数理解析研究所講究録
第708巻 1989年 27-41

Hecke対応のある拡張

立教大　理　中嶋真澄（Masumi Nakajima）

§1. 動機と結果.

良く知られていることであるが（例えば、[1],[5],[7] 参照）、ある保型形式と、ある関数等式を持つ Dirichlet 級数は、Mellin 変換を通じて、1対1に対応している。これを普通、Hecke 対応と呼んでいる。より正確には、次の通りである。

H を上半平面，即ち，$H=\{\tau\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\,\tau>0\}$，$G(\lambda)$ を H 上に作用して，$\tau\mapsto\tau+\lambda$，$\tau\mapsto -1/\tau$，（$\lambda>0$，$\tau\in H$）で生成される1次変換群とする。$M(\lambda,k,C)$ を、H 上の正則関数 $f(\tau)$ の作る $\mathbb{C}$ 上の線型空間で、次の3つの条件を満たすものとする。

(1)　$f(\tau+\lambda)=f(\tau)$

(2)　$f(-\frac{1}{\tau})=C\left(\frac{\tau}{i}\right)^k f(\tau)$，（$k>0$）

(3)　$f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i\frac{\tau}{\lambda}}$　と展開可能.

$M_0(\lambda,k,C)$ を $M(\lambda,k,C)$ の部分空間で、

$$M_0(\lambda, k, C) = \{ f \in M(\lambda, k, C) \mid a_n \ll n^c \text{ for some constant } c > 0 \}$$

で定義する。（$\ll$ は Vinogradov の記号.）

$D(\lambda, k, C)$ を、次の 3 条件を満たす Dirichlet 級数：

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

全体とする。

(1) $a_n \ll n^c$ for some constant $c > 0$.

(2) $\Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\psi(s)$ とおいて.（$\Gamma(s)$ は gamma 関数.） $\Phi(s) + \frac{a_0}{s} + C \cdot \frac{a_0}{k-s}$ は 各帯状領域：$\{ s \mid \alpha_1 < \mathrm{Re}\, s < \alpha_2 \}$ で 正則且つ有界.

(3) $\Phi(k-s) = C\,\Phi(s)$.

1936年, Hecke [4] は, $M_0(\lambda, k, C)$ の元と, $D(\lambda, k, C)$ の元の間には, Mellin 変換を通じて, 1対1の対応のあることを示した。現在, Hecke 対応と呼ばれているものである。$\lambda = 1$ のときには, $M(1, k, C) = M_0(1, k, C)$ である[7]が, 一般には, $M(\lambda, k, C) \setminus M_0(\lambda, k, C) \neq \phi$ であるので, $M(\lambda, k, C) \setminus M_0(\lambda, k, C)$ には, 何が対応するのかと云う疑問が自然に生じる。$M(\lambda, k, C) \setminus M_0(\lambda, k, C)$ の元に対応する Dirichlet 級数 を形式的に作ると, これは至る所, 発散してしまう。ここでは量子場に於けるくりこみ理論にヒントを得て, 発散を取り除き、しかも関数等式を満たすことを以下

に示す。（以下に述べる $\Phi(s)$ は、確率振巾に、関数等式は、ローレンツ或いはゲージ不変性に、weight $e^{-2\pi n\delta/\lambda}$ は、cut-off 等に対応すると考えられる。くりこみ理論の概要は、[6] 参照）既に、Atkinson が、[2] において、Dedekind の eta 関数 $\eta(\tau)$ の変換公式を使って、後に例としてあげる partition function $p(n)$ を係数に持つ Dirichlet 級数の場合、このことを示していることを最近知ったことを附け加えておく。

以下に述べる結果は、Goldstein と Razer [3] の定義した、Hecke integral と呼ばれる関数，豊泉[9] の考えたある無限積により定義された関数にも拡張することが出来る。恐らく Siegel modular form に対しても拡張可能と思われる。

ここでは、次の定理を証明し、例を与える。

定理

$f(\tau)$ を、H上で定義された解析関数で、次の3条件を満たすとする。

(i) $f\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\left(\frac{\tau}{i}\right)^{\beta} f(\tau)$, $(\beta\in\mathbb{R})$

