数理解析研究所講究録
第711巻 1989年 43-50

Ｂｏｒｓｔの被覆次元の超限的拡張について

筑波大学数学系　木村 孝(Takashi Kimura)

１．序

次元には、small inductive dimension; ind, large inductive dimension; Ind、と covering dimension; dim の３つがあるが、このうち、small inductive dimension と large inductive dimension は、定義が帰納的なのでそれをそのまま超限的に拡張することによって、任意の ordinal α に対して、$\mathrm{ind}X \leq \alpha$, $\mathrm{Ind}X \leq \alpha$ を定義することができる。ところが、covering dimension については、定義が、finite open cover に対する refinement の order の上限で定義するので、この場合の order とは cardinal だからそのまま定義を拡張することはできないし、また無理に拡張すれば、最初に考えるのが finite open cover なので、全ての空間 X に対して $\dim X \leq \omega$ となり、意味を持たない。

normal space に対しては、covering dimension は partition で特徴づけることができるので、covering dimension で無限だが、比較的弱い無限次元の概念として、この特徴づけを利用した、Smirnov の意味での弱い無限次元 (weakly infinite-dimensional in the sense of Smirnov); Ｓ-ｗ．ｉ．ｄ と Alexandrov の意味での弱い無限次元 (weakly infinite-dimensional in the sense of Alexandrov); Ａ-ｗ．ｉ．ｄ．という２つの概念がある。inductive dimension の概念では、ind を持つ、あるいは、Ind を持つという概念がこれに相当する。

	α : ordinal に対し	
dim		Ｓ-ｗ．ｉ．ｄ． Ａ-ｗ．ｉ．ｄ．
ind	ind X $\leq \alpha$	ind をもつ
Ind	Ind X $\leq \alpha$	Ind をもつ

すなわち、covering dimension に対してだけは、 ordinal に対して定義される、より細かい分類がなかった。これに対し、最近 P. Borst[1] が partition をうまく利用することで、Ｓ-ｗ．ｉ．ｄ．な空間に対しても超限的に ordinal を使って分類する定義を与えた。本稿では、この P. Borst の定義した無限次元を紹介しコンパクト化定理と積定理について解説する。

２．定義と周辺

無限次元の問題はいろいろあるが、その中でも面白い問題の１つとして、「Ｓ-ｗ．ｉ．ｄ．な空間に対して積定理が成り立つか？」という問題がある。

2.1. 問題 Ｘ，Ｙ：？？；Ｘ，Ｙ：Ｓ-ｗ．ｉ．ｄ． $\overset{?}{\Longrightarrow}$ Ｘ×Ｙ：Ｓ-ｗ．ｉ．ｄ.?
但し、？？では、Ｘ×Ｙ が少なくとも normal になる条件を考える。

この問題に対して、Ｘ と Ｙ が compact metric spaces ぐらいのときには、肯定解を出したいと思うのだが、残念ながらそのような一般的な形では、肯定解も否定解も知られていない。この問題を解決する１つの方法として、P. Borst によるＳ-ｗ．ｉ．ｄ．な空間の分類が役に立つかも知れないと考えられる。それというのは、空間 Ｘ が Ｓ-ｗ．ｉ．ｄ．であることと、ある ordinal α で Borst の意味での次元が α で上から押さえられることが同値であることが知られているからである(上の表で「Ｓ-ｗ．ｉ．ｄ．＝dim をもつ」となり、ind, Ind と同じ関係になっている)。よって、Borst の意味での次元 dim がなんらかの形で積定理を満たすことが示されれば、Ｓ-ｗ．ｉ．ｄ．の積定理も成立することが示されるからである。

