数理解析研究所講究録
第708巻 1989年 63-76



# Euler積をもつゼータ関数の漸近的確率測度

岩手大学教育学部　松本 耕二
(Kohji MATSUMOTO)

本稿でゼータ関数と称するのは，次の形で定まるEuler積，及びそれを解析接続して得られる有理型関数のことである。即ち，$\mathbb{N}$，$\mathbb{C}$をそれぞれ自然数，複素数の全体とするとき，写像 $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ をまず与え，次に任意の $n \in \mathbb{N}$ と，$g(n)$ 以下の自然数 $j$ に対し，$a_n^{(j)} \in \mathbb{C}$ と $f(j,n) \in \mathbb{N}$ を与える。多項式

$$A_n(X) = \prod_{j=1}^{g(n)} \left(1 - a_n^{(j)} X^{f(j,n)}\right)$$

を用いて，$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\varphi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} A_n(p_n^{-s})^{-1}$$

とおく。これは形式的な無限積であるが，条件

$$|g(n)| \leqq C_1 p_n^{\alpha}, \quad |a_n^{(j)}| \leqq p_n^{\beta} \qquad (1)$$

$(C_1 > 0,\ \alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0)$ の下で半平面 $\sigma > \alpha + \beta + 1$ において絶対収束する。これが本稿で考えるゼータ関数である。

以下，$\mu_N$ で一般に $N$ 次元の Lebesgue 測度を表わす。$R$ を

$\mathbb{C}$ 内の，辺が座標軸に平行な勝手な閉長方形とし，$\sigma_0 > \alpha+\beta+1$ と $T>0$ に対し，

$$V(T,R)=V(T,R;\sigma_0)=\mu_1\{t\in[-T,T]\mid \log\varphi(\sigma_0+it)\in R\}$$

とおく。

<u>定理1</u>. $\sigma_0>\alpha+\beta+1$ に対し，極限値

$$W(R)=W(R;\sigma_0)=\lim_{T\to\infty}V(T,R;\sigma_0)/2T$$

が存在する。———

これを $\sigma=\sigma_0$ 上の $\log\varphi(s)$ の漸近的確率測度と呼ぶことにする。ただし $\log\varphi(s)$ は，主枝の和

$$\log\varphi(s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{g(n)}\mathrm{Log}(1-a_n^{(j)}p_n^{-f(j,n)s})$$

として定義するものとする。条件(1)の下で，右辺の各項は $\sigma>\beta$ で意味をもつことに注意しておく。

次に，$\alpha+\beta+\frac{1}{2}\leqq p<\alpha+\beta+1$ とし，$\varphi(s)$ が $\sigma\geqq p$ まで有理型に解析接続できるものと仮定する。半平面 $\sigma\geqq p$ の中に，$\varphi(s)$ の零点または極があれば，その点から直線 $\sigma=p$ へ下した垂線（即ち，$s_0$ を零点または極とするとき，$s_0=\sigma_0+it_0$ として，線分 $\{\sigma+it_0\mid p\leqq\sigma\leqq\sigma_0\}$）はすべて取り除き，残った部分を $G$ とする。すると $G$ 上では $\log\varphi(s)$ は，右側から解析接続していくことで一意に値が定まる。$p<\sigma_0\leqq\alpha+\beta+1$ なる $\sigma_0$ に対し，

$$V(T,R)=V(T,R;\sigma_0)=\mu_1\{t\in[-T,T]\mid \sigma_0+it\in G,\ \log\varphi(\sigma_0+it)\in R\}$$

とおく。このとき，

<u>定理２</u>．上記の仮定に加えて，さらに次を仮定する。

(i) $\sigma \geqq p$ における $\varphi(s)$ のすべての極はある compact set $B$ に含まれる。

(ii) ある $c>0$ があって，$|\varphi(s)| = O(|t|^c)$．　$(\forall s \in \{\sigma \geqq p\})$．

