数理解析研究所講究録
第707巻 1989年 48-56

クラス $\mathbb{A}$ の縮小作用素について

札幌医大　高橋勝利　(Katsutoshi Takahashi)

$\mathcal{H}$ を可分Hilbert空間，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上有界線形作用素全体，$\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ を trace class 作用素全体とする．$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ の dual である：$\langle T, K \rangle = \mathrm{tr}(TK)$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $K \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対し $\mathcal{A}_T$ を T で生成される weak* closed algebra とする．$Q_T = \mathcal{C}_1(\mathcal{H})/{}^{\perp}\mathcal{A}_T$ は $\mathcal{A}_T$ の predual である．$\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathcal{H})$ を Sz.Nagy-Foias functional calculus $\Phi_T : H^\infty \to \mathcal{A}_T$, $f \mapsto f(T)$ が isometric である（このとき Φ_T は onto, weak* homeomorphism）縮小作用素 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ の全体とし，$\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_1(\mathcal{H})$ を任意の $[L]_T \in Q_T$ に対し $[L]_T = [x \otimes y]_T$ なる $x, y \in \mathcal{H}$ が存在するような $T \in \mathbb{A}$ の全体とする．ここで $K \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ に対し $[K]_T \in Q_T$ は K の同値類，$x \otimes y$ は $(x \otimes y)(z) = (z, y)x$, $z \in \mathcal{H}$, で定義される rank one 作用素である．S. Brown はクラス $\mathbb{A}$ のある条件をもつ subnormal 作用素が $\mathbb{A}_1$ であることを示して subnormal 作用素の不変部分空間の存在を証明した．以後クラス $\mathbb{A}$ の一般の作用素への Brown の方法の拡張が研究され

てきた．ここでは Chevreau－Exner－Pearcy の analytic invariant subspace についての結果を紹介する．

定義．$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$：縮小作用素，$\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}\,T$（＝T－不変部分空間全体）とする．coanalytic function $e: \mathbb{D} = \{|\lambda|<1\} \to \mathcal{M}$ が $e(\lambda) \in \ker(T|\mathcal{M}-\lambda)^*$, $\lambda \in \mathbb{D}$, となるようにとれるとき，$\mathcal{M}$ は analytic であるといい，さらに $e(\lambda)$ が $\bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}} e(\lambda) = \mathcal{M}$ もみたすとき，$\mathcal{M}$ は full analytic であるという．

命題1．$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$：縮小作用素，もし dense set $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$ が存在し，各 $x \in \mathcal{D}$ に対して $\mathcal{M}_x = \bigvee_{n\geq 0} T^n x$ が full analytic invariant subspace for T ならば，T は reflexive である．(i.e. $\{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\,;\, \mathrm{Lat}\,T \subseteq \mathrm{Lat}\,A\} = T$ で生成される weak op. top. で closed な subalgebra)

証明．$\mathcal{H}$ が full analytic のときを示す．$e(\lambda)$：coanalytic on $\mathbb{D}$ $T^*e(\lambda) = \bar{\lambda}\, e(\lambda)$, $\bigvee_{\lambda} e(\lambda) = \mathcal{H}$ とする．$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$：$\mathrm{Lat}\,A \supseteq \mathrm{Lat}\,T$ とする．$\lambda \in \{\lambda\,;\, e(\lambda) \neq 0\}$ に対し，$\{\alpha e(\lambda)\,;\, \alpha \in \mathbb{C}\} \in \mathrm{Lat}\,T^* \subseteq \mathrm{Lat}\,A^*$ より，$A^*e(\lambda) = \overline{f(\lambda)}\, e(\lambda)$ となる $f(\lambda) \in \mathbb{C}$ が一意に存在．このとき，$f(\lambda)$ は $\{\lambda : e(\lambda) \neq 0\}$ で bounded analytic である．$\{\lambda : e(\lambda) = 0\}$ は isolated point から成るから $f \in H^\infty$，そして $A^*e(\lambda) = f(T)^* e(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{D})$ $\therefore A^* = f(T)^*$. $\therefore A \in \mathcal{A}_T$

$T \in \mathbb{A}$，$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し $[C_0^{(n)}]_T \in Q_T$ を

$$\langle h(T), [C_0^{(n)}]_T \rangle = \int_0^{2\pi} h(e^{it})\, e^{-int} \frac{dt}{2\pi}, \quad h \in H^\infty$$

で定義する.