2.2. 問題 Ｘ，Ｙ が compact metric spaces のとき

$$\dim(X\times Y)\leqq \psi(\dim X,\dim Y)$$

とできるか? 但し、ψ は２つの ordinal の pair から ordinal への適当な写像（i.e. ψ：ＯＲ×ＯＲ→ＯＲ）。

2.3. 仮定 S-w.i.d. な空間を考えるので、本稿では空間はすべて normal space と仮定する。

2.4. 定義 集合 L に対して、

$$\mathrm{Fin}\ L=\{\sigma\subset L: 0<|\sigma|<\omega\}$$

とおく。

M ⊂ Fin L, $\sigma\in \mathrm{Fin}\ L\cup\{\emptyset\}$ に対し

$$M^{\sigma}=\{\tau\in \mathrm{Fin}\ L: \sigma\cup\tau\in M,\ \sigma\cap\tau=\emptyset\}$$

とおく。特に $\sigma=\{a\}$ のときは、M^{a} とかく。

2.5. 定義 上の、L, M に対し M の Order; Ord M を次のように定義する。但し、α は ordinal とする。

$$\mathrm{Ord}\ M=0 \iff M=\emptyset$$

$\mathrm{Ord}\ M\leqq\alpha \iff$ 任意の $a\in L$ に対し $\mathrm{Ord}\ M^{a}<\alpha$

$\mathrm{Ord}\ M=\alpha \iff \mathrm{Ord}\ M\leqq\alpha$ かつ $\mathrm{Ord}\ M\not<\alpha$

$\mathrm{Ord}\ M=\infty \iff$ 任意の ordinal α に対し $\mathrm{Ord}\ M\not\leqq\alpha$

2.6. 定義 空間 X に対し

$$L(X)=\{(A,B): A,B \text{ は disjoint closed subsets of } X\}$$

とおく。

$\mathrm{Fin}\ L(X)\ni\sigma=\{(A_i,B_i): i\leqq n\}$ に対し σ が essential であるとは任意の partition T_i in X between A_i and B_i に対し $\cap\{T_i: i\leqq n\}\neq\emptyset$ が成立するときをいう。

$$M_{L(X)}=\{\sigma\in \mathrm{Fin}\ L(X): \sigma \text{ は essential}\}$$

とおき、Borst の意味での covering dimension を次で定義する。

$$\dim X=\mathrm{Ord}\ M_{L(X)}$$

Borst の意味での covering dimension を普通の covering dimension と同じ記号を使うからには、少なくとも finite の場合にはこの２つは同じでなければならない。実際もっと一般的に次が成り立つ。

2.7. **命題**(Borst[1,2.1.4])

$$\mathrm{Ord}\ M \leqq n \iff |\sigma| \leqq n \quad \text{for all } \sigma \in M$$

covering dimension が n 以下であるための必要十分条件は n + 1 個の pairs of disjoint closed sets は essential でないことであることはよく知られているので、Borst の意味での covering dimension と普通の covering dimension は finite の場合一致する。

2.8. **命題**(Borst[1,3.1.3]) 空間 X が S-w.i.d. であるための必要十分条件はある ordinal α に対し $\dim X \leqq \alpha$ となることである。

3。コンパクト化定理

3.1. **命題** 任意の空間 X に対し $\dim X = \dim \beta X$ が成り立つ。

この命題は有限の場合とほぼ同じ証明方法で示すことができる。

3.2. **定理** 任意の separable metrizable space X に対し $\dim \alpha X \leqq \dim X$ となる metrizable compactification αX of X が存在する。

上の定理は次の定理の系として得られる。

3.3. **定理** 任意の空間 X に対し $\dim \alpha X \leqq \dim X$、$w(\alpha X) \leqq w(X)$ となる compactification αX of X が存在する。

この定理の証明の概略は、最初に次の条件(i)(ii)を満たす normal base $\mathcal{F}$ の存在を示し、その Wallaman compactification $w(X, \mathcal{F})$ を構成する。そしてこの、Wallman compactification $w(X, \mathcal{F})$ が定理の条件を満たすことを示す。

(i) $|\mathcal{F}| \leqq w(X)$

(ii) essential でない任意の $\sigma = \{(E_i, F_i) : i \leqq n\} \in \mathrm{Fin}\ L$ に対し次の