(iii)
$$\int_{-T}^{T} |\varphi(\sigma+it)|^2\, dt = O(T).$$

このとき，任意の $\sigma_0 > p$ に対して，極限値

$$W(R) = W(R;\sigma_0) = \lim_{T\to\infty} V(T,R;\sigma_0)/2T$$

が存在する。———

上述の二定理は，[9]において証明されているが，古典的な Bohr-Jessen の結果[1]の一般化を与えるものである。Bohr-Jessen は，$\varphi(s)$ が Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の場合に，相当に複雑かつ精緻な，凸の平面閉曲線の幾何学的な和に関する理論を展開し，これを一様分布論における Kronecker-Weyl の定理と組みあわせて $W(R)$ の存在証明を得ている。(その理論の大要は[10]にも紹介してあるので参照されたい。) 凸の閉曲線が出てくる理由を説明しておく。$\theta_n \in [0,1)$ に対し

$$z_n = z_n(\theta_n) = -\sum_{j=1}^{g(n)} \log\left(1 - a_n^{(j)} p_n^{-f(j,n)\sigma_0} e^{2\pi i f(j,n)\theta_n}\right),$$

$$\Gamma_n = \{ z_n(\theta_n) \mid 0 \leqq \theta_n < 1 \}$$

とおく。すべての $n$ に対して $\Gamma_n$ が凸の閉曲線になるとき，

Euler 積 $\varphi(s)$ は凸であるということにする。Riemann ゼータ関数では $g(n)=f(j,n)=a_n^{(j)}=1\ (\forall n, \forall j)$ であるから，$\Gamma_n$ は凸の曲線になり，従って $\zeta(s)$ は凸の Euler 積になる。Bohr－Jessen の原証明ではこの事実が本質的に用いられるので，凸でない Euler 積へ一般化することはできない。そして理論の本質は，長大な幾何学的議論の陰になってしまい，容易に見通すことができないものになっている。

しかしその直後，Jessen－Wintner [4] は全く異なる，P. Lévy の収束定理と反転公式に基づく確率論的証明を与えた。(この論文はいささか読みづらい。しかし同じ思想圏上に Borchsenius－Jessen [2] があり，こちらは大変ていねいに書かれている。) この論文では，凸の閉曲線の性質を用いて確率測度 $W_N$ (定義は後述) の密度関数 $F_N$ の存在を証明し，この $F_N$ を駆使して議論が進行する。従って一見，Jessen－Wintner 流の証明も凸でない Euler 積へは一般化できないように思える。しかしそうではないのであって，彼らの議論から $F_N$ への依存性を除去することがある程度可能であり，とくに $W$ の存在証明だけなら完全に可能である。こうして Jessen－Wintner の議論を再構成した，凸でない Euler 積に適用可能な $W$ の存在証明が，[8] に与えられている。それは一言でいえば，$W_N$ の Fourier 変換への Lévy の収束定理の適用である。

しかし実は，Fourier 変換に頼る必要すらないのであって，Prokhorov による確率論の一定理（証明は決して困難なものではない）を適用するだけで，W の存在は簡単に出てしまう。これが最初に[7]において，Hecke 作用素の同時固有関数であるようなモジュラー形式に付随するゼータ関数の場合に論じられ，次いで[9]において，冒頭に述べた形の一般的な Euler 積に対し，[7]におけるよりもさらに簡易化された形で与えられた証明である。

$N \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\varphi_N(s) = \prod_{n=1}^{N} A_n(p_n^{-s})^{-1}$$

なる $\varphi(s)$ の "finite cut form" を考え，

$$V_N(T, R) = \mu_1\{t \in [-T, T] \mid \log \varphi_N(\sigma_0 + it) \in R\}$$

とおく。また一方で，$N$ 次元トーラス $\mathbb{T}^N = [0, 1)^N$ から $\mathbb{C}$ への写像 $S_N : (\theta_1, \cdots, \theta_N) \longmapsto \sum_{n=1}^{N} z_n(\theta_n)$ を導入する。[9]における定理 1，2 の証明は，次の三段階から成る。

Step ①　$W_N(R) = \lim_{T\to\infty} V_N(T, R)/2T$ の存在証明。これは Kronecker-Weyl の定理により，$W_N(R) = \mu_N(S_N^{-1}(R))$ の形で示される。とくに $W_N$ が確率測度であることもわかる。

Step ②　$W(R) = \lim_{j\to\infty} W_{N(j)}(R)$ の存在証明。ただし $\{N(j)\}_{j=1}^{\infty}$ は $\{N\}$ の適当な部分列。これは，$\mathbb{C}$ 上の正則確率測度全体が（Prokhorov の距離に関して成す）完備距離空間の中で，$\{W_N\}_{N=1}^{\infty}$

が"tight"な部分集合であることを示し，それにProkhorovの定理[15]を適用して得られる。

Step③　このW(R)が，求める極限値 $\lim_{T\to\infty} V(T,R)/2T$ と一致すること。この部分はBohr-Jessenの原証明をmodifyするだけでよい。$\sigma_0 \leqq \alpha+\beta+1$ の場合，定理2の色々な付帯条件はこの段階で必要となる。

