数理解析研究所講究録
第711巻 1989年 58-67

位相不変量となる非整数値次元関数はあるか?

愛媛大学教養部　津田光一　(Kôichi Tsuda)

0 導入.

フラクタルの文献を色々見ていると整数値をとる従来の次元を表わす場合“トポロジカル次元”の名で呼んでいるようである[E&R]. これは, 次のような意味で便利なネーミングである. つまり, 従来の次元関数が, 考えている空間の Embedding の仕方や, その上の距離に依らない位相不変量(つまり, 同相な空間に対する次元はみな等しい)となることが見て取れるからである.

しかしながら, 次元論を専門にする者から見ると, このネーミングからは次の素朴な疑問が出て来る [岡]:

問題0 “トポロジカルな次元はすべて整数値なのだろうか?”

これが, ここで議論したい問題である. 以下, 特に断わらない限り考える空間は, ユークリッド空間の部分集合(つまり有限次元可分距離空間)とする(また, これらの空間全体の作るクラスをSで表わす).

1 整数値次元関数.

可分距離空間 X に対して従来の次元論で定義される次元関数は次の3つである [E2]:　　Ind X,　ind X,　dim X.
初めの2つは, 帰納的に定義されるもので, 最後のものは, 被覆次元と呼ばれるものであって, 位相空間論では何も断わりがない時は“次元”と言ったら, この最後の被覆次元を意味することが多い.
これらは, 定義の中にすでに“整数値”を取らなければならない事が明記されている. 更に, 可分距離空間の範囲ではどれも同じ値をとることが, つまり

$$\mathrm{Ind}\ X = \mathrm{ind}\ X = \dim X.$$

が成立することが分かっている [E2]. 従って, この3つの次元だけを考えているかぎり(また, 今まで次元論で議論されてきた次元関数がこの3つだけだったという意味では)“トポロジカル次元はすべて整数値である”ということは正しいし, どれを使っても同じであるとも言えて, その意味ではトポロジカル次元関数はただ1つしかないと言える.

この最後に述べたことは, 実はもっと厳密に示せるのであって, それには次で議論する次元の公理による方法を使うのである.

2　次元の公理.

空集合$\emptyset$，一点集合 {0}，n次元立方体I^nを含む，空間からなるクラス$\mathbf{C}$を考え，$\mathbf{C}$の各要素X（$X\in\mathbf{C}$と略記する）に対して定義された位相不変量である整数値関数dについての次の４つの命題を P. Alexandroff の公理系と呼ぶ.

(A1)　$d(\emptyset) = -1$, $d(\{0\}) = 0$, $d(I^n) = n$ for $n = 1,2,\cdots$.
(A2)　$X\in\mathbf{C}$が２つの閉集合X_1，X_2の和集合（つまり$X = X_1 \cup X_2$）と表わせる時　$d(X) = \max(d(X_1), d(X_2))$.
(A3)　任意の$X\in\mathbf{C}$に対して次を満たす$\varepsilon > 0$が存在する：ある$Y\in\mathbf{C}$とYの上へのε－写像$f: X\to Y$があれば $d(X) \leqq d(Y)$.
(A4)　２点以上を含む任意の$X\in\mathbf{C}$に対してXを分離する閉集合Lで$d(L) < d(X)$を満たすものが存在する.
（アンダーラインをした概念の具体的な定義は［E2］を参照のこと．）

P. Alexandroff は，この公理系を使って次の事を証明した：

定理　A.　コンパクト距離空間全体の作るクラスを$\mathcal{K}$とすると，$\mathcal{K}$上の整数値を取る位相不変量dで（A1)-(A4）を満たすものは被覆次元 dim だけである.

この定理から，上の P. Alexandroff の公理系は強い公理系と言えるが，ここではこの公理系を採用しない.　その理由を述べると，この公理系は，公理と呼ぶには技巧的過ぎる（artificialな）命題を含んでいるからである（[E2, p.154] 参照のこと）.

この公理系は被覆次元の持つ性質を抜き出して作ったものであるが（従って，当然 dim はこの４つをすべて満たしているわけであるが），このうち（A3)，(A4）が問題なわけで，(A4）はカントール・マニフォルド（普通の多様体のことではない）の存在に関係する性質であって（A3）は次の定理の対偶である.