命題2. $T\in\mathbb{A}$, 次の条件(i)〜(iv)をみたす $x\in\mathcal{H}$, $\{t_j\}_{j=0,1,2,\cdots}$, $\{s_j\}_{j=0,1,2,\cdots}\subseteq\mathcal{H}$ が存在するとする：(i) $[C_0^{(j)}]_T=[x\otimes t_j]_T$ $(j=0,1,2,\cdots)$, (ii) $\overline{\lim_{j\to\infty}}\|t_j\|^{\frac{1}{j}}\leq 1$, (iii) $[x\otimes s_j]_T\in$ algebraic linear span of $\{[C_0^{(j)}]_T : j=0,1,2,\cdots\}$ $(j=0,1,2,\cdots)$, (iv) $\bigvee_{j\geq 0} s_j=\mathcal{H}$. このとき $\mathcal{M}_x$ は full analytic.

証明. $\tilde{t}_j=P_{\mathcal{M}_x}t_j$ ($P_{\mathcal{M}_x}$ は $\mathcal{M}_x$ への projection), $e(\lambda)=\sum_0^\infty \bar{\lambda}^j\tilde{t}_j$ とする. (ii) より, $e(\lambda)$ は $\mathbb{D}$ で coanalytic. (i) より, $e(\lambda)\in\ker(T|\mathcal{M}_x-\lambda)^*$. (i), (iii), (iv) より $\mathcal{M}_x=\bigvee_{\lambda\in\mathbb{D}}e(\lambda)$ が出る

定義. $T\in\mathbb{A}$, $\theta\geq 0$ とする. $\mathcal{E}_\theta(T)$ を次の条件(a),(b),(c)をみたす $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq\mathcal{H}$ が存在するような $[L]_T\in Q_T$ の全体とする：(a) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|[L]_T-[x_n\otimes y_n]_T\|\leq\theta$, (b) $\|x_n\|,\|y_n\|\leq 1$, (c) $\|[x_n\otimes w]_T\|\to 0$, $\forall w\in\mathcal{H}$.

定理1. $T\in\mathbb{A}$, ある θ, γ $(0\leq\theta<\gamma)$ に対して $\mathcal{E}_\theta(T)$ の closed convex hull が $\{[L]_T : \|[L]_T\|\leq\gamma\}$ を含むならば, (1) T は命題1の仮定をみたす, (2) 任意の $\{[L_n]_T\}\subseteq Q_T$ に対し $[L_n]_T=[x\otimes t_n]_T$ $(n=1,2,\cdots)$ となる $x\in\mathcal{H}$, $\{t_n\}\subseteq\mathcal{H}$ が存在する.

$T\in\mathbb{A}$, $\lambda\in\mathbb{D}$ に対し $[C_\lambda]_T\in Q_T$ を $\langle h(T),[C_\lambda]_T\rangle=h(\lambda)$, $h\in H^\infty$, で定義する. $\Lambda(\subseteq\mathbb{D})$ が dominating for $\mathbb{D}$ (i.e. a.e. z(∈単位円周) が Λ の nontangential limit point)

であるとき，closed convex hull of $\{\alpha[C_\lambda]_T ; \lambda\in\Lambda, |\alpha|=1\}$ は Q_T の閉単位球である．

補題1．$T\in \mathbb{A}$ とする．

(1) $\lambda\in\mathbb{D}\setminus\mathcal{F}_+(T)$，ここで $\mathcal{F}_+(T)=\{\lambda ; T-\lambda$ は Fredholm, $\mathrm{ind}(T-\lambda)>0\}$，ならば $[C_\lambda]_T\in\mathcal{E}_0(T)$

(2) $T\in C_{\cdot 0}$ (i.e. $T^{*n}\to 0$ strongly) のとき，任意の $\lambda\in\mathbb{D}$ に対し $[C_\lambda]_T\in\mathcal{E}_0(T)$.