これで冒頭の定理1，2の証明が完結する。このようにして我々は，[10，p.56]に期待感をもって言及した如く，Bohr-Jessenの理論がゼータ関数の広いクラスに対する一般理論のひとつであることを，立証しえたわけである。

上記の証明は，Riemannの$\zeta(s)$に限って考えても，以前の証明に比べて非常に簡単なものであるが，また理論の本質を，Kronecker-Weylの定理とProkhorovの定理の結合という形で，透明感のあるものにしている。さらに，上述Step②の，$\{W_N\}$がtightであることの証明は，$\sigma_0 > \alpha+\beta+1$ においてはtrivialな内容になってしまう。即ち，絶対収束域という"明らかであるべき範囲"では確かに"明らかである"という意味で，（Bohr-Jessen理論の以前の証明に比して）我々の証明は自然なものと考えられる。

ここで定理2の付帯条件についてコメントしておく。三条件のうち(i)，(ii)は実用上は殆んど何の制約にもなっていない

といえるが，本質的な条件は(iii)であって，例えば代数体Kの Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ に対し，(iii)が示されているのは $\sigma > 1 - \frac{1}{\ell}$ （$\ell = \mathrm{Max}\{[K:\mathbb{Q}],\ 2\}$）の範囲にすぎず，従って W の存在もこの範囲でしかいえない。（Chandrasekharan-Narasimhan [3] を見よ.）しかしながら，次の一般的結果がある。

<u>定理</u>（Potter [14]）

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad f_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \quad (a_n,\ b_n \in \mathbb{C})$$

の係数が，$\sum_{n \le x} |a_n|^2 = O(x^{\gamma+\varepsilon})$, $\sum_{n \le x} |b_n|^2 = O(x^{\gamma+\varepsilon})$ を（ある $\gamma > 0$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して）みたし，かつ関数等式が $f_1(s) = H(s) f_2(\alpha - s)$, $H(s) = O(|t|^{c(\frac{1}{2}\alpha - \sigma)})$, $H(s)^{-1} = O(|t|^{c(\sigma - \frac{1}{2}\alpha)})$ $(c>0)$ の形に成り立つとする。このとき，$\sigma > \mathrm{Max}\{\frac{1}{2}\alpha,\ \frac{1}{2}(\gamma+1) - \frac{1}{c}\}$ において，

$$\int_{-T}^{T} |f_j(\sigma+it)|^2\, dt = O(T) \qquad (j=1,\ 2)$$

が成り立つ。————

この定理によって，関数等式の形を見るだけで，条件(iii)の check ができる。そして，かなり広いクラスの $\varphi(s)$ に対して定理2が適用可能であることがわかる.

さて次に，公式 $W(R) = \lim_{T\to\infty} V(T,R)/2T$ をさらに詳しく解析していこう。研究対象としてまず考えられるのは，

量 W(R) そのものと，右辺の $\lim_{T\to\infty}$ の W(R) への近づき方であろう。

この第2の問題に関しては，$W(R)-\frac{1}{2T}V(T,R)$ なる“誤差”を，T の関数として考察する，あるいは評価するという問題設定が考えられるが，それは筆者が [6][11] において（部分的には宮崎哲朗氏との共著で）扱った問題であって，そこで得られた結果は，$\varphi(s)=\zeta_K(s)$ （K : Galois）のとき，

$$W(R)-\frac{1}{2T}V(T,R)$$
$$=O\left(\mu_2(R)\cdot(\log\log T)^{-A+\varepsilon}+(\log\log T)^{-B}\right), \qquad (2)$$

ここに

$$A=\begin{cases}\frac{1}{7}(\sigma_0-1) & (\sigma_0>1)\\ \frac{1}{15}(2\sigma_0-1) & (1-\frac{1}{\ell}<\sigma_0\leqq 1),\end{cases}$$

$$B=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sigma_0-1) & (\sigma_0>1)\\ \frac{1}{5}(2\sigma_0-1) & (1-\frac{1}{\ell}<\sigma_0\leqq 1),\end{cases}$$

と表わせる。ただし上記論文では，$\varphi(s)$ が Riemann ゼータ関数の場合のみを扱っているが，同じ証明が任意の Galois 数体 K の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ に対しても成立するので，ここではその形で記述した。

上記の評価は，Bohr－Jessen の凸閉曲線の理論に基づいて得られたものだが，これをある程度，確率論的手法におきかえることができる。Fourier 変換を用いて密度関数 $F_N$ の評