条件(a)(b)(c)を満たす $G_i, H_i \in \mathscr{F}$ が存在する。但し、

$$L=\{(E,F):\ E\cap F=\emptyset,\ E,F\in\mathscr{F}\}$$

(a) $G_i\cap E_i=\emptyset=H_i\cap F_i$ for any $i\leqq n$

(b) $G_i\cup H_i=X$ for any $i\leqq n$

(c) $\cap\{G_i:\ i\leqq n\}\cap\cap\{H_i:\ i\leqq n\}=\emptyset$

定理3.2.では次元を上げない metrizable compactification の存在を示しただけで、そのような metrizable compactification がどれぐらいあるかはわからない。構成から考えれば、可算無限以上あることはすぐわかるが次のことはわからない。

3.4. 問題 $\{h\in C(X,I^{\omega}):$ h is an embedding, $\dim(\mathrm{Cl}\,h(X))\leqq \dim X\}$ は $C(X,I^{\omega})$ で residual か?

この問題が肯定的に解決されれば、Luxemburg[2] は X が Ind をもてば

$\{h\in C(X,I^{\omega}):$ h is an embedding, $\mathrm{Ind}(\mathrm{Cl}\,h(X))\leqq \mathrm{Ind}\,X\}$

は $C(X,I^{\omega})$ で residual であること、また

$\{h\in C(X,I^{\omega}):$ h is an embedding, $\mathrm{ind}(\mathrm{Cl}\,h(X))\leqq \mathrm{ind}\,X\}$

も $C(X,I^{\omega})$ で residual であること示しているので、

$\{h\in C(X,I^{\omega}):$ h is an embedding, $\mathrm{ind}(\mathrm{Cl}\,h(X))\leqq \mathrm{ind}\,X$,
$\mathrm{Ind}(\mathrm{Cl}\,h(X))\leqq \mathrm{Ind}\,X,\ \dim(\mathrm{Cl}\,h(X))\leqq \dim X\}$

も $C(X,I^{\omega})$ で residual になり、特にどの次元も上げない metrizable compactification の存在まで示すことができる。

4. 積定理

P. Borst[1,3.5.7] は X が locally compact で Y が Cantor set のとき

$$\dim(X\times Y)=\dim X+\dim Y=\dim X$$

が成立することを示した(実際は Y は Cantor set でなくても、任意の compact zero-dimensional space に対して成立することは、Borst の証明からすぐにわかる)。この節では、Y が finite dimensional のときを考える。

4.1. 定義 α を ordinal とする。このとき $\alpha=\lambda(\alpha)+n(\alpha)$ と表す。但し、$\lambda(\alpha)$ は limit ordinal で $n(\alpha)$ は integer とする。 ordinal α と integer n に対して

$$\Phi(\alpha, n)=\lambda(\alpha)+(n(\alpha)+1)\times(n+1)-1$$

とおく。

4.2. 定理 X を compact space、Y を finite dimensional compact space とする。このとき、

$$\dim(X\times Y)\leqq\Phi(\dim X, \dim Y)$$

が成立する。

ここで、P. Borst の証明と同じテクニックを使えば、定理4.2 の X の条件を locally compact に拡張することができる。

4.3. 定理 X を locally compact spac、Y を finite dimensional compact space とする。このとき、

$$\dim(X\times Y)\leqq\Phi(\dim X, \dim Y)$$

が成立する。

特に、$\dim X$ が limit ordinal のときは $n(\dim X)=0$ なので、

$$\dim(X\times Y)\leqq\dim X+\dim Y$$

が成立する。これは、P. Borst の問題[1,3.5.10]の partial answer になっている。また、Y が zero-dimensional のときも

