r)} \|x\|_2$$

となり $\|B_n\|_2 = \|B_n\|_2^{(r)}$ が成立する．従って

$$\alpha_2 = \|B_n\|_2 = \|B_n\|_2^{(r)} = \left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}.$$

<u>$p=1,\infty$ の場合．</u> よく知られた公式から

$$\|B_n\|_1 = \|B_n\|_\infty = \frac{1}{2n}\sum^{n}|n+1-2i|$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n}{4} & (n\text{が偶数}) \\[2ex] \dfrac{n^2-1}{4n} & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$

となる．ここで

$$x_0 \equiv \begin{cases} (1,1,\cdots,1,\underset{\frac{n+2}{2}}{\overset{\frown}{-1}},-1,\cdots,-1) & (n\text{が偶数}) \\[2ex] (1,1,\cdots,1,\underset{\frac{n+1}{2}}{\overset{\frown}{0}},-1,-1,\cdots,-1) & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$

とおくと

$$\|B_n x_0\|_\infty = \|B_n\|_\infty \|x_0\|_\infty$$

$$x_0 \equiv \begin{cases} (1,0,0,\cdots,0,\overset{\frac{n+2}{2}}{-1},0,0,\cdots,0) & (nが偶数) \\ (1,0,0,\cdots,0,\overset{\frac{n+3}{2}}{-1},0,0,\cdots,0) & (nが奇数) \end{cases}$$

とおくと

$$\|B_n x_0\|_1 = \|B_n\|_1 \|x_0\|_1 \quad .$$

従って

$$\|B_n\|_1 = \|B_n\|_1^{(r)} \quad , \quad \|B_n\|_\infty = \|B_n\|_\infty^{(r)}$$

となり

$$d_1 = d_\infty = \frac{1}{2n}\sum_1^n |n+1-2i|$$

が成立する．d_1, d_∞ は Fan, Taussky, Todd [1], d_2 は Schoenberg [9] による結果である．まとめると次の通りである．

p	d_p	
1	$\frac{1}{2n}\sum_1^n \lvert n+1-2i\rvert$	Fan, Taussky, Todd
2	$(2\sin\frac{\pi}{n})^{-1}$	Schoenberg
∞	$\frac{1}{2n}\sum_1^n \lvert n+1-2i\rvert$	Fan, Taussky, Todd

2．BMO不等式

一次元トーラス$\mathbb{T}$上の関数fと$\mathbb{T}$上の区間Iに対してfのBMOノルムを

$$\|f\|_{BMO} \equiv \sup_{I \neq \phi} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I|\, dt$$

と定義する．ここで$|I|$はIの長さ，f_IはIにおけるfの平均$\left(\frac{1}{|I|}\int_I f\,dt\right)$とする．BMOノルムは次の性質を持つ．

(i) $\|f\|_{BMO} = 0 \iff f$は定数

(ii) $(T_s f)(t) \equiv f(t+s)$とおけば$\|T_s f\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$
(translationについて不変)

性質(ii)が見られるのは別にBMOノルムに限らないが後の議論で重要な役割を果すのであえて挙げることにした．n次元数ベクトル空間上のℓ^pノルムは(ii)に対応する性質としてシフト作用素について不変であることが挙げられる．BMOノルムはその定義から関数の振動を表す量と考えられる．そこでn次元数ベクトル空間上のセミノルムで振動，ちらばりの度合いを表す量としてbmoを定義する．

$$\|(x_i)\|_{bmo} \equiv \max\left\{\frac{1}{|I|}\sum_{i\in I}|x_i - x_I| : \phi \neq I \subset \{1, 2, \cdots n\}\right\}.$$

ここで$|I|$はIに含まれる元の個数，x_IはIにおける平均$\left(\frac{1}{|I|}\sum_{i\in I} x_i\right)$とする．また$\{1, 2, \cdots, n\}$の空でない部分集合

$I=\{i(1), i(2), \cdots, i(r)\}$ $(1\le i(1)<i(2)<\cdots<i(r)\le n)$ に対して

$$E_I(x_i)_{i=1}^n \equiv (x_{i(k)})_{k=1}^r$$

$$P_I \equiv P_r = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & r-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & r-1 \end{pmatrix} \in M_r(\mathbb{C})$$

と定義すれば

$$\|x\|_{bmo} \equiv \max_{I \neq \phi} \|\tfrac{1}{|I|} P_I E_I x\|_1$$

とかくことができる．但しここで $\|\cdot\|_1$ は r 次元数ベクトル空間上の ℓ^1 ノルムを表す． bmo ノルムは次の性質を持つ．

(i) $\|(x_i)\|_{bmo}=0 \iff x_1=x_2=\cdots=x_n$

(ii) $\|S_n x\|_{bmo}=\|x\|_{bmo}$ $(\forall x)$.