ε－写像定理 [E2, Theorem 1.10.12]：$X\in\mathbf{C}$に対して，任意の$\varepsilon > 0$についてn次元空間$Y(\varepsilon)$とε－写像　$f: X\to Y(\varepsilon)$が存在すれば　$\dim X \leqq n$.

定理Aの証明の中では（A3）は $d(X)\leqq\dim X$ を示すのに使われ，(A4）は逆向きの不等号 $d(X)\geqq\dim X$ を示すのに使われる［E2, p.155 参照のこと］.

公理と呼ぶには，複雑過ぎると思われるが，大切な性質には違いないのであって，特に（A3）には§４で述べる Borsuk による位相不変量との関連がある.

P. Alexandroff の公理に代わるものとして，ここで採用するのは，次に述べる K. Menger の公理である（メンガー・カーブを発見したあのメンガーである）.

(M1) ：(A1) と同じ；$d(\emptyset) = -1$, $d(\{0\}) = 0$, $d(I^n) = n$ for $n = 1,2,\cdots$.
(M2) $Y \in \mathbf{C}$ が $X \in \mathbf{C}$ の部分集合ならば $d(Y) \leqq d(X)$.
(M3) $X \in \mathbf{C}$ が可算無限個の閉集合 X_1, X_2, …, X_n, …の和集合（つまり $X = \cup X_n$）と表わせる時 $d(X) = \sup\{d(X_n): n = 1,2,\cdots\}$.
(M4) 任意の $X \in \mathbf{C}$ に対し $d(cX) = d(X)$ を満たす X のコンパクト化 $cX \in \mathbf{C}$ が存在する.

これらは P. Alexandroff の公理に比べて，ずっとスッキリしていて公理と呼ぶのにふさわしいと思われる. (M3) は，有限加法性を言っている (A2) に対して，可算加法性を主張しているわけであるが，(A2) のかわりにこの (M3) を用いて Šćepin は，定理Aをクラス $\mathcal{S}$ について証明した. また，クラス $\mathcal{K}$ を考えるよりもクラス $\mathcal{S}$ を考える方が次元論としては<u>見通しが良い</u>ことから (M3), (M4) を採用するのである（[T2] 参照のこと）.

次元の公理系には，上の２つの他に，帰納的次元（ind X, Ind X）の性質の方から導入された公理系があるが，これも，やはり公理と呼ぶには複雑過ぎるようである（[E2] 参照のこと）.

この K. Menger の公理については，次のことが知られている. 被覆次元は（従って，１で述べた他の２つの帰納的次元も）(M1)-(M4)を $\mathcal{S}$ においてすべて満たしている. しかし，定理Aのような一意性は言えないのであって，有限群Gに対するコホモロジー次元関数 $\dim_G$ は (M1)-(M4) を満たしていることが知られている. つまり，K. Menger の公理系は P. Alexandroff の公理系に比べて，<u>弱い公理である</u>と言うことができる.

$\dim X \neq \dim_G X$ となる $X \in \mathcal{K}$ が存在するから，<u>(M1)-(M4) を満たしている次元関数は，被覆次元だけではない</u>ことになるわけである. しかし，今まで知られている (M1)-(M4) を満たしている次元関数は，すべて<u>整数値をとるものばかりである</u>.

この公理系 (M1)-(M4) を使って，我々の問題を次のように定式化する：

定義０. あるクラス $\mathbf{C}$ のすべての X について定義される，<u>実数値</u>の位相不変量 d が (M1)-(M4) を満たす時，この d を <u>$\mathbf{C}$ に関するメンガー次元関数</u>と呼び，$\dim_M X$ と略記する.

問題１. すべての $\dim_M X$ は，整数値を取るか？ 特に，$\mathcal{K}$ に対する非整数値メンガー次元関数は存在するか？

次の§でこの問題の解答を，各 $\mathcal{K}$ の元 X に対して 0.5 キザミの $\dim_M X$ を定義することによって与えよう.

3　0.5 キザミの $\dim_M X$.

ここで[T4]で導入した $\dim_T X$ を述べる.　これは $\mathcal{K}$ に関する $\dim_M X$ であって，次のように定義する：

X が空集合の時に限って(if and only if) $\dim_T X = -1$.