ここで、$(\tau/i)^{\beta}$ は、$\tau\in i\mathbb{R}$ に対して $(\tau/i)^{\beta}\in\mathbb{R}$ となる様に、その分枝を選ぶものとする。

(ii) $f(\tau)$ は、次の様に展開可能：

$$f(\tau)=e^{-2\pi i\alpha\frac{\tau}{\lambda}}\sum_{n=-M}^{\infty}a_n\, e^{2\pi i n\cdot\frac{\tau}{\lambda}},\quad (0\leqslant\alpha<1,\ \lambda>0,\ M\geqslant 0)$$

(iii) $\displaystyle \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^c} = \infty$ for all constant $c > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{e^{cn}} = 0 \quad \text{for all constant } c > 0$$

$\displaystyle \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-\alpha)^s}$ に対して、$\displaystyle \psi_\delta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi(n-\alpha)\frac{\delta}{\lambda}} \cdot \frac{a_n}{(n-\alpha)^s}$,

$(\delta > 0)$ と定義する。ここで $\psi(s)$ は形式的なもので、至る所発散する。

$\Phi(s)$ を次の様に定義する。

$$\Phi(s) = \lim_{\delta\to 0+} \left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\psi_\delta(s) - \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \frac{\sin \pi\beta}{\sin \pi(\beta - s)} \cdot F_\delta(s;n) \right\}$$

ここに、$F_\delta(s;n)$ は、

$\alpha = n = 0$ のとき、$F_\delta(s;0) = -\delta^{s-\beta} e^{\pi i\beta} \cdot B(s, \beta - s)$,

$B(\ ,\ )$ は、Beta 関数。

$\alpha \neq 0$ のとき、

$$F_\delta(s;n) = -\delta^{s-\frac{\beta}{2}} e^{\frac{\pi}{2}i\beta} \left(\frac{2\pi(n+\alpha)}{\lambda}\right)^{-\frac{\beta}{2}} e^{\pi\cdot\frac{n+\alpha}{\lambda\delta}} \Gamma(s) W_{\frac{\beta}{2}-s, \frac{\beta-1}{2}}\left(-\frac{2\pi(n+\alpha)}{\lambda\delta}\right)$$

$W_{l,k}(z)$ は、Whittaker 関数。

このとき、次の関数等式が成立する。

$$\Phi(\beta - s) = \Phi(s) .$$

§2. 証明

最初に、次の補題を証明する。

<u>補題</u>

$$\Phi(s) = \lim_{\delta \to 0+} \left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \psi_\delta(s) - \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \frac{L_\delta(n)}{2i \sin \pi(s-\beta)} \right\}$$

ここに $L_\delta(n) = \int_{\delta}^{0} (-u+\delta)^{s-1} (-u)^{-\beta} e^{2\pi \frac{n+\alpha}{\lambda u}} du$, $(\delta > 0)$

, ($\int_a^b$ は. $\mathbb{C}$ での $a \rightleftarrows b$ $\mathbb{R}$ なる積分路)

とおくと. $\Phi(s)$ は有理型関数となり. 次の関数等式を満す。

$$\Phi(\beta - s) = \Phi(s).$$

<u>証明</u> $\mathrm{Re}\, s > 0$ とする。

$$\Psi_\delta(s) \equiv \Gamma(s) \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \psi_\delta(s)$$

$$= \int_0^\infty z^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi(n-\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} dz,$$ ($\sum$ と $\int$ の交換は. (iii)により保障されている。)

$$= \int_0^\infty z^{s-1} \left\{ f(i(z+\delta)) - \sum_{n=0}^{M} a_{-n} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} \right\} dz$$

$$= \int_1^\infty z^{s-1} \left\{ f(i(z+\delta)) - \sum_{n=0}^{M} a_{-n} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} \right\} dz +$$

$$+ \int_0^1 z^{s-1} f(i(z+\delta))\, dz - \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \int_0^1 z^{s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} dz$$

$$= I_\delta + \int_0^1 z^{s-1} f(i(z+\delta))\, dz - \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \int_0^1 z^{s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} dz$$

(オ1項を I_δ とおいた.)