これより次の定理が得られる．

定理2．$T\in\mathbb{A}$，次の条件の1つが成り立つとき，T は定理1の仮定をみたす ($\theta=0$, $\gamma=1$ に対して)：

(1) $\mathbb{D}\setminus\mathcal{F}_+(T)$: dominating for $\mathbb{D}$, (2) $T\in C_{\cdot 0}$

(3) $T\in C_{1\cdot}$ (i.e. $\|T^n x\|\not\to 0$ for $\forall x\neq 0$),

(4) T : hyponormal, (5) $\sigma_p(T^*)=\mathbb{D}$.

補題2．$T\in C_{\cdot 0}$，$x_n\to 0$ weakly ならば，任意の $y\in\mathcal{H}$ に対し $\|[x_n\otimes y]_T\|\to 0$.

証明．$T=P_{\mathcal{H}}S|\mathcal{H}$，$S$: unilateral shift on $\mathcal{K}(\supseteq\mathcal{H})$.

$\|[x_n\otimes y]_T\|=\|[x_n\otimes y]_S\|$, $\|[x_n\otimes y]_S\|\le\|x_n\|\|y\|$,

$(1-S^NS^{*N})y\to y$ $(N\to\infty)$ だから，$N=1,2,\cdots$ に対し，

$\|[x_n\otimes(1-S^NS^{*N})y]_S\|\to 0$ $(n\to\infty)$ を示せばよい．

$\|[x_n\otimes(1-S^NS^{*N})y]_S\|=(f_n(S)x_n, (1-S^NS^{*N})y)$ $(\exists f_n\in H^\infty, \|f_n\|=1)$

$\le\sum_{j=0}^{N-1}|\hat{f}_n(j)||(S^jx_n, (1-S^NS^{*N})y)|$ （ここで $\hat{f}_n(j)$ は f_n の第 j Fourier 係数）

$\leq \|f_n\|_\infty \sum_{j=0}^{N-1} |(S^j x_n, (1-S^N S^{*N})y)| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$

補題1の証明. (1) $\lambda \in \mathbb{D}$ に対し, $T_\lambda = (T-\lambda)(1-\bar{\lambda}T)^{-1}$ とすると,

$T_\lambda \in A1$, $\|[C_0]_{T_\lambda} - [x \otimes y]_{T_\lambda}\| = \|[C_\lambda]_T - [x \otimes y]_T\|$, $\|[x \otimes y]_{T_\lambda}\| = \|[x \otimes y]_T\|$

だから, $\lambda = 0$ としてよい. $[C_0]_T \in \mathcal{E}_0(T)$ を示すために,

$\|[C_0]_T - [x_n \otimes x_n]_T\| \to 0$ かつ $\|[x_n \otimes y]_T\| \to 0$ ($\forall y \in \mathcal{H}$) をみたす

orthonormal sequence $\{x_n\}$ の存在を示す.

(i) $0 \in \sigma_e(T)$ のとき; $\exists \{x_n\}$: orthonormal s.t.

① $\|T x_n\| \to 0$ or ② $\|T^* x_n\| \to 0$

①のとき, $f \in H^\infty$ に対し,

$\langle f(T), [C_0]_T - [x_n \otimes x_n]_T \rangle = ((f(0) - f(T))x_n, x_n) = -(g(T)Tx_n, x_n)$

$\langle f(T), [x_n \otimes y]_T \rangle = (f(0)x_n, y) + (g(T)Tx_n, y)$, $y \in \mathcal{H}$

ここで, $f(z) - f(0) = z g(z)$, $g \in H^\infty$, $\|g\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$

$\therefore \|[C_0]_T - [x_n \otimes x_n]_T\| \leq 2\|Tx_n\|\|x_n\| \to 0$

$\|[x_n \otimes y]_T\| \leq |(x_n, y)| + 2\|Tx_n\|\|y\| \to 0$

$\{x_n\}$ は求めるもの.