従って $\|\cdot\|_{bmo}$ は振動を量る目安となり得る．上記の性質(i)(ii)を用いて次の定理が示される．

定理１．任意の n 次元数ベクトル x に対して

$$\|x\|_{bmo} \le d\|(I-S_n)x\|_{bmo}$$

を満たす正の数 d の最小値は $\frac{1}{2n}\sum_{i\in I}|n+1-2i|$ $(=\|B_n\|_\infty)$ である.

定理１を証明する前に準備として次の補題を記す．

補題　線型空間 V 上のセミノルム $\|\cdot\|$ に対して

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in V : \sum_1^n x_i = 0$$
$$\Rightarrow \max_i \|x_i\| \le d \max_i \|x_i - x_{i+1}\|$$

となる正の数 k の最小値は $\frac{1}{2n}\sum_1^n |n+1-2i|$ $(=\|B_n\|_\infty)$ である．

証明は先に示した ℓ^∞ ノルム不等式

$x_1, x_2, \cdots, x_n : \sum_1^n x_i = 0 \Rightarrow \max_i |x_i| \le \|B_n\|_\infty \max_i |x_i - x_{i+1}|$

の証明と全く同じ．

(定理1の証明)　任意のベクトル $x\ (\in Y_n)$ に対し

$$y_i = S_n^i x$$

とおくと $\sum_1^n y_i = 0$．また bmo ノルムのシフト不変性から

$$\|y_i\|_{bmo} = \|S_n^i x\|_{bmo} = \|x\|_{bmo}.$$

さらに

$$\begin{aligned} \|y_i - y_{i+1}\|_{bmo} &= \|S_n^i x - S_n^{i+1} x\|_{bmo} \\ &= \|S_n^i (I - S_n) x\|_{bmo} \\ &= \|(I - S_n) x\|_{bmo}. \end{aligned}$$

従って

$$\max_i \|y_i\|_{bmo} = \|x\|_{bmo}$$
$$\max_i \|y_i - y_{i+1}\|_{bmo} = \|(I - S_n) x\|_{bmo}$$

としてさしつかえない．ここで先の補題を使えば

$$\begin{aligned}\|x\|_{bmo} &= \max_i \|y_i\|_{bmo} \\ &\leq \|B_n\|_\infty \max_i \|y_i - y_{i+1}\|_{bmo} \\ &= \|B_n\|_\infty \, \|(I-S_n)x\|_{bmo}\end{aligned}$$

また bmo ノルムの性質(i)から

$$\|P_n x\|_{bmo} = \|x\|_{bmo} \quad ({}^\forall x)$$

となるので

$$\|x\|_{bmo} \leq \|B_n\|_\infty \|(I-S_n)x\|_{bmo} \; ({}^\forall x)$$

が成立する．以上で $\alpha_{bmo} \leq \|B_n\|_\infty$ がわかる．次に

$$x_0 \equiv \begin{cases} (1, 1, \cdots, \underset{\frac{n+1}{2}}{\underset{\frown}{1}}, -1, -1, \cdots, -1) & (n\text{が奇数}) \\ (1, 1, \cdots, \underset{\frac{n}{2}}{\underset{\frown}{1}}, -1, -1, \cdots, -1) & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$

とおけば $\|B_n x_0\|_{bmo} \geq \|B_n\|_\infty \|x_0\|_{bmo}$ となることを示す．

n 以下の自然数の集合 I ($|I| = m$) に対し座標の置換 π と自然数 k $(\leq n)$ が存在し

$$\pi E_I x_0 = (1, 1, \cdots, 1, \underset{m-k+1}{\underset{\frown}{-1}}, -1, \cdots, \underset{m}{\underset{\frown}{-1}}) \quad .$$

このとき

$$\begin{aligned}\pi P_I E_I x_0 &= P_I \pi E_I x_0 \\ &= \frac{2}{m}(k, k, \cdots, k, \underset{m-k+1}{\underset{\frown}{-(m-k)}}, -(m-k), \cdots, -(m-k)).\end{aligned}$$

従って

$$\|x_0\|_{bmo} = \max_{I \neq \phi} \|\frac{1}{|I|} P_I E_I x_0\|_1 = \max_{m,k} \frac{2(m-k)k}{m^2} = 1$$

となる．また I ($|I|=2$) をうまく選べば

$$E_I B_n x_0 \equiv \begin{cases} \frac{1}{4n}(n^2-1,\ -n^2+1) & (nが奇数) \\ \frac{1}{4n}(n^2,\ -n^2) & (nが偶数) \end{cases}$$