$$= I_\delta + \int_0^1 z^{s-1} (z+\delta)^{-\beta} f\left(\frac{i}{z+\delta}\right) dz - \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \int_0^1 z^{s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} dz$$

((i)をオ2項に使った.)

$$= I_\delta + \int_0^1 z^{s-1}(z+\delta)^{-\beta}\left\{f\left(\frac{i}{z+\delta}\right) - \sum_{n=0}^{M} a_{-n}\, e^{2\pi(n+\alpha)\cdot\frac{1}{\lambda(z+\delta)}}\right\} dz +$$

$$+ \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \int_0^1 z^{s-1}(z+\delta)^{-\beta} e^{2\pi(n+\alpha)\cdot\frac{1}{\lambda(z+\delta)}} dz -$$

$$- \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \int_0^1 z^{s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} dz$$

ここで、変数変換：$z+\delta \mapsto 1/w$ をして、

$$= I_\delta + \int_{1/(1+\delta)}^{1/\delta} \left\{\frac{1}{w} - \delta\right\}^{s-1} w^{\beta-2}\left\{f(iw) - \sum_{n=0}^{M} a_{-n}\, e^{2\pi(n+\alpha)\frac{w}{\lambda}}\right\} dw +$$

$$+ \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \int_0^1 z^{s-1}(z+\delta)^{-\beta} e^{2\pi(n+\alpha)\cdot\frac{1}{\lambda(z+\delta)}} dz -$$

$$- \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \int_0^1 z^{s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} dz$$

$$= I_\delta + I_\delta(1) + \sum_{n=0}^{M} a_{-n}\, I_\delta(2;n) - \sum_{n=0}^{M} a_{-n}\, I_\delta(3:n) \qquad \cdots (1)$$

と置く。

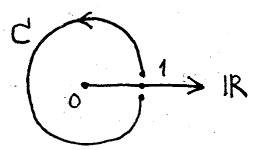
$\delta \to 0+$ の極限で、(1)の右辺の $I_\delta + I_\delta(1)$ は変換：$s \mapsto \beta - s$ の下で不変である。(1)の右辺の残りの項、$I_\delta(2;n)$, $I_\delta(3;n)$ に関しては、今、$I_\delta(2;n)$ に対して変数変換：$z+\delta \mapsto 1/w$ をほどこすと、その被積分関数は、$\left\{\frac{1}{w} - \delta\right\}^{s-1} w^{\beta-2} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{w}{\lambda}}$ となって、$\delta \to 0+$ の極限で、$I_\delta(3;n)$ の被積分関数：$z^{s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}}$ と比べて、変換：$s \mapsto \beta - s$ に関して、互いに他に移り合うことがわかり、これだけを見ると、$I_\delta(2;n) + I_\delta(3:n)$ が、変換：$s \mapsto \beta - s$ に関して「不変」となることがわかる。しかし乍ら、$I_\delta(2:n)$ の積分範囲は、

区間：$[0, 1]$ から、$[\frac{1}{1+\delta}, \frac{1}{\delta}]$ に移り、$I_\delta(3:n)$ の積分範囲である区間：$[0, 1]$ とは、$\delta \to 0+$ の極限で一致しないので、$I_\delta(2:n) + I_\delta(3:n)$ は、変換：$s \mapsto \beta - s$ に関して、真には、不変でないことがわかる。それでは、如何にして、$I_\delta(2:n)$, $I_\delta(3:n)$ の中から、変換：$s \mapsto \beta - s$ に関して不変な部分を取り出せば良いか。それには、$I_\delta(2:n)$, $I_\delta(3:n)$ の積分範囲を、変数変換：$z + \delta \mapsto 1/w$ に対して、$\delta \to 0+$ の極限で、不変になる様な積分路を取れば良いことになる。そうすれば、$I_\delta(2:n)$, $I_\delta(3:n)$ の積分路は一致し、変換：$s \mapsto \beta - s$ に対して、$I_\delta(2;n)$, $I_\delta(3:n)$ の被積分関数だけが、互いに他に移り合い、$I_\delta(2:n) + I_\delta(3:n)$ は、変換：$s \mapsto \beta - s$ に対して、不変となる。変数変換：$z+\delta \mapsto 1/w$ に対して、$\delta \to 0+$ の極限で不変となる積分路は、複素平面の中の原点を中心とする単位円である。そこで、次に我々は、$I_\delta(2:n)$, $I_\delta(3:n)$ の積分路を単位円に変形すると云う作業を行う。

