数理解析研究所講究録
第707巻 1989年 34-47

有界作用素の商に関する二，三の性質について

富山大教育　泉野佐一 (Saichi Izumino)

1．序．A，B は Hilbert 空間 H 上の二つの有界（線形）作用素で，核条件 $\ker A \subset \ker B$ を満たしているとする。このとき，有界作用素の商 $[B/A]$ を $Ax \to Bx$，$x \in H$ によって定義する。H の直積 $H \times H$ の中に $G(A,B) := \{(Ax, Bx);\ x \in H\}$ を考えたとき，これは一つのグラフとなるが，$[B/A]$ はこれに対応した写像として定義してもよい。作用素の商の研究は，すでに Dixmier [2] により J-operator の名で，また，最近では Kaufman [9],[10],[11] により（semiclosed operator とも呼ばれて）行なわれており，その特徴ずけなどがなされている。作用素商の集合は，

(1) 閉作用素を含む，

(2) 和，積について閉じている．

などはよく知られていることである。Fujii - Makimura [5] では，ある（非有界）作用素環の閉作用素をその有界な作用素

の商で表すことが論じられている。

作用素商の和や積とともに，作用素商の共役や閉包をまた作用素の商で表す問題も考えられる。これに関連しては拙稿[6]，[7]において，いくつかの事柄を示した。

本報告では，作用素商 $[B/A]$ が必ずしも densely defined でないとき，その共役に相当する $[B/A]^{\times}$ を適当に定義し，その性質などを調べることにしたい。

2. X－共役． A の値域 AH が dense のとき，$[B/A]$ の共役 $[B/A]^*$ は，グラフ

$$G(A,B)^* = \{(x,y);\ \langle Bu,x\rangle = \langle Au,y\rangle,\ u\in H\}$$

に対応して定まる写像と定義するのが自然である。明らかに，$(x,y)\in G(A,B)^*$ と $B^*x = A^*y$ は同値であり，したがって，$[B/A]^*$ の定義域は $B^{*(-1)}(A^*H) := \{x;\ B^*x \in A^*H\}$ とわかる。いま，$R=(A^*A+B^*B)^{\frac{1}{2}}$ として，方程式

$$XR = A, \qquad YR = B$$

を考える。Douglas の majorization 定理[3]（$RH\supset A^*H$，$RH\supset B^*H$ に適用）より，有界作用素の解 X，Y を得る。$\ker X\supset \ker R$，$\ker Y\supset\ker R$ の条件をつけると，解は unique となり，これを $X=A_c$，$Y=B_c$ とかくことにする。この A_c，B_c に関して次のことがわかっている。（証明略）

命題 2.1([6]). $\overline{(RH)}$ の上への直交射影を P_R として，

(1) $A_e^*A_e + B_e^*B_e = P_R$.

(2) $B^{*(-1)}(A^*H) = (1 - B_eB_e^*)^{\frac{1}{2}}H$.

そこで，$A_* = (1 - B_eB_e^*)^{\frac{1}{2}}$ とおくと，$[B/A]^*$ の定義域は A_*H と書ける。いま，方程式

$$A^*Z = B^*A_*$$

を考える。$\ker Z^* \supset \ker A$ の条件の下で，これは unique な有界作用素解をもつ。この解を $Z = B_\#$ とかくことにする。$x = A_*u$ として，$B^*x = A^*y$ から $y = B_\# u$ を得る。これから

命題 2.2([6]). AH が dense ならば

$$[B/A]^* = [B_\#/A_*] = [V_eB_e^*/(1 - B_eB_e^*)^{\frac{1}{2}}]$$

ここで，V_e は A_e の極分解 $A_e = V_e(A_e^*A_e)^{\frac{1}{2}}$ より得られる partial isometry である。

上の命題で，$B_\# = V_eB_e^*$ が成り立つが，これは，

$$\begin{aligned} A^*B_\# &= B^*A_* = RB_e^*(1 - B_eB_e^*)^{\frac{1}{2}} = R(P_R - B_e^*B_e)^{\frac{1}{2}}B_e^* \\ &= R(A_e^*A_e)^{\frac{1}{2}}B_e^* = RA_e^*V_eB_e^* = A^*V_e^*B_e^* \end{aligned}$$

なることより，$\ker A^* = \{0\}$ から得られる。

実は，AH が dense と仮定しなくても，$B_\#$ は定まる。したがって，作用素の商 $[B_\#/A_*]$ はいつでも定義できる。

そこで

$$[B/A]^{\times} = [B_{\#}/A_{*}]$$

とおいて，これを $[B/A]$ の $\times$－共役などと呼ぶことにする。AH の dense なことを仮定しなくても，$B_{\#} = V_c B_e^{*}$ は依然として成り立つことも確められる。$\times$－共役について，次のことが成り立つ。

定理 2.3 (1) $[B/A]^{\times\times} = [B_{\#}^{*}/(1-B_{\#}B_{\#}^{*})^{\frac{1}{2}}]$.