価に帰着させることにより，上記の結果を次のように改良することができる。Galois 数体 K の $\zeta_K(s)$ に対して，

**定理3.**（[8]）評価式(2)において，

$$A = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sigma_0 - 1) & (\sigma_0 > 1) \\ \frac{1}{5}(2\sigma_0 - 1) & (1 - \frac{1}{\ell} < \sigma_0 \leqq 1) \end{cases}$$

$$B = 2\sigma_0 - 1$$

ととることができる。————

ただし，密度関数を用いる関係上，凸な Euler 積でないとうまくいかない。（K が $\mathbb{Q}$ の Galois 拡大体なら，$\zeta_K(s)$ は凸の Euler 積になる。）凸でない Euler 積に対してこの種の定量的な評価を得ることにはまだ成功していない。

次に，第1の問題，即ち量 W(R) の考察にうつる。先に述べた定理1，2の証明の Step②で，$\{W_N\}_{N=1}^{\infty}$ が tight であることを主張した。即ち，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\varepsilon$ のみで定まる compact set $K \subset \mathbb{C}$ があって，$W_N(\mathbb{C} - K) < \varepsilon$ が（N について一様に）成り立つ。 $W = \lim_{N\to\infty} W_N$ も同じ性質をもつ。つまり長方形 R が原点から遠ざかると，W(R) は小さくなっていくわけであるが，その減衰の速さはどれほどであろうか。

これについてはまず，Step② の tightness の証明方法をより詳しくすることにより，次の結果が得られる。

<u>定理4.</u> $\varphi(\Delta)$ が定理2の仮定をみたすとする。$a>0$，$\lambda>0$ とすると，$\lambda$ と $\sigma_0$ のみで定まる正定数 $C$ があって，

$$W(\{z \mid |z|>3a\}) \leqq Ce^{-\lambda a^2}$$

が成り立つ。———

従ってもちろん，$|z|>3a$ に含まれる長方形を $R$ とすると，$W(R)$ に対し同じ評価が成り立つ。

この結果は，Jessen-Wintner [4] によって凸な場合には既に示されている。その論法を凸でない時にも使えるように書き直すことで，[7] においてHecke作用素の同時固有関数であるcusp form に対応するゼータ関数の場合に上の結果が証明され，[7] ではその結果がtightnessの証明として用いられている。一般の $\varphi(\Delta)$ に対しても，技術的に多少厄介になるだけで，同じ結論を示すことができるわけである。(Tightnessの証明そのものは，[9] において簡易化された。)

Jessen-Wintnerの評価は，最近に至るまで唯一のものであったが，Riemannゼータ関数（とDirichlet L-関数）の場合，Joynerによって次のような改良が与えられた。

<u>定理</u>（Joyner [5]）. $\frac{1}{2}<\sigma_0<1$ とする。$\sigma_0$ のみによって定まる正定数 $c_1, c_2, r_0$ $(c_1>c_2)$ があって，任意の $r \geqq r_0$ に対し，

$$\exp\left(-c_1 r^{\frac{1}{1-\sigma_0}}(\log r)^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0}}\right) \leqq W(|z|>r) \leqq \exp\left(-c_2 r^{\frac{1}{1-\sigma_0}}(\log r)^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0}}\right).$$

が成り立つ。———

この結果は定数因子を除いて，Wの減衰の真のorderを与えているすばらしいものであるが，実はMontgomeryによる確率論的なひとつの補題の，簡単な系にすぎない。その補題というのは，次のようなものである。

補題（Montgomery [12]. Montgomery - Odlyzko [13] も参照のこと.）
$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots)$ を無限次元トーラス $\mathbb{T}^\infty$ の元とし，$P$ を $\mathbb{T}^\infty$ 上のLebesgue測度とする。（これはもちろん確率測度.）$\{r_k\}$ を正の実数の，単調減少で $\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2<+\infty$ なる無限列とする。このとき，実確率変数

$$f(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty} r_k \sin 2\pi\theta_k$$

は概収束し，$\forall K\geqq 1$ に対し，

(i) $$P\left(f(\theta)\geqq 2\sum_{k=1}^{K} r_k\right)\leqq \exp\left\{-\frac{3}{4}\left(\sum_{k=1}^{K} r_k\right)^2\left(\sum_{k>K} r_k^2\right)^{-1}\right\}$$