(1) 積分：$I_\delta(3:n) \equiv \int_0^1 z^{s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} dz$ の計算。

次の積分：$J_{\delta,n}$ を考える。

$$J_{\delta,n} = \int_C (-z)^{s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}} dz,$$ ここに積分路：C は、右図のものとする。



すると． $J_{\delta,n}=\displaystyle\int_{1\ (\circlearrowleft\to 0)}^{0}(-z)^{s-1}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z+\delta}{\lambda}}dz$，（ここに．$\displaystyle\int_{1\ (\circlearrowleft\to 0)}^{0}$ の

$\circlearrowleft\to 0$ は．積分路中の円の半径をゼロに持って行くことを表わす．）従って．$\Gamma(s)$ の複素積分表示と同様にして．

$$J_{\delta,n}=\int_0^1\{-e^{-2\pi i}x\}^{s-1}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{x+\delta}{\lambda}}dx+\int_0^1(-x)^{s-1}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{x+\delta}{\lambda}}dx$$

$$=-2i\sin\pi s\int_0^1 x^{s-1}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{x+\delta}{\lambda}}dx.$$

従って． $$I_\delta(3:n)=-\frac{1}{2i\sin\pi s}J_{\delta,n} \qquad \cdots(2)$$

(2) 積分：$I_\delta(2;n)\equiv\displaystyle\int_0^1 z^{s-1}(z+\delta)^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\cdot\frac{1}{\lambda(z+\delta)}}dz$ の計算．

$$I_\delta(2:n)=\int_\delta^{1+\delta}(u-\delta)^{s-1}u^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\cdot\frac{1}{\lambda u}}du$$

$$=\int_\delta^1(u-\delta)^{s-1}u^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}}du+\int_1^{1+\delta}(u-\delta)^{s-1}u^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}}du$$

$=J_\delta(2:n)+K_\delta(2;n)$ とおくと．

明らかに． $\displaystyle\lim_{\delta\to 0+}K_\delta(2;n)=0$ である。

(3) 積分：$J_\delta(2;n)\equiv\displaystyle\int_\delta^1(u-\delta)^{s-1}u^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}}du$ の計算．

次の２つの積分を考える。

$$J_\delta(n)=\int_C(-u+\delta)^{s-1}(-u)^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}}du$$

$$=\int_{1\ (\circlearrowleft)}^{0}(-u+\delta)^{s-1}(-u)^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}}du.$$

$$L_\delta(n)=\int_{\delta}^{0}(-u+\delta)^{s-1}(-u)^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\cdot\frac{1}{\lambda u}}du.$$

この2つの積分の差を考えると、

$$J_\delta(n)-L_\delta(n)=\int_1^\delta\{-e^{-2\pi i}u+\delta\}^{s-1}\{-e^{-2\pi i}u\}^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}}du+$$
$$+\int_\delta^1(-u+\delta)^{s-1}(-u)^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}}du=(*)$$

この被積分関数の特異点：$u=0,\ u=\delta$ のまわりで、偏角が 2π 変化するので、

$$(*)=-2i\sin\pi(s-\beta)\int_\delta^1(u-\delta)^{s-1}u^{-\beta}e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}}du$$

従って、

$$J_\delta(2;n)=\frac{L_\delta(n)-J_\delta(n)}{2i\sin\pi(s-\beta)}\qquad\cdots(3)$$

(2), (3) を (1) に代入して、

$$\Psi_\delta(s)-\sum_{n=0}^{M}a_{-n}\frac{L_\delta(n)}{2i\sin\pi(s-\beta)}=$$
$$=\{I_\delta+I_\delta(1)\}+\sum_{n=0}^{M}a_{-n}\left\{\frac{J_{s,n}}{2i\sin\pi s}+\frac{J_\delta(n)}{2i\sin\pi(\beta-s)}\right\}+$$
$$+\sum_{n=0}^{M}a_{-n}K_\delta(2;n)\qquad\cdots(4)$$