(2) $[B/A]^{\times\times\times} = [B_{\#}/(1-B_{\#}^{*}B_{\#})^{\frac{1}{2}}]$.

(3) $[B/A]^{\times\times\times\times} = [B/A]^{\times\times}$.

略証 (1) $[B/A]^{\times\times} = [B_{\#}/A_{*}]^{\times}$ であり，また命題 2.1 (1) から $(A_{*})_e = A_{*}$，$(B_{\#})_e = B_{\#}$ を得ることができる。これから，$(A_{*})_{*} = (1-B_{\#}B_{\#}^{*})^{\frac{1}{2}}$，$(B_{\#})_{\#} = B_{\#}^{*}$ を示すことができる。(2)，(3) も同様にして得られる。

Kaufman [9] では，densely defined なる閉作用素 T は pure contraction C，つまり，$\|C\| \leqq 1$，$\ker(1-C^{*}C) = \{0\}$ なる作用素 C を用いて，$T = [C/(1-C^{*}C)^{\frac{1}{2}}]$ ([10] では，$T = C(1-C^{*}C)^{-\frac{1}{2}}$ と表現）と書けることを示している。定理 2.3 の $B_{\#}$，$B_{\#}^{*}$ はちょうど pure contraction なることは容易にわかり，したがって，(1) は $[B/A]^{\times\times}$ の Kaufman の表現に他ならない。

二つの作用素商 $[B/A]$, $[D/C]$ に対して

$$G(A,B) \supset G(C,D)$$

となるとき, $[B/A] \supset [D/C]$ と書き, $[B/A]$ は $[D/C]$ の拡張と呼ぶことにする。このとき, 次の補題を作っておくと都合がよい。

補題 2.4. (1) $[Y/X] \subset [B/A] \Leftrightarrow$ 有界作用素 Z が存在し, $X = AZ$, $Y = BZ$.

(2) $[Y/X] \subset [B/A]^{\times} \Leftrightarrow B^*X = A^*Y$, $YH \subset (AH)^-$.

略証. (1) 一般に $G(E,F) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}(H \times H)$, つまり $H \times H$ の作用素 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ の値域. このことから Douglas の majorization 定理を用いて (1) の有界作用素 Z の存在を示すことができる。(2) では, $B^*X = A^*Y$ から $XH \subset B^{*(-1)}(A^*H) = A_*H$. そこで, $X = A_*Z$ とおくと, $B^*A_*Z = A^*Y$. $B^*A_* = A^*B_\#$ から, $A^*(Y - B_\# Z) = 0$, これから $Y = B_\# Z$ を得て, $[Y/X] \subset [B_\#/A_*]$. 逆方向の証明は容易である。

$[B/A] \subset [B/A]^{\times}$ となるとき, $[B/A]$ はいわば $\times$ー対称ということになる。これについては, 補題 2.4 から次のことがわかる。

系 2.5. $[B/A] \subset [B/A]^{\times} \Leftrightarrow B^*A = A^*B$, $BH \subset (AH)^-$.

作用素商 $[B/A]$ が closable とは，

$\{u_n\} \subset H$, $\quad Au_n \to 0$, $\quad Bu_n \to v$ ならば $v = 0$

と定義する（[12], P.165）．このとき，

定理 2.6. 次の (1)—(3) は同値である．

(1) $[B/A]$ は closable.

(2) $[B/A]^{\times\times} \supset [B/A]$.

(3) $[B/A]^{\times\times\times} = [B/A]^{\times}$.

略証．(1) は [7] の Lemma 2.3 によれば $\ker A_e \subset \ker B_e$ と同値．これはまた

$$(2.1) \qquad B_e B_e^* = B_\#^* B_\# \left(= B_e V_e^* V_e B_e^*\right)$$

と同値．定理 2.3 より (2.1) と (3) は同値となることがわかる。(2) については，まず (1) の仮定のもとに，(2.1) と補題 2.4 (2) から，$[B/A] \subset [B_\#/A_*]^{\times} = [B/A]^{\times\times}$ を得る。また，(2) の仮定から，補題 2.4 (1) を用いて，$A = (1 - B_\# B_\#^*)^{\frac{1}{2}} Z$, $B = B_\#^* Z$ とおいて，$Au_n \to 0$, $Bu_n \to v$ から $v = 0$ を導き $[B/A]$ の closable なことを知る．