X が次の時に限って $\dim_T X = n$ と定義する：

$\dim X = n$ かつ次の条件(T)を満たす.

(T) 任意の（Xの）閉部分空間Yに対して$\mathcal{X}_Y=\{Y_\alpha\}$を$Y$の連結成分 Y_αのうちで $\dim Y_\alpha = n$ となるものすべての集合とする時，$\mathcal{X}_Y$の濃度は高々可算である.

X が次の時に限って $\dim_T X = n.5$ と定義する：

$\dim X = n$ かつ上の条件(T)を満たさない.

定義から明らかなように，$\dim_T X$ は，位相不変量であって，$\dim X \leqq \dim_T X$ を満たしている.　$\dim_T X$ が $\dim_M X$ であることを説明しよう.

(M1) $\dim_T I^n = n$ である事を示せばよい.　それには，次の簡単ではあるが，有用な判定法を使う [E2]：

定理0.　I^nの部分集合Xが $\dim X = n$ である為の必要十分条件はXが内点を含む（つまり $\mathrm{Int}\, X \neq \emptyset$）ことである.

$\dim I^n = n$ はよく知られていることだから，I^nが(T)を満たす事を示そう．任意の（Xの）閉部分空間Yの連結成分Y_αのうちで $\dim Y_\alpha = n$ となるものは上の定理0から内点を持つ.　Y_αは連結成分だから，互いに素(disjoint)であるから，I^nが可分であることを使えば$\mathcal{X}_Y$の濃度は高々可算である.

残る (M2)-(M4) のうちで，証明するのに一番面倒なのは (M3) であって，他はすぐに示せるから省略しよう（$\mathcal{K}$ で考えているので (M4) は示す必要がない）．(M3) は，次の簡単な補題とスタンダードな次元論のテクニックで示すことができる（詳しくは[T4]参照）：

補題0.　$X \in \mathcal{K}$の任意の連結成分を X_α とすると　$\dim X = \sup \dim X_\alpha$.

この補題は完全不連結(= Totally disconnected) な空間$X \in \mathcal{K}$は0次元であるという定理を一般のn次元の場合に拡張したものである（§4注意1参照）.

最後に，$\dim_T X_n = n.5$ となる空間$X_n \in \mathcal{K}$をすべての $n = 0,1,2,\cdots$について与えよう：

与えらえたnに対してカントール集合CとI^nの積空間$Z_n = C \times I^n$を考える．I^nの境界∂I^nから1点x_nを取ってくる.　X_nをZ_nの閉部分集合$C \times \{x_n\}$を1点につぶして得られる商空間（つまり，$X_n = Z_n / C \times \{x_n\}$）とせよ．すると，$X_n$は連結で$X_n \in \mathcal{K}$かつ $\dim X_n = n$ であることはすぐに分かる．X_nがZ_nのコピーを含むことから $\dim_T X_n = n.5$ が結論できる.

4　注意と残された問題.

注意0.　３で定義した $\dim_T X$ をＳの各元にも定義することはできない. それは, (M4) に関係してくるからである.　つまり $\dim_T X$ の定義から, “$X \in \mathcal{K}$ が $\dim_T X = 0$ である必要十分条件は, $\dim X = 0$ かつ X の濃度が可算であること”がすぐ分かる.　従って, 今 $\dim_T X$ をＳの各元にも定義することが出来たとすると, (M4) から, すべての $\dim_T Y = 0$ を満たす $Y \in$ Ｓは, 濃度が可算なコンパクト化 cY を持たなければならない.

しかし, Ｙとして有理数全体の空間Ｑを考えれば, 求める cY は (距離の入らないような大きな(Tychonoff) コンパクト化の中まで捜しても), (Ｑが Čech-complete でないから) 存在しないことが知られている.

注意１.　補題０を可分距離空間まで拡張することはできない.　つまり, 完全不連結であって, ０次元ではないものが, 各次元について存在することが分かっている.　更に, 完備な $Y \in$ Ｓで, カントール集合への１対１上への連続写像を持つものが存在する (dim Y = 1 の例は[T2]で紹介した Wage の距離空間であり, 一般のｎに対しては[T1]に dim Y = n の例が載っている) .