(4) の右辺のそれぞれの項は、$\delta\to0+$ の極限で、

$$I_\delta\to I=\int_1^\infty z^{s-1}\left\{f(iz)-\sum_{n=0}^{M}a_{-n}e^{2\pi(n+\alpha)\cdot\frac{z}{\lambda}}\right\}dz$$

$$I_\delta(1) \to I(1) = \int_1^\infty w^{\beta-s-1}\left\{ f(iw) - \sum_{n=0}^{M} a_{-n} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{w}{\lambda}} \right\} dw$$

$$J_{\delta,n} \to J_n = \int_C (-z)^{s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{z}{\lambda}} dz$$

$$J_\delta(n) \to J(n) = \int_C (-u)^{s-\beta-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}} du$$

$$= \int_C (-w)^{\beta-s-1} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{w}{\lambda}} dw,$$ （変数変換：$u \mapsto 1/w$ を行った。）

$$K_\delta(2;n) \to 0$$

となるので、

$$\Phi(s) = \lim_{\delta \to 0+} \left\{ \Phi_\delta(s) - \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \frac{L_\delta(n)}{2i\sin\pi(s-\beta)} \right\}$$

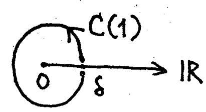
$$= \{ I + I(1) \} + \sum_{n=0}^{M} a_{-n} \left\{ \frac{J_n}{2i\sin\pi s} + \frac{J(n)}{2i\sin\pi(\beta-s)} \right\} \quad \cdots (5)$$

I, $I(1)$, J_n, $J(n)$ は、全ての $s \in \mathbb{C}$ に対して収束するので(5)の右辺により、$\Phi(s)$ を定義することで、$\Phi(s)$ は有理型関数となる。又、(5)の右辺から、$\Phi(\beta-s) = \Phi(s)$ は明らかである。（証明終り）

定理の証明

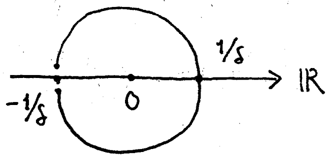
次に、定理を証明するには、$L_s(n)$ を計算すれば良い。

$$L_\delta(n) = \int_{C(1)} (\delta-u)^{s-1}(-u)^{-\beta} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda u}} du$$

$C(1)$ は、 ととる。

$$= \int_{C(2)} \left(\delta + \frac{1}{w}\right)^{s-1} w^{\beta-2}\, e^{-2\pi(n+\alpha)\frac{w}{\lambda}}\, dw$$

C(2) は、次の積分路



$$= -\int_{-1/\delta}^{0} (1+\delta w)^{s-1} w^{\beta-s-1}\, e^{-2\pi(n+\alpha)\frac{w}{\lambda}}\, dw$$

$$= -\int_{0}^{1/\delta} \left(1+\delta\left(z-\frac{1}{\delta}\right)\right)^{s-1} \left(z-\frac{1}{\delta}\right)^{\beta-s-1} e^{-2\pi(n+\alpha)\frac{z-\frac{1}{\delta}}{\lambda}}\, dz$$

$$= -\delta^{2s-\beta} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda\delta}}\, e^{\pi i(\beta-s)} (-1) \int_{0}^{1/\delta} z^{s-1} \left(1-\frac{z}{1/\delta}\right)^{\beta-s-1} e^{-2\pi(n+\alpha)\frac{z}{\lambda}}\, dz$$

$$= \delta^{2s-\beta} e^{2\pi(n+\alpha)\frac{1}{\lambda\delta}}\, e^{\pi i(\beta-s)}\, H(n) \quad \cdots (6)$$ とおく。

ここで Whittaker 関数の定義を思い出してみよう [10]。

Whittaker 関数 $W_{k,m}(z)$ は、次で定義される。

$$\int_0^\infty t^{(-k+m+\frac{1}{2})-1} \left(1+\frac{t}{z}\right)^{(k+m+\frac{1}{2})-1} e^{-t}\, dt = z^{-k} e^{\frac{z}{2}}\, \Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right) W_{k,m}(z)$$