$(A_* H)^-$ の上への直交射影を P_* とおく。このとき，

$$(2.2) \qquad P_* = 1 - B_e B_e^* + B_\#^* B_\#$$

なることは知られている [7]。したがって，先の定理 2.6

の(1)−(3)と $P_* = 1$ とは同値とわかる。

P_* を用いて，作用素商 $[B/A]$ は次のように，その closable part $[P_*B/A]$ と singular part $[P_*^\perp B/A]$ との和に分解される：

$$[B/A] = [P_*B/A] + [P_*^\perp B/A]$$

これは，Jorgensen 分解 [8] である．$[P_*B/A]$ が実際 closable なることは少しの計算で直接示すこともできる。$[P_*^\perp B/A]$ が singular であるとは，$A^*H \cap (P_*^\perp B)^*H = \{0\}$ ということである。

さて，$[B/A]$ の closable part についてであるが，(2.2) より，$P_*B = B_e V_e^* V_e R$ と表される．さらに

$$[P_*B/A] \subset [B_e V_e^* V_e / A_e] = [B_\#^* / (A_e A_e^*)^{\frac{1}{2}}]$$
$$= [B_\#^* / (V_e V_e^* - B_\# B_\#^*)^{\frac{1}{2}}]$$

これから，次の系 2.7，2.8 を得る。（$[B/A]^-$ は $[B/A]$ の閉包。）

系 2.7. AH が dense ならば，

(1) $[P_*B/A] \subset [B_\#^*/(1 - B_\# B_\#^*)^{\frac{1}{2}}] = [B/A]^{\times\times}_{\cdot}$

(2) $[P_*B/A]^- = [B/A]^{\times\times}_{\cdot}$

系 2.8. $[B/A]$ が closable ならば，

(1) $[B/A]^- = [B_e/A_e]$.

(2) $[B_e/A_e]^\times = [B_\# / (1 - B_\#^* B_\#)^{\frac{1}{2}}]$.

3. 作用素商の積に関連した結果．二つの作用素商の積 $[B/A][D/C]$ は合成

$$Cx \longrightarrow Dx = Ay \rightarrow By$$

によって定められる．このとき，$x \in D^{-1}(AH)$ となることから，積 $[B/A][D/C]$ の定義域は $CD^{-1}(AH)$ となる．まず，$D^{-1}(AH)$ が一つの有界作用素の値域として表されることは先に $B^{*(-1)}(A^*H)$ が有界作用素 A_* の値域となることを示したと殆んど同様の方法で示される；$S = (AA^* + DD^*)^{\frac{1}{2}}$ とし，方程式 $SX = A$, $SY = D$ の $\ker X^* \supset \ker S$, $\ker Y^* \supset \ker S$ を満たす unique な解を X, Y と(同じ文字で)表せば，$D^{-1}(AH) = (1 - Y^*Y)^{\frac{1}{2}} H$ となる。そこでいま便宜上，$M = (1 - Y^*Y)^{\frac{1}{2}}$ とおけば，結局 $D^{-1}(AH) = MH$．さらに，方程式 $AZ = DM$ の $\ker Z^* \supset \ker A$ を満たす(unique な)解を $Z = N$ とおく。こうすると，$x = Mu$ に対して，$y = Nu$ を得て，

$$Cx = CMu \rightarrow DMu = ANu \rightarrow BNu = By.$$

したがって，

$$[B/A][D/C] = [BN/CM]$$

と表すことができる。

作用素商 $[B/A]$ が特に $B^*A = A^*B \geqq 0$ を満たすとき，$[B/A]$ は X－正値とでも呼ぼう。このとき，

命題 3.1. $[B/A]^{\times}[B/A]$, $[B/A][B/A]^{\times}$ は $\times$－正値.

略証 たとえば, $[B_\#/A_*][B/A]=[B_\# N/AM]$ とする。ここに, M, N は $MH=B^{-1}(A_*H)$, $BM=A_*N$ を満たすように選んだ有界作用素である. このとき,

$$(B_\# N)^*(AM)=N^*B_\#^*AM=N^*A_*BM=N^*A_*^2N\geqq 0.$$

次に $[B/A]^{\times}$ のある意味での正規性に関する定理として,

定理 3.2. $[B/A]$ が closable のとき, 次の(1)－(3)は同値である。

(1) $[B/A]^{\times\times}[B/A]^{\times}=[B/A]^{\times}[B/A]^{\times\times}$.

(2) $B_\#^*B_\# = B_\#B_\#^*$.

(3) $A_eA_e^* + B_eB_e^* = V_eV_e^*$.

