数理解析研究所講究録
第708巻 1989年 44-50

単調な数列が(P, M)-u.d. mod 1 であるための必要条件

作陽短大　後藤 和雄 (Kazuo Goto)
岡山大学　鹿野 健 (Takeshi Kano)

$p(1)>0$ を満たす非負実数列を $P=(p(n))_1^\infty$ とする．$S(n)$ を $S(n)=p(1)+p(2)+\cdots+p(n)$ であって，$S(n)\to\infty$ と仮定する．

定義1　数列 $(g(n))_1^\infty$ が $(M, p(n))$-u.d. mod 1 であるとは，任意の区間 $J\subset[0,1]$ に対して，　(cf. [3])

$$(1)\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{S(N)}\sum_{n=1}^{N}p(n)C_J(\{g(n)\})=|J|$$

が成立するときをいう．ここに，$C_J(x)$ は，J の特性関数である

(1)の条件は，次のようにも書きかえられる：

(Weyl の判定条件)

任意の自然数 h に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{S(N)}\sum_{n=1}^{N}p(n)e^{2\pi i h g(n)}=0.$$

定義2　実数列$(g(n))_1^\infty$が(P,μ)-u.d. mod 1 であるとは，任意の区間$J\subset[0,1]$に対して，

$$(2)\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{S(N)}\sum_{n=1}^{N}p(n)C_J(\{g(n)\})=\mu(J),$$

が成立するときをいう．

(2)の条件は，また，次のように書きかえられる：
任意の自然数hに対して，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{S(N)}\sum_{n=1}^{N}p(n)e^{2\pi ihg(n)}=\int_0^1 e^{2\pi ihx}\,d\mu([0,x)).$$

特に，$p(n)\equiv1$，$\mu([0,x))=x$ のときは，普通の一様分布の定義そのものである．

1984年に，Niederreiter は[1]でいろいろな結果を得ている．その中の一つに，
"μを$[0,1]$上の Borel 確率測度で，一点集中測度でないとする。このとき，非減少実数列$g(n)$が(P,μ)-u.d. mod 1 であるためには，

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty} g(n)/\log S(n)=\infty,$$

が必要である"

というものを得ている.

他方, 1983年 Schatte は [2] ですでに, Niederreiter と独立に, まったく異なる方法を用いて,

"非減少数列 $g(n)$ が, 普通の意味で一様分布するためには,

$$\lim_{n\to\infty} g(n)/\log n = \infty,$$

が必要である."

を得ている. しかし, 一般化した (3) を彼は証明しているとは思われない.

ここでは, 彼の方法を用いても, (3) を証明することができることを示す. この方法は, [1] よりもより直接的で, 簡単であると思われる.

結　果

定理 1　$(g(n))_1^\infty$ を非減少実数列とする. もし, $(g(n))_1^\infty$ が $(M, p(n))$-u.d. mod 1 ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\log s(n)} = \infty$$

である.

定理2　$(g(n))_1^\infty$ を非減少実数列とする. もし, $(g(n))_1^\infty$ が (P, μ)-u.d. mod 1 ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\log S(n)} = \infty ,$$

である．

［定理1の証明］ 定理1の仮定 "$(g(n))$ は，$(M, p(n))$-u.d. mod 1" より， 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N があり，$N \leqq m$ である任意の m について，次の不等式が成り立つ

$$(4) \quad \frac{1}{S(m)} \left| \sum_{j=1}^{m} p(j) e^{2\pi i g(j)} \right| < \varepsilon .$$

ここで，次の条件を満足する非減少な実数列 $(\nu(k))_0^\infty$ を選ぶ： 任意に固定した N に対して，

$\nu(0) = 1$， $\nu(k)N$ が，すべての k で整数となり，

$S(\nu(k)N)A(\varepsilon) \leqq S(\nu(k+1)N) < S(\nu(k)N)A(\varepsilon)^2$

ここに， $A(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right)$ である．

このとき，各 $\nu(k)$ に対して (4) より

$$\frac{1}{S(\nu(k)N)} \left| \sum_{j=1}^{\nu(k)N} p(j) e^{2\pi i g(j)} \right| < \varepsilon$$