②のとき, $\|[C_0]_T - [x_n \otimes x_n]_T\| \leq 2\|x_n\|\|T^* x_n\| \to 0$

V : T の isometric dilation, $V = S \oplus R$ on $\mathcal{K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{R}$;

S : shift, R : unitary. $T^* x_n \to 0$ より $P_{\mathcal{R}} x_n \to 0$

$f \in H^\infty$ に対し,
$y \in \mathcal{H}$

$\langle f(T), [x_n \otimes y]_T \rangle = (f(S \oplus R)x_n, y) = (f(S)P_{\mathcal{M}}x_n, P_{\mathcal{M}}y) + (f(R)P_{\mathcal{R}}x_n, y)$

$\therefore \|[x_n \otimes y]_T\| \leq \|[P_{\mathcal{M}}x_n \otimes P_{\mathcal{M}}y]_S\| + \|P_{\mathcal{R}}x_n\|\|y\| \to 0$ ($\because$ 補題2).

iii) $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_e(T)$ のとき； T : Fredholm, $\mathrm{ind}\, T \leqq 0$

① $T^n \mathcal{H} \supsetneqq T^{n+1}\mathcal{H}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ のとき，$T^n\mathcal{H} \ominus T^{n+1}\mathcal{H} \ni x_n$，

$\|x_n\| = 1$ $(n=1,2,\cdots)$ をとる．このとき，

$\langle T^k, [x_n \otimes x_n]_T \rangle = \begin{cases} 0 & (k \geqq 1) \\ 1 & (k=0) \end{cases}$ だから $[C_0]_T = [x_n \otimes x_n]_T$

また $P_R x_n = 0$ $(\because T^{*n+1} x_n = 0)$ $\therefore \|[x_n \otimes y]_T\| = \|[P_{\mathcal{M}} x_n \otimes P_{\mathcal{M}} y]_S\| \to 0$

② ある n に対し $T^n\mathcal{H} = T^{n+1}\mathcal{H}$ のとき，$\mathrm{ind}\, T \leq 0$ に注意すると，

$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$ on $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, $\sigma(T_2) = \{0\}$, $\dim \mathcal{H}_2 < \infty$,

T_1 : invertible, $T_1 \in \mathbb{A}$. 従って次の iii) の場合より従う．

iii) $0 \in \rho(T)$ のとき； $T \in \mathbb{A} = \mathbb{A}_1$ (Bercovici [1]) だから，

$\exists \mathcal{M} \in \mathrm{Lat}\, T$: $T\mathcal{M} = \overline{T\mathcal{M}} \subsetneqq \mathcal{M}$. 従って $T|\mathcal{M}$ は left invertible

で $\mathrm{ind}\, T|\mathcal{M} \leq -1$. $T^n\mathcal{M} \ominus T^{n+1}\mathcal{M} \ni x_n$, $\|x_n\| = 1$ をとる．

$(n=1,2,\cdots)$. このとき，$[C_0]_T = [x_n \otimes x_n]_T$. また $f \in H^\infty$, $y \in \mathcal{H}$

に対して，$\langle f(T), [x_n \otimes y]_T \rangle = \langle f(T|\mathcal{M}), [x_n \otimes P_{\mathcal{M}} y]_{T|\mathcal{M}} \rangle$ であるから，

i) の②の場合と同様にして $\|[x_n \otimes y]_T\| \to 0$ を示すことができる．

(2) (1) より $\lambda \in \mathcal{F}_+(T)$ のときを示せばよい．$\lambda \in \mathcal{F}_+(T)$ のとき，

