数理解析研究所講究録
第708巻 1989年 120-129

Mahlerの方法の応用

東北大学　天羽雅昭　(Masaaki Amou)

ここで言うMahlerの方法とは、関数 $f_r(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{r^\nu}$ ($r\in\mathbb{Z}$, $r\geqq 2$) のように、特殊な関数方程式 ($f_r(z)$ の場合は、$f_r(z^r)=f_r(z)-z$) をみたす解析関数の特殊値の超越性や代数的独立性を示すために、この関数等式を有効に利用する方法のことである。我々はこの方法で２つの結果を得た。1つはGalochkinによる超越測度の改良で、これはMahlerのS－数について多少詳しい情報を与える。他の1つは上述のような関数たちが超越数でとる値たちの代数的独立性についてのもので、これは指数関数や楕円関数について既に得られている結果の類似物とみなせる。

§1. Galochkinの定理の改良

Kを有限次代数体とする。$f(z)$ は原点のある近傍Uで正則な超越関数で、次の関数等式をみたすとする：

$$(1.1)\qquad f(Tz)=\frac{A_1(z,\ f(z))}{A_2(z,\ f(z))}\ ,\quad Tz=z^r\quad (r\in\mathbb{Z},\ r\geqq 2),$$

ここに $A_i(z,y)=a_{i1}(z)y+a_{i2}(z)\in K[z,y]$ $(i=1,2)$ である。さらに、$f(z)$ の原点でのテーラー展開の係数は、全て体 K の元であると仮定する。$\alpha\in\mathfrak{O}$ は代数的数で、$0<|\alpha|<1$ かつ

$$(1.2)\qquad \det\left(a_{ij}(T^k\alpha)\right)_{i,j=1,2}\neq 0\ ,\quad k=0,1,2,\cdots$$

をみたすとする。この条件は $A_2(T^k\alpha,\ f(T^k\alpha))\neq 0$ $(k=0,1,2,\cdots)$ を保障する。

上記のもとで、Mahler [7] は $f(\alpha)\notin\mathfrak{O}$ を示した（[7] の結果は、実際はもっと一般的なものである）。Galochkin [5] はこれを定量化し、次の結果を得た（[5] の結果は、多変数関数について定式化されている）：

<u>定理</u>（Galochkin [5]）。上記のもとで、さらに、$P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ を次数 $\leqq d$, height $\leqq h$ なるものとせよ。

$$b:=\chi_1^{-1}\log L(\alpha),\quad c:=\log|\alpha|^{-1}\quad \text{及び}\quad \chi_0:=[K(\alpha):\mathbb{Q}]$$

とおく；ここに χ_1 は α の次数、$L(\alpha)$ は α の length。このとき $h>>0$ に対して

$$|P(f(\alpha))|>h^{-(2r+1)^2bc^{-1}\chi_0^2d}$$

が成り立つ。——

これを改良した我々の結果を定式化するために、Mahler

のS－数について簡単に述べておく。$d \in \mathbb{N}$について、$\mathcal{P}(d) := \{ P(x) \in \mathbb{Z}[x] ; \deg(P) \le d \}$とおく。$\omega \in \mathbb{C}$について

$$|P(\omega)| > h^{-\theta d}, \quad P(x) \text{ の height} \le h$$

が$h \gg 0$なる全ての$P(x) \in \mathcal{P}(d)$に対して成り立つようなθの下限を$\theta_d(\omega)$、列$\{\theta_d(\omega)\}_{d \in \mathbb{N}}$の上極限を$\theta(\omega)$とする。$\omega$が$0 < \theta(\omega) < \infty$をみたすとき、$\omega$をS－数と呼ぶ。このとき、$\theta_d(\omega)$の上限を$\omega$のタイプと呼ぶ。Galochkinの定理は、$f(\alpha)$がタイプ$(2r+1)^2 bc^{-1}\chi_0^2$以下のS－数であることを主張している。

我々の結果は次の通り：

<u>定理1</u>（天羽[2]）．Kを有限次代数体とする。$f(z)$は原点のある近傍Uで正則な超越関数で、$a_{ij}(z) \in K[z]$（$i,j = 1,2$）について関数等式（1.1）をみたすとする。さらに$f(z)$の原点でのテーラー展開の係数は、全て体Kの元であると仮定する。$\alpha \in U$は代数的数で、$0 < |\alpha| < 1$かつ（1.2）をみたすとする。

$$b := \chi_1^{-1} \log M(\alpha), \quad c := \log|\alpha|^{-1} \quad \text{及び} \quad \chi_0 := [K(\alpha) : \mathbb{Q}]$$

とおく；ここにχ_1はαの次数、$M(\alpha)$はαのMahler measure（Mahler[8]により、$M(\alpha) \le L(\alpha)$が成り立つ）このとき、任意の$d \in \mathbb{N}$に対して

$$\theta_d(f(\alpha)) \le r(1 + 1/\sqrt{r})^2 bc^{-1}\chi_0^2 + 1 - \frac{1}{d}$$