が成立するから，

$$(5) \quad \begin{aligned} &\left| \sum_{j=\nu(k)N+1}^{\nu(k+1)N} p(j) e^{2\pi i (g(j) - g(\nu(k))N)} \right| \\ &= \left| \sum_{j=\nu(k)N+1}^{\nu(k+1)N} p(j) e^{2\pi i g(j)} \right| < \varepsilon \big(S(\nu(k+1)N) + S(\nu(k)N) \big). \end{aligned}$$

このことから，すべての k と N で，

$$g(\nu(k+1)N)-g(\nu(k)N)\geqq 1/8$$

を証明するために，ある k と N で，

$$0\leqq g(\nu(k+1)N)-g(\nu(k)N)<1/8$$

であると仮定する．

(5) の実部のみを考えて，

$$\left|\sum_{j=\nu(k)N+1}^{\nu(k+1)N} p(j)\cos(2\pi(g(j)-g(\nu(k)N))\right|$$

$$<\varepsilon(S(\nu(k+1)N)+S(\nu(k)N)).$$

$g(n)$ の非減少性より，

$$0\leqq g(j)-g(\nu(k)N)\leqq g(\nu(k+1)N)-g(\nu(k)N),$$

だから，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(S(\nu(k+1)N)-S(\nu(k)N))<\varepsilon(S(\nu(k+1)N)+S(\nu(k)N))$$

これは，$\nu(k)$ の定義に反する．したがって，

$$g(\nu(k+1)N)-g(\nu(k)N)\geqq 1/8$$

がえられる．$k=0,1,2,\cdots,m-1$ とし，辺々加えて，

$$g(\nu(m)N)\geqq m/8+g(N).$$

ところで，

$$\log S(\nu(m)N)=\log\frac{S(\nu(m)N)}{S(\nu(m-1)N)}\cdot\frac{S(\nu(m-1)N)}{S(\nu(m-2)N)}\cdot\cdots\cdot\frac{S(\nu(1)N)}{S(\nu(0)N)}S(N))$$

$$\leqq \log A(\varepsilon)^{2m} S(N) .$$

したがって，$\nu(m)N \leqq n < \nu(m+1)N$ を満足する m を考えることにより，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\log S(n)} \geqq \lim_{m\to\infty} \frac{g(\nu(m)N)}{\log S(\nu(m+1)N)}$$

$$\geqq \lim_{m\to\infty} \frac{g(\nu(m)N)}{\log S(\nu(m)N) + 2\log A(\varepsilon)}$$

$$\geqq \lim_{m\to\infty} \frac{m/8 + g(N)}{(2m+2)\log A(\varepsilon) + \log S(N)} = \frac{1}{16\log A(\varepsilon)} .$$

εは任意だから，$\varepsilon \to 0$ として

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\log S(n)} = \infty$$

を得る． ［定理1の証明終り］

［定理2の証明］"確率変数 X が，分布関数 $F(x)$ を持っているとき，確率変数 $F(X)$ は一様分布をなす"．

このことより，$F(x)$ を

$$F(x) := \int_0^x d\mu = \mu([0,x)) \quad \text{on} \quad x \in [0,1]$$

とおき，$G(n)$ を

$$G(n) := [g(n)] + F(\{g(n)\})$$

とおくと，$G(n)$ は $(M, p(n))$-u.d. mod 1 である．
したがって，

$$\frac{G(n)}{\log S(n)} = \frac{[g(n)] + F(\{g(n)\})}{\log S(n)} \leqq \frac{g(n)+1}{\log S(n)}$$

であり，$S(n) \to \infty$ であるから，定理1より

$$\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{G(n)}{\log S(n)} \leqq \lim \frac{g(n)}{\log S(n)}$$

が，えられる．

[定理2の証明終り]

文　献

[1] H.Niderreiter : Distribution mod 1 of monotone sequences, Indag.Math. Vol.46,No.3,315-327(1984).

[2] P.Schatte : On H_∞-Summability and the Uniform Distribution of Sequences, Math.Nachr.113,237-243(1983).

[3] M.Tsuji: On the uniform distribution of numbers mod 1, J.Math.Soc. Japan 4, 313-322(1952).