$\ker(T-\lambda)^n \subsetneqq \ker(T-\lambda)^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ だから，$x_n \in \ker(T-\lambda)^{n+1} \ominus \ker(T-\lambda)^n$

$\|x_n\| = 1$ $(n=1,2,\cdots)$ をとる．$[C_\lambda]_T = [x_n \otimes x_n]_T$ を示すことができる．

また $\{x_n\}$: orthonormal だから，補題 2 より $\|[x_n \otimes y]_T\| \to 0$

for $\forall y \in \mathcal{H}$ が従う．$\therefore [C_\lambda]_T \in \mathcal{E}_0(T)$.

定理 1 の証明．$T \in C_{0\cdot}$ (i.e. $T^n \to 0$ strongly) のときを示す．

このとき $\mathcal{E}_0(T)$ の定義における $\{y_n\}$ はさらに $\|[w \otimes y_n]_T\| \to 0$

for $^\forall w \in \mathcal{H}$ をみたすようにとれる.

(i) $\{[L_j]\}_{j=1,2,\cdots,N} \subseteq Q_T$, $a, b_1, b_2, \cdots, b_N \in \mathcal{H}$, $\delta_j > 0$ $(j=1,2,\cdots,N)$

$\|[L_j] - [a \otimes b_j]\| < \delta_j$ $(j=1,2,\cdots,N)$

$\Rightarrow$ $^\exists a_1, b_{1,1}, b_{1,2}, \cdots, b_{1,N} \in \mathcal{H}$ s.t.

$\|[L_j] - [a_1 \otimes b_{1,j}]\| < \frac{\theta_1}{\gamma}\delta_j$, $\|a_1 - a\| < \left(\frac{1}{\gamma}\sum_1^N \delta_j\right)^{1/2}$,

$\|b_{1,j} - b_j\| < \left(\frac{1}{\gamma}\delta_j\right)^{1/2}$ $(j=1,2,\cdots,N)$. ここで, $\theta < \theta_1 < \gamma$.

(∵) closed convex hull of $\mathcal{E}_\theta(T) \supseteq \{\|[L]\| \leq \gamma\}$ だから,

$^\exists[K_i] \in \mathcal{E}_\theta(T)$, $^\exists \alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,k_N)$; $\displaystyle\sum_{k_{j-1} < i \leq k_j} \alpha_i < \frac{\delta_j}{\gamma}$ $(j=1,2,\cdots,N)$

s.t.

$$\Big\|[L_j] - [a \otimes b_j] - \sum_{k_{j-1} < i \leq k_j} \alpha_i [K_i]\Big\| < \frac{\delta_j}{\gamma}\varepsilon, \quad \left(\varepsilon = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta) > 0\right)$$

ここで, $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_N$.

各 i に対し, $\|[K_i] - [x_i^{(n)} \otimes y_i^{(n)}]\| < \theta + \varepsilon$, $\|x_i^{(n)}\|, \|y_i^{(n)}\| \leq 1$,

$\|[x_i^{(n)} \otimes w]\|$, $\|[w \otimes x_i^{(n)}]\| \longrightarrow 0$ $(^\forall w \in \mathcal{H})$ となる seq. $\{x_i^{(n)}\}$,

$\{y_i^{(n)}\}$ をとる. 十分大きな $n_1, n_2, \cdots, n_N$ をえらんで

$$a_1 = a + \sum_{i=1}^{k_N} \alpha_i^{1/2} x_i^{(n_i)}, \quad b_{1j} = b_j + \sum_{k_{j-1} < i \leq k_j} \alpha_i^{1/2} y_i^{(n_i)} \quad (j=1,2,\cdots,N)$$

とすると求めるベクトルを得る.

(ii) $\{[L_j]\}_{j=1,2,\cdots,N}$, $a, b_1, b_2, \cdots, b_N$ は(i)の仮定をみたしているとする. このとき, $^\exists \hat{a}, \hat{b}_j \in \mathcal{H}$ s.t.

