

積空間 $X \times X$ の次元と $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ の $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ における稠密性

山口大・教育 服部 泰直 (Yasunao Hattori)

§1. Introduction.

ここで考える空間は、すべて距離空間とする。

定義 1.1 空間 X から n 次元立方体 I^n への写像 $f: X \rightarrow I^n$ は、 $f|_{f^{-1}(\partial I^n)} = g|_{f^{-1}(\partial I^n)}$ となる写像 $g: X \rightarrow \partial I^n$ が存在しなるとき、essential と呼ばれる。このことは、 f の任意の *admissible deformation* が *surjective* であることと、同等である。

定義 1.2 写像 $f: X \rightarrow I^n$ と X の部分集合 A に対して、 $f|_A: A \rightarrow I^n$ が *essential* となるとき、 A を f の membrane とする。

よく知られているように、 I^2 の \mathcal{M} の *subcontinuum* A と B で、 A が I^2 の一組の *opposite faces* と交わり、 B

が、もう一方の *opposite faces* と交わるならば、 $A \cap B \neq \emptyset$ である。ここで、 $\pi_1: I^2 \rightarrow I$ を I^2 から一座標への射影とし、 $\pi_2: I^2 \rightarrow I$ を I^2 から二座標への射影とする。このとき、上のことは、次のように言い換えることができる。「 $A \in \pi_1$ の compact membrane, $B \in \pi_2$ の compact membrane とすると、 $A \cap B \neq \emptyset$ である。」

McCullough - Rubin [8] は、この結果を、より高次元で成り立つかどうか考えた。即ち、次の問題を考えた。

McCullough - Rubin の問題 $f = (f_1, f_2): X \rightarrow I^m \times I^n$ を同相写像とし、 $A, B \in$ それぞれ f_1, f_2 の compact membranes とする。このとき、 $A \cap B \neq \emptyset$ が成り立つであろうか？

そして彼らは、次の定理を発表した。

定理 A (McCullough - Rubin [8]). m, n を正の整数とし、 $p_1: I^m \times I^n \rightarrow I^m$, $p_2: I^m \times I^n \rightarrow I^n$ を射影とする。更に、 $A, B \in$ それぞれ p_1, p_2 の compact membranes とする。このとき、 $\dim A = m$, $\dim B = n$ ならば、 $A \cap B \neq \emptyset$ である。

空間 X に対して

$$C(X, \mathbb{R}^{2n}) = \{ f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \text{ is continuous} \}$$

with the sup-norm topology

とし

$$E(X, \mathbb{R}^{2n}) = \{ f \mid f \in C(X, \mathbb{R}^{2n}) \text{ and } f \text{ is an homeo. embedding} \}$$

とある。さて、McCullough - Rubin は、定理 A を使って次を証明した。

定理 B. (McCullough - Rubin [8, Thm. 3.7]).

compactum X に対し、 $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ で稠密であることと、 $\dim X < n$ であることが同等である。

ところが、最近 Krasinkiewicz - Lorentz は、[7] の中に誤りを見つけ、定理 A に対する反例を構成した。

定理 C (Krasinkiewicz - Lorentz [7]). 任意の $m \geq 2$, $n \geq 2$ に対し、 $A \cap B = \emptyset$ なる m -dimensional compact membrane A of $p_1: I^m \times I^n \rightarrow I^m$ と n -dimensional compact membrane B of $p_2: I^m \times I^n \rightarrow I^n$ が存在する。

従って、次に定理Bの真偽も問われることになった。これについても最近、McCullough - Rubin自身により否定されることになった。

定理D (McCullough - Rubin [9]) 任意の $n \geq 2$ に対し、 $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ において稠密である n 次元 compactum X が存在する。

注意 $n = 1$ の場合については、定理Bは正しいことに注意しておく。ちなみに、

$$\dim X = 0 \Leftrightarrow E(X, \mathbb{R}^2) \text{ は } C(X, \mathbb{R}^2) \text{ で稠密}$$

そこで、彼らは n 次元 compactum X について " $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ で稠密である " という条件が " $\dim X \times X < 2n$ " という条件と等しいかの関係が有りだろうか? という問題を提起した。ここでは、この問題に1つの解答を手に入れた Krasinkiewicz の結果について、解説する。

§2. 定理とその証明

本稿で解説する結果は、次である。

定理 2.1 (Krasinkiewicz [6, Thm 1.1]) $n \geq 1$ とし、 $X \in \dim X = n$ なる compactum とする。このとき、 $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ で稠密であるならば、 $\dim X \times X < 2n$ である。