$$\dim(X\times Y)\leqq\dim X+\dim Y$$

となるので、定理4.3.は P. Borst の定理の拡張になっている。

ここでは、定理4.2.で $\dim X=\omega+1$、$\dim Y=1$ のときの証明の概略をする。

$$a_{ij}=(A_{ij}, B_{ij}) \in L(X \times Y) \quad (i, j = 1, 2)$$

をとる。このとき、

$$\mathrm{Ord}\ M_{L(X \times Y)}^{\{a_{ij}:\ i,j=1,2\}} < \omega$$

を示せば、

$$\dim(X \times Y) \leqq \omega + 3 = \omega + (1+1) \times (1+1) - 1$$

が示される。

$X \times Y$ が compact であることと $\dim Y = 1$ であることより finite open cover $\mathcal{U}_i=\{U_{ik}: k \leqq n(i)\}$ of Y と closed sets A_{ijk}, B_{ijk} of X で次の条件を満たすものがとれる。

$$A_{ij} \subset \cup\{A_{ijk} \times \mathrm{Cl}U_{ik}:\ k \leqq n(i)\}$$
$$B_{ij} \subset \cup\{B_{ijk} \times \mathrm{Cl}U_{ik}:\ k \leqq n(i)\}$$
$$\cup\{A_{ijk} \times \mathrm{Cl}U_{ik}:\ k \leqq n(i)\} \cap \cup\{B_{ijk} \times \mathrm{Cl}U_{ik}:\ k \leqq n(i)\} = \emptyset$$
$$\cup\{\mathrm{Bd}U_{1k}:\ k \leqq n(1)\} \cap \cup\{\mathrm{Bd}U_{2k}:\ k \leqq n(2)\} = \emptyset$$

ここで

$$a_{ijk} = (A_{ijk}, B_{ijk})$$

とおく。このとき、

$$\mathrm{Ord}\ M_{L(X)} = \omega + 1$$

より

$$\mathrm{Ord}\ M_{L(X)}^{\{a_{ijk}:j=1,2\}} = n_{ik} < \omega$$

ここで、

$$n = \Sigma\{n_{ik} + 1 :\ i=1,2;\ k \leqq n(i)\}$$

とおく。このとき、

$$\mathrm{Ord}\ M_{L(X \times Y)}^{\{a_{ij}:\ i,j=1,2\}} < n < \omega$$

を示せばよい。

$$\{b_{ikp}:\ i=1,2;\ k \leqq n(i);\ 1 \leqq p \leqq n_{ik}+1\} \subset L(X \times Y)$$

をとる。このとき、

$$\{a_{ij}:\ i,j=1,2\} \cup \{b_{ikp}:\ i=1,2;\ k \leqq n(i);\ 1 \leqq p \leqq n_{ik}+1\}$$

が essential でないことを示せばよい。ところで

$$\mathrm{Ord}\ M_{L(X)}^{\{a_{ijk}:j=1,2\}} = n_{ik} < \omega$$

であることと、$\dim Y=1$ であることより、a_{ij} の partition T_{ij} と b_{ikp} の partition S_{ikp} で

$$\cap\{T_{ij}: j=1,2\}\cap\{S_{ikp}: k\leqq n(i);\ 1\leqq p\leqq n_{ik}+1\}\subset X\times Y_i$$

$$Y_1\cap Y_2=\emptyset$$

となるものが存在する。このとき、

$$\cap\{T_{ij}: i,j=1,2\}\cap\{S_{ikp}: i=1,2;\ k\leqq n(i);\ 1\leqq p\leqq n_{ik}+1\}=\emptyset$$

となり

$$\{a_{ij}: i,j=1,2\}\cup\{b_{ikp}: i=1,2;\ k\leqq n(i);\ 1\leqq p\leqq n_{ik}+1\}$$

は essential でない。故に、

$$\dim(X\times Y)\leqq \omega+3$$

となり、

$$\dim(X\times Y)\leqq \Phi(\dim X,\dim Y)$$

が示された。

REFERENCES

[1] P. Borst, Classification of weakly infinite-dimension spaces, Fund. Math. 130(1988), 1-25,73-99.

[2] L. Luxemburg, On compactification of metric spaces with transfinite dimension, Pacific J. Math. 101(1982), 399-450.