略証 定理 2.3, 2.6 と積の公式から

$$[B/A]^{\times\times}[B/A]^{\times}=[B_\#^*B_\#/(1-B_\#^*B_\#)]$$
$$[B/A]^{\times}[B/A]^{\times\times}=[B_\#B_\#^*/(1-B_\#B_\#^*)]$$

とわかる. これをもとに, (1) と (2) の同値なることはすぐ出る。(2) と (3) の同値なることは, 命題 2.1 (1) から得られる等式

$$A_eA_e^* + B_\#B_\#^* = V_e(A_e^*A_e+B_e^*B_e)V_e^* = V_eV_e^*$$

から示すことができる。

$[B/A]$ が閉作用素で, densely defined ならば $[B/A]^{\times\times} = [B/A]$, $[B/A]^{\times} = [B/A]^{*}$ であるから, 定理3.2 は $[B/A]$ が正規となるための同値条件に他ならない。

二つの作用素 S, T の積の共役作用素に関して, Schechter によって得られた次の定理がある.

Schechter の定理 [13]. S, T を H 上の densely defined な閉作用素とする。もし TH が closed, かつ $\dim (TH)^{\perp} < \infty$ ならば, 積 ST は densely defined で, $(ST)^{*} = T^{*}S^{*}$.

そこでいま, 同様のことを $[B/A]$, $[D/C]$ の積について考えてみたい。条件は少し弱いものを仮定する.

定理 3.3. $D^{-1}(AH)$ は dense とする。このとき,

(1) $([B/A][D/C])^{\times} \supset [D/C]^{\times}[B/A]^{\times}$.

(2) DH が closed, かつ $\dim (DH)^{\perp} < \infty$ ならば

$$([B/A][D/C])^{\times} = [D/C]^{\times}[B/A]^{\times}.$$

略証 (1) では, まず $D^{-1}(AH) = MH$, $AN = DM$ となるような M, N を用いて, 左辺を $[BN/CM]^{\times}$ と表しておく。また, 右辺 $[D/C]^{\times}[B/A]^{\times} = [D_{\#}/C_{*}][B_{\#}/A_{*}]$ についても, やはり, $B_{\#}^{-1}(C_{*}H) = VH$, $C_{*}\overline{W} = DV$ となる $\overline{V}, \overline{W}$ を用い

て，$[D_\# \mathbb{W}/A_* \mathbb{V}]$ と表しておく。(1)を示すには，$[BN/CM]^\times \supset [D_\# \mathbb{W}/A_* \mathbb{V}]$ をいえばよいわけであるが，これには，補題 2.4 (2) から，

(i) $(BN)^*(A_* \mathbb{V}) = (CM)^*(D_\# \mathbb{W})$.

(ii) $D_\# \mathbb{W} H \subset (CMH)^-$.

の二つをいえばよい。(i) は計算よりすぐわかる。(ii) は仮定の $\ker M = \{0\}$，と $\ker C^* \subset \ker D_\#$ から得られる。

次に (2) の証明であるが，(1)が示されたので

(3.1) $\quad [BN/CM]^\times \subset [D_\# \mathbb{W}/A_* \mathbb{V}]$

を示せばよいことになる。これには

(3.2) $\quad (BN)^{*(-1)}((CM)^* H) \subset A_* \mathbb{V} H \left(= A_* B_\#^{-1}(C_* H)\right)$

をいえばよい。(3.2) を示す前に

(3.3) $\quad (BN)^{*(-1)}((CM)^* H) \subset A_* H$

を示してかかろう。そこでまず，仮定より DH が closed ということから，$\mathcal{N} = A^{-1}(DH)$ が閉部分空間になること，また，その直交補空間 $\mathcal{N}^\perp$ は $\dim (DH)^\perp < \infty$ を用いて，有限次元空間となることに注意しよう。また，さらに

$$
\begin{aligned}
AH &= A\mathcal{N} + A\mathcal{N}^\perp = AH \cap DH + A\mathcal{N}^\perp \\
&= ANH + A\mathcal{N}^\perp \\
&= \{A(Nu+v) ;\ u \in H,\ v \in \mathcal{N}^\perp\}
\end{aligned}
$$

とわかる。また，核条件 $\ker A \subset \ker B$ より BH について

$$BH = \{ B(Nu+v) ;\ u \in H,\ v \in \mathcal{N}^{\perp} \}$$

となる。さて，(3.3) を示すため，任意の $g \in (BN)^{*(-1)}((CM)^{*}H)$ に対して，まず

$$\text{(iii)}\quad |\langle BNu, g\rangle| \leqq K_1 \|ANu\|, \qquad \forall u \in H.$$

を示そう。ここで，K_1 は u に無関係な正の定数である。これを示すには，しかし

$$(BN)^{*(-1)}((CM)^{*}H) \subset (BN)^{*(-1)}((CD^{+}DM)^{*}H)$$

という関係を（証明なしで）用いる。D^{+} は D の一般逆作用素である。（DH が closed ということから有界作用素 D^{+} の存在は保証される [1, P.321]。）そこで，$(BN)^{*}g \in (CD^{+}DM)^{*}H$ ということから，ある $h \in H$ を選んで，$(BN)^{*}g = (CD^{+}DM)^{*}h$.