定理を証明するには、いくつかの補題が必要である。

補題 2.1 ([7, Lemma 2.2]) 写像 $f = (f_1, f_2): X \rightarrow I^m \times I^n$, $g = (g_1, g_2): Y \rightarrow I^m \times I^n$ が $f(X) \cap g(Y) = \emptyset$ を満たすとする。このとき、 $f_1 \times g_2: X \times Y \rightarrow I^m \times I^n$ は *inessential* である。

証明 今 $f_1 \times g_2$ が *essential* であると仮定する。このとき、 $f_1 \times g_2$ は *universal* である、i.e. 任意の写像 $h: X \times Y \rightarrow I^m \times I^n$ に対し $(f_1 \times g_2)(x, y) = h(x, y)$ とする $(x, y) \in X \times Y$ が存在する。さて、 $T: X \times Y \rightarrow Y \times X$ に $T(x, y) = (y, x)$ により定義する。 $(g_1 \times f_2) \circ T: X \times Y \rightarrow I^m \times I^n$ に対し、 $f_1 \times g_2$ の *universality* を適用すると、 $(f_1(x), g_2(y)) = (g_1(y), f_2(x))$

なる $(x, y) \in X \times Y$ が存在する。従ってこのとき、

$$f_1(x) = g_1(y) \quad \text{かつ} \quad f_2(x) = g_2(y), \quad \text{故に} \quad (f_1(x), f_2(x)) =$$

$$(g_1(y), g_2(y)). \quad \text{これは} \quad f(X) \cap g(Y) = \emptyset \quad \text{なる仮定に反}$$

する。従って、 $f_1 \times g_2$ は *inessential* である。

定義 2.1. $D^n \in \mathbb{R}^n$ の中の *closed unit ball*

とする。 $f: X \rightarrow D^m$, $g: Y \rightarrow D^n$ に対して、次

の条件 (i), (ii), (iii) を満たす写像 $F: X \rightarrow D^m \times D^n$ と

$G: Y \rightarrow D^m \times D^n$ が存在するとき、 f は g に関して、

transversely trivial であるといわれる。

$$(i) \quad F|_{f^{-1}(\partial D^m)} = (f, 0) |_{f^{-1}(\partial D^m)},$$

$$(ii) \quad G|_{g^{-1}(\partial D^n)} = (0, g) |_{g^{-1}(\partial D^n)},$$

$$(iii) \quad F(X) \cap G(Y) = \emptyset,$$

ただし、 0 は $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ の定値写像

とする。

そして、 f が g に関して *transversely trivial* であるとき

を、 f と g は *transversely essential* であるといわれる。

写像 f は、それ自身に関して *transversely trivial* である

とき、単に *transversely trivial* と呼ばれる。

補題 2.2. $f \times g: X \times Y \rightarrow D^m \times D^n$ が *essential*

ならば、 f と g は transversely essential である。

証明 f と g が transversely trivial と仮定する。このとき、定義 2.1 の条件 (i), (ii), (iii) をみたす 2 つの写像 $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow D^m \times D^n$ と $G : Y \rightarrow D^m \times D^n$ が存在する。 (iii) と補題 2.1 より $f_1 \times g_2 : X \times Y \rightarrow D^m \times D^n$ は inessential。また (i), (ii) より

$$f_1 | f_1^{-1}(\partial D^m) = f | f^{-1}(\partial D^m),$$

$$g_2 | g_2^{-1}(\partial D^n) = g | g^{-1}(\partial D^n).$$

従って、 $f_1 \times g_2$ は $f \times g$ の admissible deformation である。従って [5, Proposition 1.1 (b)] より $f \times g$ は inessential とならなければならぬ。これは、我々の仮定に反する。故に、 f と g は transversely essential である。

補題 2.3 $f : X \rightarrow D^m$ と $g : Y \rightarrow D^n$ が transversely essential であるとする。このとき、次をみたす正数 ε が存在する： 任意の 2 つの写像 $F : X \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ と $G : Y \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ が $d(F, (f, 0)) < \varepsilon$, $d(G, (0, g)) < \varepsilon$ をみたすならば、 $F(X) \cap G(Y) \neq \emptyset$ 。

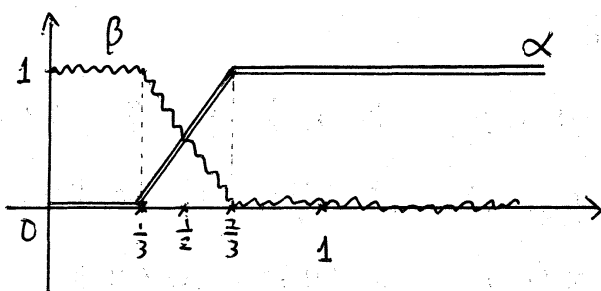
証明 $\varepsilon = 1/6$ とする。 F と G 上の仮定をみたす任