$[L_j] = [\hat{a} \otimes \hat{b}_j]$ $(j=1,2,\cdots,N)$, $\|\hat{a} - a\| < \alpha\left(\sum_1^N \delta_j\right)^{1/2}$,

$\|\hat{b}_j - b_j\| < \alpha\, \delta_j^{1/2}$ $(j=1,2,\cdots,N)$ ここで, $\alpha = (\gamma^{1/2} - \theta^{1/2})^{-1}$.

(∵) (i)より $^\exists\{a_n\}$, $\{b_{n,j}\}_{n=1,2,\cdots} \subseteq \mathcal{H}$ $(j=1,2,\cdots,N)$ s.t.

各 $n=1,2,\cdots$ に対して,

$\|[L_j]-[a_n\otimes b_{n,j}]\| < \left(\frac{\theta_1}{\gamma}\right)^n \delta_j \quad (j=1,2,\cdots N)$,

$\|a_n - a_{n-1}\| < \left(\frac{\theta_1}{\gamma}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\gamma \sum_1^N \delta_j\right)^{1/2}$, $\|b_{n,j}-b_{n-1,j}\| < \left(\frac{\theta_1}{\gamma}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\delta_j}{\gamma}\right)^{1/2}$

$(j=1,2,\cdots N)$. $(a_0 = a,\ b_{0,j} = b_j)$

$a_n \to {}^{\exists}\hat{a}$, $b_{nj} \to {}^{\exists}\hat{b}_j \quad (j=1,2,\cdots,N)$. $\hat{a}$, $\hat{b}_j$ は求めるもの.

命題2より定理の(1)の証明は次の(iii)を示すことにより完了する.

(iii) $\forall a\in\mathcal{H}$, $\forall\varepsilon>0$ に対し ${}^{\exists}x\in\mathcal{H}$, ${}^{\exists}\{t_j\}$, $\{s_j\}\subseteq\mathcal{H}$ s.t.

① $[C_0^{(j)}] = [x\otimes t_j] \ (j=0,1,2,\cdots)$, ② $\overline{\lim}\|t_j\|^{\frac{1}{j}} \leq 1$,

③ $[x\otimes s_j] \in$ linear span $\{[C_0^{(j)}]\ ;\ j=0,1,2,\cdots\}$ $(j=0,1,2,\cdots)$,

④ $\bigvee_{j\geq 0} s_j = \mathcal{H}$, ⑤ $\|a-x\|<\varepsilon$.

(:) $\{C_n\}_{n\geq 0}$ dense $\subseteq\mathcal{H}$, $\delta_j>0$, $\sum_0^\infty \delta_j^{1/2} < \varepsilon/2^{1/2}\alpha$ (αは(ii)の定数)

$0<\varepsilon_j<\min\left\{\frac{\delta_j}{(j+1)^2}, \frac{\delta_j}{4^j}\right\}$ $(j=0,1,2,\cdots)$ をとる.

$[L_j] = \frac{\delta_j}{2}[C_0^{(j)}]$ $(j=0,1,2,\cdots)$, $\mathcal{N}$ = linear span $\{[C_0^{(j)}]\ ;\ j=0,1,2,\cdots\}$

とおく. n についての induction で次をみたす seq. $\{a_n\}_{n\geq 0}$,

$\{b_{nj}\}_{n,j\geq 0}$, $\{c_{nj}\}_{n,j\geq 0}\subseteq\mathcal{H}$, $\{[R_n]\}_{n\geq 0}\subseteq\mathcal{N}$ を得る;

$[a_n\otimes b_{nj}] = [L_j] \ (j\leq n)$, $b_{nj}=0 \ (j>n)$,

$[a_n\otimes c_{nj}] = [R_j] \ (j\leq n)$, $c_{nj}=0 \ (j>n)$,

$\|a_n - a_{n-1}\| < \alpha(2\delta_n)^{1/2} \ (n=0,1,2,\cdots)$, ここで $a_{-1}=a$,