位相不変量となる非整数値次元関数を考えた, ひとつの大きな理由は, ハウスドルフ次元 $\dim_H X$ との関係にある.　[F, 序章 iv]にあるように一般に $\dim_H X$ を下から評価するのは難しい.　例えば, 被覆次元はそのような評価の１つを与えてくれることが知られている[H&W, p.107]:

定理１.　与えられた空間 $X \in$ Ｓに対して, $\inf \dim_H X' = \dim X$. 但し, inf は X と同相な, すべての $X' \in$ Ｓに渡って取る.

その意味で次の不等式を満たす $\dim_M X$ は, 役に立つのではないかと考えるのである.

(*)　$\dim_M X \leqq \dim_H X$

しかし, これについては, 川村一宏氏による次の注意がある:

注意２ [Ｋ].　すべての $X \in \mathcal{K}$ で不等式(*)が成立し, かつ $\dim X \leqq \dim_M X$ が成り立っているとすると定理１から, $\dim_M X$ は被覆次元 $\dim X$ と一致する. 従って, どんなにうまい $\dim_M X$ をみつけても, (*)を満たさないＸが存在する.

§３で与えた $\dim_T X$ と被覆次元との間には $\dim_T X \geqq \dim X$ という関係があったが次の逆向きの不等式を満たす $\dim_M X$ が存在するかという問題も興味深い.

(**)　$\dim_M X \leqq \dim X$.

実は, 私個人の, 非整数値次元への関心のルーツは, この種の関数から出てきている.　それは, 次元の積定理と呼ばれる次の等式に関係する:

(**)　$\dim_M (X \times Y) = \dim_M X + \dim_M Y$.

一般に，被覆次元が，この等式を満たさないことは知られていて，その反例を初めて与えたのが L. Pontrjagin である [N2]． これは，次のような$\mathcal{K}$に属する２次元空間Ｘ，Ｙであった： $\dim(X \times Y) = 3 < \dim X + \dim Y = 4$.
更に，Dranishnikov の大論文 [¥R¥D] によって，コンパクトＡＮＲ空間Ｘ，Ｙの中でも，反例が見つかっている．

L. Pontrjagin が，その反例の次元を計算するのにコホモロジー次元を効果的に使ったことが，その後のコホモロジー次元の発展を促した１つの要因であるとも言える [N1,N2]． この意味で，L. Pontrjagin の反例は重要なのであるが，非整数値次元関数との間に，等式(**)を通して次のような問題が出て来る．

問題２． $\mathcal{K}$に関する $\dim_M X$ で(**)をすべての X,Y に対して満たすものがあるか？ 特に，L. Pontrjagin の反例に対して次の値を取るものがあるか：
$\dim_M X = 1.5$, $\dim_M Y = 1.5$, and $\dim_M (X \times Y) = 3$ ？

Dranishnikov[¥R¥D, Corollary 2]によって，次のことが示されている：
$n \leqq m$, $m < r \leqq n + m$ を満たす，すべての m,n,r に対して，次を満たす X_n, $X_m \in \mathcal{K}$ が存在する：$\dim X_n = n$, $\dim X_m = m$, and $\dim(X_n \times X_m) = r$.
これによると，$\dim X_n + \dim X_m - \dim (X_n \times X_m)$ は，いくらでも大きくなるので，(**)を満たし，かつ $\dim X = [\dim_M X]$（但し，$[s]$ は実数 s の四捨五入を表わす）となるような $\dim_M X$ はないことは分かる（つまり，求める $\dim_M X$ と $\dim X$ の値との差は一般にいくらでも大きくなってしまう）．

§３で述べた非整数値次元は，残念ながら自然なものとは思えない． 注意０もその１つの理由である． もう１つの理由は 0.5 という値にはっきりした意味がないことによる． つまり， $n < a_n < n + 1$ を満たしている任意の数列 $\{a_n\}$ に置き換えてもそのままの定義で（$\dim_M X = n.5$ を $\dim_M X = a_n$ に変えるだけで）同じ結果が得られるからである． しかし，§３の結果から次のような問題が出て来る：

問題３． 任意の実数 $r \geqq 0$ に対して $\dim_M X_r = r$ となる $X_r \in \mathbf{C}$ が存在するメンガー次元関数 $\dim_M X$ をクラス$\mathbf{C}$に関して full-valued と定義する時，クラス$\mathcal{K}$に関して full-valued になる $\dim_M X$ は存在するか？