となるから

$$\frac{1}{2}\|P_I E_I B_n x_0\|_1 = \|B_n\|_\infty$$

つまり

$$\|B_n x_0\|_{bmo} \geq \|B_n\|_\infty$$

これで定理1は示された．

上記の様に不等式

$$\|x\|_{bmo} \leq \|B_n\|_\infty \|(I-S_n)x\|_{bmo}$$

は ℓ^∞不等式のベクトル化を用いて導くことができる．従って

トーラス上の関数とその導関数のBMO不等式

$$\|f\|_{BMO} \leq a\|f'\|_{BMO}$$

を次の補題を用いて証明することを試みる．

補題　Banach空間に値をとる $\mathbb{T}$上絶対連続関数 f について

$$\int_{\mathbb{T}} f\,dt = 0 \Rightarrow \sup\|f(t)\| \leq a \sup\|f'(t)\|$$

を満たす正の数 a の最小値は $\frac{\pi}{2}$ である．

(証明略)

定理2. $\mathbb{T}$上の絶対連続関数fについて

$$\|f\|_{BMO} \leq \frac{\pi}{2}\|f'\|_{BMO}$$

(証明)

$$g \equiv f - \frac{1}{|\mathbb{T}|}\int_{\mathbb{T}} f\, dt$$

とおくと $\|g\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$, $g' = f'$. 従って $\int_{\mathbb{T}} f\, dt = 0$ として十分.
関数 f ($\int_{\mathbb{T}} f\, dt = 0$) に対し写像$\Phi$を translation T_s ($(T_s f)(t) \equiv f(t+s)$)
を用いて

$$\Phi(s) \equiv T_s f$$

と定義する. BMOノルムの translation 不変性から

$$\|\Phi(s)\|_{BMO} = \|T_s f\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

$$\|\Phi'(s)\|_{BMO} = \|\tfrac{d}{ds}T_s f\|_{BMO} = \|f'\|_{BMO}\ .$$

また $\int_{\mathbb{T}} \Phi\, ds = 0$ より補題が使えて

$$\sup\|\Phi(s)\|_{BMO} \leq \frac{\pi}{2} \sup\|\Phi'(s)\|_{BMO}$$

従って

$$\|f\|_{BMO} \leq \frac{\pi}{2}\|f'\|_{BMO}\quad .$$

3. 拡張

bmoノルムの性質(i)(ii)を満たすn次元数ベクトル空間上の(セミ)ノルムはbmoばかりではない. 例として次の(セミ)ノルム $\|\cdot\|_{bmo_p}$ が挙げられる.

$$\|x\|_{bmo_p} \equiv \max_{I \neq \phi} \left\| \frac{1}{|I|} P_I E_I x \right\|_p \quad (p \geq 1)$$

$p=\infty$ のとき右辺を計算すると

$$4\|(x_i)\|_{bmo_\infty} = \max |x_i - x_j|$$

となる．これは通常振動量ないしは振幅と呼ばれる量である．

また bmo_p ノルムについても定理1と同じ結果が得られる．

定理3．任意の n 次元数ベクトル x に対して

$$\|x\|_{bmo_p} \leq \alpha \|(I - S_n)x\|_{bmo_p}$$

を満たす正の数 α の最小値は $\frac{1}{2n}\sum_{1}^{n}|n+1-2i|$ $(=\|B_n\|_\infty)$ である．

（証明は定理1とほぼ同じ）

参　考　文　献

[1] K. Fan, O. Taussky, and J. Todd, Discrete analogues of inequalities of Wirtinger, Monatsh. Math. 59 (1955), 73-79.

[2] C. Fefferman, and E.M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math., 129 (1972), 137-193.

[3] J.M. Feinberg, Some Wirtinger-like inequalities, SIAM Jour. Math. Anal., 10 (1979) 1258-1271.

[4] A. Hurwitz, Sur le probleme des isoperimetres, C. R. Acad. Sci., 132 (1901), 401-403.

[5] F. Kubo and S. Wada, Cyclic Inequalities and Discrete Fourier Analysis, to appear in Linear Multilinear Alg.

[6] D. S. Mitrinović, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[7] M. Nakamura and H. Umegaki, Heisenberg's commutation relation and the Plancherel theorem, Proc. Japan Acad., 37 (1961), 239-242.

[8] D. G. Northcott, Some inequalities between periodic functions and their derivatives, J. London Math. Soc., 14 (1939), 198-202.

[9] I. J. Schoenberg, The finite Fourier Series and elementary geometry, Amer. Math. Monthly, 57 (1950), 390-404.