意の写像とする。次のような2つの写像 $\alpha, \beta : [0, \infty)$

$\rightarrow [0, 1]$ を考える。

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & , & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 6t - 3 & , & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 1 & , & t \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & , & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -6t + 4 & , & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 0 & , & t \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$



さて、 $F' : X \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $G' : Y \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ を次のように定義する。

$$F'(x) = ((1 - \alpha(|f_1(x)|)) f_1(x) + \alpha(|f_1(x)|) f(x), \beta(|f_1(x)|) f_2(x))$$

$$G'(y) = (\beta(|g_2(y)|) g_1(y), (1 - \alpha(|g_2(y)|)) g_2(y) + \alpha(|g_2(y)|) g(y))$$

このとき、次が成り立つ：

$$\text{im } F' \cup \text{im } G' \subset D^m \times D^n,$$

$$F' |_{f^{-1}(\partial D^m)} = (f, 0) |_{f^{-1}(\partial D^m)},$$

$$G' |_{g^{-1}(\partial D^n)} = (0, g) |_{g^{-1}(\partial D^n)}$$

と、 f と g は transversely essential である。

で、 $F'(X) \cap G'(Y) \neq \emptyset$ と仮定しなければならない。故に
 $F'(x) = G'(y)$ とする $x \in X$ と $y \in Y$ が存在する。そこで
 $F'(x)$ と $G'(y)$ のホーミソトピー標準を比較すると

$$\begin{aligned} & |1 - \alpha(|f_1(x)|) f_1(x) + \alpha(|f_1(x)|) f(x)| \\ &= | \beta(|g_2(y)|) g_2(y) | \\ &\leq |g_2(y)| \\ &< 1/6 \end{aligned}$$

故に $|f_1(x)| < 1/2$ がわかる。同様に、 $|g_2(y)| < 1/2$ を得る。従って

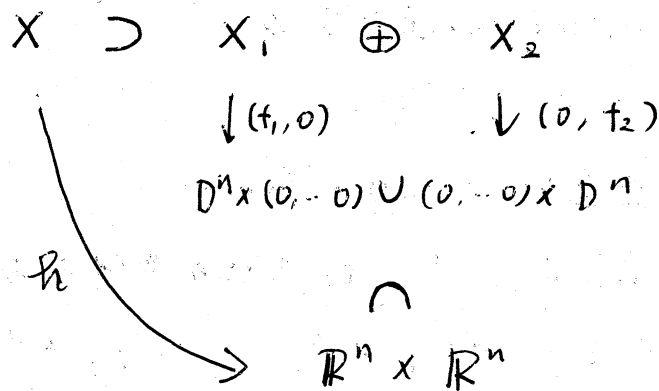
$$\begin{aligned} F'(x) &= (f_1(x), f_2(x)) = F(x), \\ G'(y) &= (g_1(y), g_2(y)) = G(y) \end{aligned}$$

より、 $F(x) = F'(x) = G'(y) = G(y)$ 。

補題 2.4. X を compactum とし、 $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が
 (X, \mathbb{R}^{2n}) において稠密であるとする。このとき、互いに交
わらない任意の2つの X の閉部分集合 X_1, X_2 と任意の写像
 $f_1: X_1 \rightarrow D^n$, $f_2: X_2 \rightarrow D^n$ に対し、 f_1 と f_2 が
transversely trivial である。従って、補題 2.2 より、特に
 $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow D^n \times D^n$ は inessential である。

証明 今、 f_1 と f_2 が transversely essential であると仮

定する。このとき、 $f = f_1$, $g = f_2$ に対して補題 2.3 の条件をみたす $\varepsilon > 0$ が存在する。 $h: X \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \in$
 $h|_{X_1} = (f_1, 0)$, $h|_{X_2} = (0, f_2)$ なる写像とする。



さて、 $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ に稠密であるから、

$d(h, F) < \varepsilon$ なる $F \in E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が存在する。そこで、 $F_1 = F|_{X_1}$, $F_2 = F|_{X_2}$ とおくと、 $d(F_1, (f_1, 0)) < \varepsilon$, $d(F_2, (0, f_2)) < \varepsilon$ 。従って、 ε のとり方より、 $F_1(X_1) \cap F_2(X_2) \neq \emptyset$ 。故に、 $F(X_1) \cap F(X_2) = \emptyset$ 。これは、 F が embedding であることに反する。