$\|b_{nj}-b_{n-1,j}\| < \alpha\,\varepsilon_n^{1/2} \ (0\leq j\leq n-1)$, $\|b_{nn}\| < \alpha\,\delta_n^{1/2}$

$\|c_{nj}-c_{n-1,j}\| < \alpha\,\varepsilon_n^{1/2} \ (0\leq j\leq n-1)$, $\|c_{nn}-c_n\| < \alpha\cdot\varepsilon_n^{1/2}$

実際, $\{a_n\}_{0\leq n\leq N}$, $\{b_{n,j}\}_{0\leq n\leq N,\ 0\leq j}$, $\{c_{nj}\}_{0\leq n\leq N,\ 0\leq j}$, $\{[R_n]\}_{0\leq n\leq N}$ が

得られたとき, $\|[L_j]-[a_N\otimes b_{Nj}]\| < \varepsilon_{N+1} \ (j=0,1,\cdots N)$,

$\|[R_j] - [a_N \otimes c_{Nj}]\| < \varepsilon_{N+1}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, N)$, $\|[L_{N+1}] - [a_N \otimes 0]\| < \delta_{N+1}$, $\|[R_{N+1}] - [a_N \otimes c_{N+1}]\| < \varepsilon_{N+1}$ ($\mathcal{N}$ は Q_T で dense であるから, この不等式をみたす $[R_{N+1}] \in \mathcal{N}$ を1つとる). いま $\{L_j\}_{j \le N+1}$, $\{[R_j]\}_{j \le N+1}$, a_N, $\{b_{N1}, b_{N2}, \cdots, b_{NN}, 0, c_{N1}, c_{N2}, \cdots, c_{NN}, c_{N+1}\}$ に上の論法を使う. a_{N+1}, $\{b_{N+1,j}\}_{j \ge 0}$, $\{c_{N+1,j}\}_{j \ge 0}$ ($b_{N+1,j} = 0$, $c_{N+1,j} = 0$ for $j > N+1$ とおく) を得る.

$\{a_n\}$, $\{b_{nj}\}_{n=j,j+1,\cdots}$, $\{c_{nj}\}_{n=j,j+1,\cdots}$ は Cauchy 列 $(j = 0, 1, 2, \cdots)$

$\therefore$ $a_n \to \hat{a}$, $b_{nj} \to \hat{b}_j$, $c_{nj} \to \hat{c}_j$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$

$$\|\hat{a} - a\| \le \sum_0^\infty \alpha (2\delta_n)^{1/2} < \varepsilon$$

$$\|\hat{c}_j - c_j\| \le \|\hat{c}_j - c_{jj}\| + \|c_{jj} - c_j\| \le \alpha \sum_{n \ge j} \varepsilon_n^{1/2} < \alpha \delta_j^{1/2}$$

$$\|\hat{b}_j - b_{jj}\| \le \alpha \sum_{n \ge j+1} \varepsilon_n^{1/2} \quad \therefore \|\hat{b}_j\| \le \alpha \Big(\sum_{n \ge j+1} \varepsilon_n^{1/2} + \delta_j^{1/2} \Big) < \alpha \cdot (2\delta_j)^{1/2}$$

$[L_j] = [\hat{a} \otimes \hat{b}_j]$, $[R_j] = [\hat{a} \otimes \hat{c}_j]$ が成立する. 従って,

$x = \hat{a}$, $t_j = \dfrac{2}{\delta_j} \hat{b}_j$, $s_j = \hat{c}_j$ は求めるベクトルである.

文献

1. H. Bercovici, Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert space, Ann. of Math.
2. S. Brown, Full analytic subspaces for contractions with rich spectrum, Pacific J. Math. 132 (1988), 1 – 10.
3. B. Chevreau, G. Exner, C. Pearcy, On the structure of contraction operator. III.