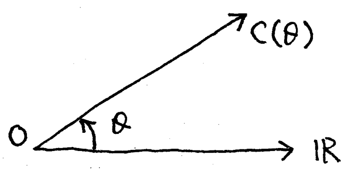
ここで、$\mathrm{Re}(-k+m+\frac{1}{2})>0$, $|\arg z| < \pi$

上の積分路を移動することにより容易に、次の定義を得る。

$$\int_{C(\theta)} t^{(-k+m+\frac{1}{2})-1} \left(1-\frac{t}{z}\right)^{(k+m+\frac{1}{2})-1} e^{-t}\, dt = (-z)^{-k} e^{-\frac{z}{2}}\, \Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right) W_{k,m}(-z) \quad \cdots (7)$$

ここで、$\mathrm{Re}(-k+m+\frac{1}{2})>0$, $z \notin C(\theta)$, $\theta \neq 0$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$

C(θ) は、次の積分路



H(n)を次の3つ場合に分けて計算する。

(1) $n=0,\ \alpha=0,\ 0<\mathrm{Re}\,s<\beta$ の場合。

$$H(0)=\int_{\substack{0\\ \circlearrowleft}}^{1/\delta} z^{s-1}(1-\delta z)^{\beta-s-1}dz=\int_{\substack{0\\ \circlearrowleft\to 0}}^{1/\delta} z^{s-1}(1-\delta z)^{\beta-s-1}dz$$

$$=\delta^{-s}\int_{\substack{0\\ \circlearrowleft\to 0}}^{1} w^{s-1}(1-w)^{\beta-s-1}dw$$

$$=\delta^{-s}\left\{\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{\beta-s-1}dx+\int_0^1 (e^{2\pi i}x)^{s-1}(1-e^{2\pi i}x)^{\beta-s-1}dx\right\}$$

$$=-e^{\pi i\beta}\delta^{-s}\left\{e^{\pi i\beta}-e^{-\pi i\beta}\right\}\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{\beta-s-1}dx$$

$$=-2i\,e^{\pi i\beta}\delta^{-s}\sin\pi\beta\ B(s,\beta-s) \qquad \cdots (8a)$$

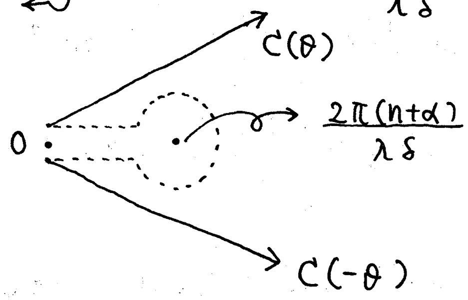
ここに、B(,)は、Beta 関数である。

(2) $n+\alpha>0,\ \mathrm{Re}\,s>0$ の場合。

$$H(n)=\int_{\substack{0\\ \circlearrowleft}}^{1/\delta} z^{s-1}\left\{1-\frac{z}{1/\delta}\right\}^{\beta-s-1}e^{-2\pi(n+\alpha)\frac{z}{\lambda}}dz$$

$$=\left(\frac{\lambda}{2\pi(n+\alpha)}\right)^{s}\int_{\substack{0\\ \circlearrowleft}}^{2\pi\cdot\frac{n+\alpha}{\lambda\delta}} t^{s-1}\left\{1-t\,\frac{1}{\frac{2\pi(n+\alpha)}{\lambda\delta}}\right\}^{\beta-s-1}e^{-t}dt$$

ここで、積分路を



の様に選ぶと、

$$= \left(\frac{2\pi(n+\alpha)}{\lambda}\right)^{-s}\left\{e^{\pi i\beta}\int_{C(\theta)} t^{s-1}\left\{1-\frac{t}{\frac{2\pi(n+\alpha)}{\lambda\delta}}\right\}^{\beta-s-1} e^{-t}dt + \right.$$

$$\left. + e^{-\pi i\beta}\int_{C(-\theta)} t^{s-1}\left\{1-\frac{t}{\frac{2\pi(n+\alpha)}{\lambda\delta}}\right\}^{\beta-s-1} e^{-t}dt \right\}$$