(ii) $$P\left(f(\theta)\geqq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} r_k\right)\geqq 2^{-40}\exp\left\{-100\left(\sum_{k=1}^{K} r_k\right)^2\left(\sum_{k>K} r_k^2\right)^{-1}\right\}$$

である。———

Joynerの定理は，上の補題をRiemannゼータ関数の場合に適用し，さらに(i), (ii)の右辺の量を素数定理を用いて計算することで得られる。補題の証明自体も，（[12]に載っているのはMontgomeryの原証明ではなく，Odlyzkoによる別証明とのことだが，少くともそれは）初等的で容易なものである。

我々の一般的な $\varphi(s)$ に対しても，Montgomery の補題を適用して，$W(|z|>r)$ の上下からの評価式を得ることが（上からは全く一般に，下からはある特殊な場合に）できる．その形は少し繁雑なのでここには書き下さないが，いずれにしてもそれは中途半端な結果であって，Joyner 型の定理を得るためには，Joyner が素数定理を用いたように，$\varphi(s)$ に対する何らかの"素数定理的なるもの"を用いなければならない。従ってここには $\varphi(s)$ の数論的性質が反映してくるので，議論は簡単ではない。現在までの所，唯一満足すべき形の評価式が得られているのは，$\varphi(s)$ が $\mathbb{Q}$ の Galois 拡大 $K$ の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ の場合であって，素イデアル定理によって

$$\exp\left(-c_1(\sigma_0)\,l^{-1}\,r^{\frac{1}{1-\sigma_0}}(\log r)^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0}}\right) \leqq W(|z|>r)$$
$$\leqq \exp\left(-c_2(\sigma_0)\,l^{-1}\,r^{\frac{1}{1-\sigma_0}}(\log r)^{\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0}}\right)$$

（$c_1(\sigma_0)$, $c_2(\sigma_0)$ は $\sigma_0$ のみによる正定数）

なる評価を導出することができる．しかし例えば Hecke の $L$ 関数にすると，もう上手くいかなくなる。確率論的な枠組で（Kronecker-Weyl の定理を殆んど唯一の数論的援用手段として）進んできた Bohr-Jessen の理論は，ここにきてはじめて，より深い数論的困難に遭遇したように思われるのである。

## 文献


[1] H. Bohr - B. Jessen, Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Erste Mitteilung, Acta Math. 54 (1930) 1–35; Zweite Mitteilung, ibid. 58 (1932) 1–55.

[2] V. Borchsenius - B. Jessen, Mean motions and values of the Riemann zeta function, ibid. 80 (1948) 97–166.

[3] K. Chandrasekharan - R. Narasimhan, The approximate functional equation for a class of zeta-functions, Math. Ann. 152 (1963) 30–64.

[4] B. Jessen - A. Wintner, Distribution functions and the Riemann zeta function, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935) 48–88.

[5] D. Joyner, Distribution theorems of L-functions, Longman Scientific & Technical, 1986.

[6] K. Matsumoto, Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function I, Acta Arith. 48 (1987) 167–190; II, in "Number Theory and Combinatorics, Japan 1984", ed. by J. Akiyama et al., World Scientific (1985) 265–278; III, Acta Arith. 50 (1988) 315–337.

[7] ——, A probabilistic study on the value-distribution of Dirichlet series attached to certain cusp forms, Nagoya Math. J. 116 (1989) to appear.

[8] ——, Asymptotic probability measures of zeta-functions of algebraic number fields, preprint.

[9] ——, Value-distribution of zeta-functions, preprint.

[10] ——, $\zeta(s)$の値分布論, 京大数理研講究録 572 (1985) 37-68; II, 数学若手の会会報 39 (1986) 76-86.

[11] K. Matsumoto - T. Miyazaki, On some hypersurfaces of high-dimensional tori related with the Riemann zeta-function, Tokyo J. Math. 10 (1987) 271-279.

[12] H. L. Montgomery, The zeta function and prime numbers, in "Proc. Queen's Number Theory Conference, 1979", ed. by P. Ribenboim, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. 54, Queen's Univ. (1980) 1-31.

[13] H.L. Montgomery - A.M. Odlyzko, Large deviations of sums of independent random variables, Acta Arith. 49 (1988) 427-434.

[14] H.S.A. Potter, The mean values of certain Dirichlet series I, Proc. London Math. Soc. 46 (1940) 467-478.

[15] Yu. V. Prokhorov, Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 1 (1956) 177-238. = Theory of Probab. Appl. 1 (1956) 157-214.

(1989年10月4日)