補題 2.5. n 次元 compactum X に対して次の同値である。

- (1) $\dim X \times X < 2n$
- (2) 任意の写像 $f: X \rightarrow D^n$ に対し、

- $f \times f: X \times X \rightarrow D^n \times D^n$ が *inessential*
- (3) 互いに交わらなりの任意の X の閉部分集合 X_1, X_2 と任意の写像 $f_1: X_1 \rightarrow D^n, f_2: X_2 \rightarrow D^n$ に対し、 $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow D^n \times D^n$ が *inessential* である。

証明 (1) \Rightarrow (2) : well-known

(2) \Rightarrow (3) : $X_1, X_2, f_1, f_2 \in$ (3) の条件をみたすものとする。
 $f: X \rightarrow D^n$ を $f|_{X_1} = f_1, f|_{X_2} = f_2$ なる写像とする。このとき、(2) より $f \times f: X \times X \rightarrow D^n \times D^n$ は *inessential* である。それ故、 $f_1 \times f_2 = (f \times f)|_{X_1 \times X_2}$ は *inessential* 。

(3) \Rightarrow (1) : $\dim X \times X = 2n$ と仮定する。このとき、

(a) 任意の ε_0 -mapping $F: X \times X \rightarrow Y$ に対し、

$\dim F(X \times X) \geq 2n$ となる $\varepsilon_0 > 0$ が存在する。

この ε_0 に対し

(b) 任意の η -mapping $f: X \rightarrow P$ (P は適当な多面体)

に対し $f \times f: X \times X \rightarrow P \times P$ が ε_0 -mapping となる

$\eta > 0$ が存在する。

さて、今 $\dim X = n$ であるから n 次元多面体 P と、 X から P への η -mapping $f: X \rightarrow P$ が存在する。

(c) $\text{diam } A < \varepsilon_1$ なる $P \times P$ の任意の部分集合 A に対して $\text{diam } (f \times f)^{-1}(A) < \varepsilon_0$ なる $\varepsilon_1 > 0$ ε とする。

$K \in |K| = P$ とする finite simplicial complex とし $K \times K \in \rho_1 \times \rho_2$, $\rho_1, \rho_2 \in K$ なる形の cells 全てからなる cell complex とする。このとき、 K の cell ε が十分小さくとることにより

(d) $\text{diam } (S\mathcal{A}(\sigma, K \times K)) < \varepsilon_1$ が $\sigma \in K \times K$ の $\sigma \in K \times K$ について成り立つようにできる。

我々の次に

(e) ある $\rho_1, \rho_2 \in K$ に対し

$$(f \times f)|_{(f \times f)^{-1}(\rho_1 \times \rho_2)} : (f \times f)^{-1}(\rho_1 \times \rho_2) \rightarrow \rho_1 \times \rho_2$$

が essential とする

ことを示す。

そのために、(e) が成り立たないかと仮定する。このとき、任意の $z \in X \times X$ に対し $F(z)$ と $(f \times f)(z)$ が $K \times K$ の同じ cell に属するような写像 $F: X \times X \rightarrow |(K \times K)^{2n-1}|$ が存在する。このとき、(c), (d) より F が ε_0 -mapping であることがわかる。従って (d) より $\dim F(X \times X) \geq 2n$ となる。ところが、 $F(X \times X) \subset |(K \times K)^{2n-1}|$ より $\dim F(X \times X) < 2n$ 。矛盾。故に (e) が示された。

さて、 $\rho_1, \rho_2 \in K \in (e)$ の条件をみたすものとする。

2つの n -単体 $\tau_1 \subset \Delta_1$, $\tau_2 \subset \Delta_2$ で $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$ なる ε の ε とる. $X_1 = f^{-1}(\tau_1)$, $X_2 = f^{-1}(\tau_2)$ とおく. このとき, X_1 と X_2 は互いに交わらない X の閉部分集合である. そして, $f_1 = f|_{X_1} : X_1 \rightarrow \tau_1$, $f_2 = f|_{X_2} : X_2 \rightarrow \tau_2$ とする. このとき, (e) と [5, Theorem 1.9] より $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow \tau_1 \times \tau_2$ が essential であることがわかる. これは (3) の仮定に反する. 故に $\dim X \times X < 2n$ となり, 証明は完了した.

定理 2.1 の証明 補題 2.4 と補題 2.5 より明らか.

n 次元 compactum X における " $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ の中で稠密である" という条件は, 次の形で, 特徴付けられる.