(7) によって.

$$= 2i\sin\beta s\cdot\left(\frac{2\pi(n+\alpha)}{\lambda}\right)^{-s}\left\{-\frac{2\pi(n+\alpha)}{\lambda\delta}\right\}^{s-\frac{\beta}{2}} e^{-\pi\frac{n+\alpha}{\lambda\delta}}\Gamma(s)\times$$

$$\times W_{\frac{\beta}{2}-s,\frac{\beta-1}{2}}\left(-\frac{2\pi(n+\alpha)}{\lambda\delta}\right) \qquad \cdots(9)$$

(3) $n=0$, $\alpha=0$, $0<\mathrm{Re}\,s$, $\beta<1$ の場合.

$$H(0)=\int_0^{1/\delta} z^{s-1}(1-\delta z)^{-(s-\beta+1)}dz$$

$$= -\int_{C(\theta)}\{e^{\pi i}z\}^{s-1}(1-\delta z)^{-(s-\beta+1)}d(e^{\pi i}z) +$$

$$+\int_{C(-\theta)}(e^{-\pi i}z)^{s-1}(1-\delta z)^{-(s-\beta+1)}d(e^{-\pi i}z)$$

ここで. Beta関数の次の定義を思い出してみよう[10]。

$$\alpha^{-x}B(x,y)=\int_0^\infty t^{x-1}(1+\alpha t)^{-(x+y)}dt$$

ここに. $\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$, $|\arg\alpha|<\pi$

$$=\int_{C(\theta)} w^{x-1}(1+\alpha w)^{-(x+y)}dw$$

ここに. $\mathrm{Re}\,x>0$. $\mathrm{Re}\,y>0$, $-\frac{1}{\alpha}\notin C(\theta)$, $|\theta|<\frac{\pi}{2}$

を使うと.

$$= - e^{\pi i\beta} \delta^{-s}\, 2i \sin\pi\beta\ B(s, -\beta+1)$$

$$= -2i\, e^{\pi i\beta} \delta^{-s} \sin\pi\beta \cdot B(s, \beta - s) \qquad \cdots (8b)$$

(8),(9)は、極を除いて、全平面に解析接続出来るので、これで証明は終わった。

§3. 幾くつかの例.

例1 (Atkinson)

$\alpha = \frac{1}{24}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, $a_n = p(n)$, $p(n)$は、partition function. このとき、$f(\tau) = \eta(\tau)^{-1}$, $\eta(\tau)$は、Dedekindのeta関数。$e^{\pi i\tau/12}\eta(\tau)^{-1}$については、[8]で、Rademacherも考えているが、対応するDirichlet級数については言及していない。

例2

$f(\tau) = \eta(\tau)^{-m}$, $(m \in \mathbb{N})$

例3

$\alpha = \beta = 0$, $\lambda = 1$の場合. このとき.

$$f(\tau) = 12^3 J(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n\tau}$$

となり、$J(\tau)$は、Kleinのmodular関数である。

参考文献

[1] Apostol, T. M., : Modular functions and Dirichlet series in Number theory, 1976, Springer.

[2] Atkinson, F. V., : The Abel summation of certain Dirichlet series, Quart. J. Math., 19 (1948), 59-64.

[3] Goldstein, L. J. and Razer M., : The theory of Hecke integrals, Nagoya Math. J., 63 (1976), 93-121.

[4] Hecke, E., : Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Ann., 112 (1936), 664-699.

[5] Hecke, E., : Lectures on Dirichlet series, Modular function and Quadratic forms, 1983, Vandenhoeck and Ruprecht.

[6] Mandle, F. and Shaw, G., : Quantum field theory, 1984, John Wiley and Sons.

[7] Ogg, A., : Modular forms and Dirichlet series, 1969, Benjamin.

[8] Rademacher, H., : Topics in Analytic number theory, 1973, Springer.

[9] Toyoizumi, M., : On certain infinite products II, Mathematika, 31 (1984), 1-11.

[10] Whittaker, E. M. and Watson, G. N., : A course of Modern Analysis, 4-th ed., 1969, Cambridge.