が成り立つ。特に、$f(\alpha)$ はタイプ $r(1+1/\sqrt{r})^2 bc^{-1}\chi_0^2+1$ 以下の S－数である。――

系. 関数 $f_r(z)$ を

(1.3) $$f_r(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{r^\nu} \quad (r\in\mathbb{Z},\ r\geqq 2)$$

で定義されるものとし、$a\in\mathbb{Z}$ を $|a|\geqq 2$ なるものとする。

$$d_0:=\begin{cases}\dfrac{r-2}{2}, & r\text{ は偶数},\\ \dfrac{r-1}{2}, & r\text{ は奇数},\end{cases}$$

とおく。このとき、次が成り立つ：

$$\begin{cases}\theta_d(f_r(1/a))=\dfrac{r-1}{d}, & d=1,\cdots,d_0,\\ \dfrac{r-1}{d}\leqq\theta_d(f_r(1/a))\leqq\dfrac{r}{r-d}, & d=d_0+1,\cdots,r-1,\\ \theta_d(f_r(1/a))\leqq r(1+1/\sqrt{r})^2+1-\dfrac{1}{d}, & d\geqq r.\end{cases}$$

特に、$f_r(1/a)$ はタイプ $r-1$ 以上 $r(1+1/\sqrt{r})^2+1$ 以下の S－数である。――

証明の詳細については天羽[2]を参照してもらうとして、ここでは本質的な点についてのみ述べておく。Galochkin の証明でも我々の証明でも補助関数

$$R(z)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a(i,j)\,z^i f(z)^j \neq 0$$

を作る；ここに $m,n\in\mathbb{N}$ はパラメータで、$a(i,j)\in K$ かつ

$$\mathrm{ord}\,R(z)\geqq(m+1)n$$

をみたす（$\mathrm{ord}\,R(z)$ は，原点の、$R(z)$ の零点としての位数を表わす）。Galochkin[5] では、

$$\operatorname{ord} R(z) \le mn(1 + r + o(1)), \quad \frac{m}{n} \to 0$$

を証明し、これを本質的に使っている。この評価は一般的には最良に近いが（$f(z)$が（1・3）の$f_r(z)$で、$R(z) = f_r(z) - z$の場合を考えてみよ）、mに応じて改良できると思われる。このことを証明できれば、我々の結果よりも良い結果を示せるはずだが、今のところ証明できない。そこで次のような考察をする。$S(m,n) := \{ R(z,y) \in K[z,y] ; \deg_z R \le n, \deg_y R \le m, \operatorname{ord} R(z, f(z)) \geqq (m+1)n \}$とし、

$$\lambda(m,n) := \sup\left\{ \frac{1}{(m+1)n} \operatorname{ord} R(z, f(z)) \ ; \ R(z,y) \in S(m,n) \right\}$$

とおく。さらに、

$$\lambda(m) := \limsup_{n \to \infty} \lambda(m,n)$$

とおく。そして、$\lambda(m) \geqq \sqrt{r}$か$\lambda(m) < \sqrt{r}$かで場合に分けて議論することで我々の結果を得る。

定理の系の証明には天羽[1], Lemma 1を用いる。なお、我々は次を予想する：

<u>予想</u>．系の仮定のもとで、

$$\theta_d(f_r(1/a)) = \begin{cases} \dfrac{r-1}{d}, & d = 1, \cdots, r-1, \\ 1, & d \geqq r. \end{cases}$$

§2．代数的独立性

Kを有限次代数体とする。$f_i(z)$ ($i=1,2,3$) は原点のある近傍Uで正則な超越関数で、$f_i(0)\in K$ 及び (1.1) の特殊な場合である次の関数等式をみたすとする:

(2.1) $f_i(z)=a_i(z)f_i(Tz)+b_i(z)$, $Tz=z^r$ ($r\in\mathbb{Z}, r\geq 2$),

ここに $a_i(z), b_i(z)\in K[z]$。このとき、$f_i(z)$ の原点でのテーラー展開の係数は、全てKの元であることに注意する。

我々の結果は次の通り:

<u>定理2</u>(天羽[3]). 上記のもとで、さらに、$f_i(z)$ ($i=1,2,3$) たちは $K(z)$ 上代数的独立であると仮定する。ω は超越数で、$\omega\in U$ かつ $0<|\omega|<1$ をみたすとする。このとき、次の4つの数

$$\omega,\ f_1(\omega),\ f_2(\omega),\ f_3(\omega)$$

の中の少くとも2つは $\mathbb{Q}$ 上代数的独立である。——

$f_r(z)$ を (1.3) の関数とすれば、Loxton-van der Poorten [6] より、$f_r(z), f_r(z^2), \cdots, f_r(z^{r-1})$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立である。よって、定理の系として次を得る:

<u>系</u>. $r\in\mathbb{N}$ を4以上とし、$f_r(z)$ を (1.3) の関数とする。ω を $0<|\omega|<1$ なる超越数とすれば、次の4つの数

$$\omega,\ f_r(\omega),\ f_r(\omega^2),\ f_r(\omega^3)$$

の中の少くとも2つは $\mathbb{Q}$ 上代数的独立である。——

最初にも述べたように、我々の結果は指数関数や楕円関数

について既に得られている結果の類似物であり、Gelfond の判定基準を使うその証明も、それらの証明にならっている。ここでは参考までに、Tijdeman [11] の結果を挙げておく（Waldschmidt [12], Chap. 7 をも参照）：

<u>定理</u>（Tijdeman [11]）．　α を 0，1 と異なる代数的数とし、ω を超越数とする。このとき、次の 5 つの数

$$\omega,\ \alpha^{\omega},\ \alpha^{\omega^2},\ \alpha^{\omega^3},\ \alpha^{\omega^4}$$

の中の少くとも 2 つは $\mathbb{Q}$ 上代数的独立である。——

さて、定理 2 の証明は背理法で行なう。即ち、体 $F := K(\omega, f_i(\omega);\ i=1,2,3)$ の $\mathbb{Q}$ 上の超越次数が 1 であると仮定して矛盾に導く。簡単のために $K=\mathbb{Q}$ とする。$g>0$ を $1<\delta := \log r/\log g < 2$ なる実数とし、$N_k := [g^k]$ $(k\in\mathbb{N})$ とおいて、補助関数

$$R_k(z) = \sum_{i_0=0}^{N_k}\sum_{i_1=0}^{N_k}\sum_{i_2=0}^{N_k}\sum_{i_3=0}^{N_k} a(i_0,i_1,i_2,i_3)\, z^{i_0} f_1(z)^{i_1} f_2(z)^{i_2} f_3(z)^{i_3}$$

を作る；ここに $a(i_0,i_1,i_2,i_3)\in\mathbb{Z}$ は全ては 0 ではなく、

$$\operatorname{ord} R_k(z) \geq \tfrac{1}{2}N_k^4 \quad \text{かつ} \quad |a(i_0,i_1,i_2,i_3)| \leq e^{c_1 N_k \log N_k}$$

をみたす（c_1 は $f_i(z)$ たちのみによる定数）。これは Siegel の補題（[12], Lemma 1.3.1）及び $f_i(z)$ の中の係数の絶対値と分母の評価（Becker [4], Lemma 1）によって可能である。$f_i(z)$ $(i=1,2,3)$ たちの代数的独立性についての仮定より、$R_k(z)\neq 0$ である。$H_k := \operatorname{ord} R_k(z)$ とし，$k'\in\mathbb{N}$ を

$$\frac{1}{3}q^{4k'} \le H_k < \frac{1}{3}q^{4(k'+1)}$$

によって定めると、$k \gg 0$ のとき、$\Gamma_k := R_k(T^{k'}\omega) \neq 0$ であることを示せる。この Γ_k の $\mathbb{Q}(\omega)$ 上のノルムをとってから適当に整化したものを $P_k(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$ とし、列 $\{P_k(\omega)\}_{k \in \mathbb{N}}$ に Gelfond の判定基準（[11], Lemma 6 または [12], Théorème 5.1.1）を適用して $\omega \in \overline{\mathbb{Q}}$ を導き、矛盾に到る。これがうまくいくのは、西岡[10] による不等式

$$\operatorname{ord} R_k(z) \le c_2 N_k^4$$

による（c_2 は $f_i(z)$ たちのみによる正の定数）。なお、上述のパラメータ N_k のとり方や Γ_k の作り方は、西岡[9]の議論に負うところ大である。

最後に、原瀬氏からも指摘があった、次の問題を挙げておく：

<u>問題</u>．定理２を、関数の個数を増やして、代数的独立な数の個数の下界が２よりも大きくなるような形に拡張せよ。

References

[1] M. Amou, Approximation to certain transcendental decimal fractions by algebraic numbers, to appear.

[2] M. Amou, An improvement of a theorem of Galochkin on transcendental measure and Mahler's S-numbers, to appear.

[3] M. Amou, On the algebraic independence of certain numbers by a method of Mahler, to appear.

[4] P.-G. Becker-Landeck, Transcendence measure by Mahler's transcendence method, Bull. Austral. Math. Soc. 33 (1986), 59-65.

[5] A.I. Galochkin, Transcendence measure of values of functions satisfying certain functional equations, Math. Notes 27 (1980) 83-88.

[6] J.H. Loxton and A.J. van der Poorten, Algebraic independence properties of the Fredholm series, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 26 (1978), 31-45.

[7] K. Mahler, Arithmetische Eigensschften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, Math. Ann. 101 (1929), 342-366.

[8] K. Mahler, An application of Jensen's formula of polynomials Mathematika 7 (1960), 98-100.

[9] K. Nishioka, On a probrem of Mahler for transcendency of function values, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 33 (1982), 386-393.

[10] K. Nishioka, On a estimate for the orders of zeros of Mahler type functions, to appear.

[11] R. Tijdeman, On the algebraic independence of certain numbers, Indag. Math. 33 (1971), 146-162.

[12] M. Waldschmidt, Nombres Transcendants, Lecture Notes in Math.

402, Springer-Verlag, 1974.