したがって，

$$\begin{aligned} |\langle BNu, g\rangle| &= |\langle u, (BN)^{*}g\rangle| = |\langle u, (CD^{+}DM)^{*}h\rangle| \\ &= |\langle CD^{+}DMu, h\rangle| \leqq \|h\|\,\|CD^{+}\|\,\|DMu\| \\ &= K_1 \|ANu\| \qquad (\forall u \in H) \end{aligned}$$

また，$A\mathcal{N}^{\perp}$ は有限次元空間ということから，$K_2 > 0$ を選んで

$$\text{(iv)}\quad |\langle Bv, g\rangle| \leqq K_2 \|Av\|, \quad \forall v \in \mathcal{N}^{\perp}$$

とできる。よって，(iii), (iv) より，$K_3 > 0$ を選んで

$$|\langle BNu + Bv, g\rangle| \leqq K_3 (\|ANu\| + \|Av\|)$$

とできる。$(ANH)^{-} \cap A\mathcal{N}^{\perp} = \{0\}$ となることから，ある $K_4 > 0$ を選んで

$$\|ANu\| + \|Av\| \leq K_4 \|ANu+Av\|.$$

よって，ある $K_5>0$ を用いて

$$|\langle B(Nu+v), g\rangle| \leq K_5 \|A(Nu+v)\|$$

これは，任意の x に対して，$|\langle Bx, g\rangle| \leq K_5\|Ax\|$ ということであり，$B^*g \in A^*H$．よって，$g\in A_*H$ となり(3.3)が示された。そこで(3.2)を示すため，$g = A_*k$ ($g\in (BN)^{*(-1)}((CM)^*H)$) とおく．すると

$$(BN)^*g = (BN)^*A_*k = N^*B^*A_*k = N^*A^*B_\# k = M^*D^*B_\# k.$$

一方，$l\in H$ を適当にとり，$(BN)^*g = (CM)^*l$ とおけば，$M^*D^*B_\# k = M^*C^*l$．$\ker M = \ker M^* = \{0\}$ から，$D^*B_\# k = C^*l$．よって，$B_\# k \in D^{*(-1)}(C^*H) = C_*H$，あるいは，$B_\# k\in B_\# H\cap C_*H$ とかける。これから，

$$B^*A_*k = A^*B_\# k \in A^*(B_\# H\cap C_*H)$$

したがって，$g = A_*k \in B^{*(-1)}A^*(B_\# H\cap C_*H)$．さらに少し計算すれば，$B^{*(-1)}A^*(B_\# H\cap C_*H) \subset A_*B_\#^{-1}(C_*H)$ ということもわかる．これで(3.2)が示される。

REFERENCES

[1] A. Ben-Israel and T. N. Greville, Generalized Inverses: Theory and Applications, Wiley, New York, 1974.

[2] J. Dixmier, Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, Bull. Soc. Math. France 77 (1949), 11-101.

[3] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 413-416.

[4] P. A. Fillmore and J. P. Williams, On operator ranges, Advances in Math. 7 (1971), 254-281.

[5] M. Fujii and K. Makimura, Von Neumann's regularization as a non-commutative Steinitz theory, Math. Japonica 29 (1984), 283-285.

[6] S. Izumino, Quotients of bounded operators, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[7] S. Izumino, Decomposition of quotients of bounded operators with respect to closability and Lebesgue-type decomposition of positive operators, to appear in Hokkaido Math. J.

[8] P. E. T. Jorgensen, Unbounded operators: Perturbations and commutativity problems, J. Functional Anal. 39 (1980), 281-307.

[9] W. E. Kaufman, Representing a closed operator as a quotient of continuous operators, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 531-534.

[10] W. E. Kaufman. Semiclosed operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 76 (1979), 67-73.

[11] W. E. Kaufman, Closed operators and pure contractions in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 83-87.

[12] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1966.

[13] M. Schechter, The conjugate of a product of operators, J. Functional Anal. 6 (1970), 26-28.