定理 2.2 $n \geq 1$ とするとき, n 次元 compactum X に対し, 次の同値である.

- (1) 任意の2つの写像 $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ が disjoint images property を持つ. ここで, 写像 $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ が disjoint images property を持つとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $d(f, f') < \varepsilon$, $d(g, g') < \varepsilon$ であり, かつ $f'(X) \cap g'(X) = \emptyset$ なる2つの写像

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ が存在するときE(1)。

(2) 任意の2つの写像 $f, g : X \rightarrow D^n$ が transversely trivial である。

(3) 任意の写像 $f : X \rightarrow D^n$ が transversely trivial である。

(4) X の中の互いに交わらない任意の2つの閉部分集合 X_1, X_2 と、それ上の任意の写像 $f_1 : X_1 \rightarrow D^n, f_2 : X_2 \rightarrow D^n$ に対し、 f_1 と f_2 が transversely trivial である。

(5) $E(X \times \{0, 1\}, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X \times \{0, 1\}, \mathbb{R}^{2n})$ において稠密である。

(6) $E(X \times C, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X \times C, \mathbb{R}^{2n})$ において稠密である。ここで、 C は Cantor set を表わすものとする。

(7) $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ において稠密である。

証明略

§ 3. Concluding remarks.

Krasinkiewicz のこの論文 [6] が書かれた後、Karno-Krasinkiewicz [4] が $\dim X \times X < 2n$ なる具体的ないくつかの compacta に対し、定理 2.1 の逆が成り立つことを確かめた。そして、その後、Spież [10], [11] により、 $n \geq 2$ に対し、定理 2.1 の逆が成立することが証明された。従って、結局次が成立する。

定理 3.1 $n \geq 2$ とし、 X を n 次 compactum とする。このとき、 $\dim X \times X < 2n$ なることと、 $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ にありて稠密に存在することとは、同等である。

注意 先に注意しておいたように $n=1$ に対しては、 $E(X, \mathbb{R}^2)$ が $C(X, \mathbb{R}^2)$ に稠密に存在すること、 $\dim X < 0$ なることと同等である。

定理 3.1 をより詳細にする次の問題を問うことが、できる。

問題 $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$ とする。このとき、 $E(X, \mathbb{R}^{2n-k+1})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n-k+1})$ に稠密であることと $\dim X \times X \leq 2n-k$ であることとは、同等であるか？

最後に、定理 3.1 と同じ結果を最近、Dranišnikov, Repovš, Ščepin 等が Krasinkiewicz, Spież とは独立に証明したことを注意しておく。(これについては [1], [2], [3] を見よ。)

REFERENCES

- [1] A. N. Dranišnikov, D. Repovš and E. V. Ščepin, A criterion for approximation of maps of 2-dimensional compacta into R^4 by embeddings, Abstracts of papers presented to the Amer. Math. Soc., 10 (4), 1989, 313 (89T-54-132).
- [2] A. N. Dranišnikov and V. Repovš, On unstable intersections of 2-dimensional compacta in euclidean 4-space, Abstracts of papers presented to the Amer. Math. Soc., 10 (5), 1989, 411 (89T-54-188).
- [3] _____, _____ and E. V. Ščepin, Approximation of mappings of compacta by embeddings, Abstracts of papers presented to the Amer. Math. Soc., 10 (5), 1989, 411 (89T-54-200).
- [4] Z. Karno and J. Krasinkiewicz, On some famous examples in dimension theory, Fund. Math. (to appear).
- [5] J. Krasinkiewicz, Essential mappings onto products of manifolds, Geometric and Algebraic Topology, Banach Center Publications, PWN, Warszawa, 1986, 377-406.
- [6] _____, Imbeddings into R^n and dimension of products, Fund. Math. (to appear).
- [7] _____ and K. Lorents, Disjoint membranes in cubes, Bull. Polish Acad. Sci. (to appear).
- [8] D. McCullough and L. Lubin, Intersections of separators and essential

- [8] D. McCullough and L. Lubin, Intersections of separators and essential submanifolds of I^N , Fund. Math. 116 (1983), 131-142.
- [9] _____, _____, Some m -dimensional compacta admitting a dense set of imbeddings into R^{2m} , Fund. Math. (to appear).
- [10] S. Spieź, Imbeddings in R^{2m} of m -dimensional compacta with $\dim(X \times X) = 2m$, Fund. Math. (to appear).
- [11] _____, Imbeddings in R^4 of 2-dimensional compacta with $\dim(X \times X) = 4$, Fund. Math. (to appear).