この問題に関連して，実数値を取る位相不変量を調べてみたのだが，cardinal invariant と呼ばれている物については，位相空間論では，長い歴史があるのに，実数値を取る物は不思議なことに見当らなかった（ [E1] 参照のこと）．
これに対して，大阪教育大の綿谷安男氏から，次のことを指摘された [綿]：

注意３． コンパクトT_2空間Ｘ上の実数値連続関数全体からなる関数環に対して，その Gelfand-Kirillor dimension を考えると$\{1\} \cup [2,\infty)$に値を取る位相不変量が得られる．

しかし残念ながらこの不変量が非整数値をとるXは，$\mathcal{K}$に属さない（つまり距離空間にならない）ようなので，我々のめざす本命とは成りにくいようである．

注意4．　K. Borsuk[Bo] は，(A3) に関連して，任意の$X \in \mathcal{K}$に対してn次元幾何測度$\mu_n(X)$ を次を満たすαの下限で定義した：任意の $\varepsilon>0$ に対し多面体P_εと連続写像$f_\varepsilon:X \to P_\varepsilon$ で$\rho(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$かつ$|P_\varepsilon|_n \leqq \alpha$を満たすものがある．（ここに$|P_\varepsilon|_n$は$P_\varepsilon$に含まれるすべてのn単体だけの（スタンダードな）体積の和，ρはP_ε上の距離，を表わす．）

Xのn次元 Hausdorff 測度を$m_n(X)$とすると$\forall n: \mu_n(X) = 0$ but $m_n(X) > 0$となる$X \in \mathcal{K}$が存在するから，$\mu_n(X)$は普通の測度とは一般に異なっている．
一般に $\mu_n(X)$ の値そのものは位相不変量とはならないが，$\mu_n(X)= 0$ となることは，（従って，$\mu_n(X)\neq 0$ であることも）位相不変量であることが知られている [B,N&S].
この測度をうまく使って，実数値を取る位相不変量を作れないものだろうか．

ついでに述べておくと，Xの Hausdorff dimension $\dim_H X$ に関しては，
$\dim X \neq \dim_H X$ であることは位相不変量にならない．　つまり，ある embedding で $\dim X \neq \dim_H X$ ならばどんな embedding でも $\dim X \neq \dim_H X$ かという問題を考えるわけである．　これは，$\dim_H X = 0$ となる Cantor 集合の存在や，高木関数のグラフ G ($\dim_H G = 1$)がIと同相であることから明らかにダメである．　従って，[T2]で上げた問題“$\dim X \neq \dim_H X$ であるかどうかを調べる為の判定法”が見つかってもXのトポロジーの言葉だけでは書けないことになる．

多様体上の不変量は条件(M3)から役に立ちそうにない（つまり，任意のn次元多様体Mは，I^nと同じ値をとることになる：i.e. $\dim_M M = \dim_M I^n$）．　言い替えれば多様体ではない，一般の$\mathcal{K}$の元Xにいかにうまく不変量を定義するかということが本質的なのである．

この意味で，位相力学系の方で大切な概念である位相エントロピーの存在は，我々の求める関数があっても不思議ではないと思わせるだけの説得力がある：
(1)　$X \in \mathcal{K}$上の任意の同相写像Tに対して，位相エントロピー(=topological entropy) h(T) が定義できる．　この h(T) はX上の距離に依らない（従って，写像に対する位相不変量である）［W］．
(2)　任意の $r > 0$ に対して $X_r \in \mathcal{K}$とその上の同相写像T_rで $h(T_r) = r$ となるものが存在する［W］．

代数的位相幾何学の方では，（コ）ホモロジー群，シェイプ群等の functor H が整備されていることをふまえて，$\mathcal{K}$の元ではなくて，群に対する不変量dで，なにか使えるものはないだろうか：

問題2.　群に対する不変量dで，合成dHが𝒦に関する full-valued dimₘ になるものは存在するか？　但し，Hは𝒦上で定義される，ある algebraic functor.

5　フラクタルの勉強の為に

この論文の主題とは直接の関係はないが，いずれは関係が出て来ると思われるフラクタルの話題を書いて置きたい．　[T2,T3]の後で出版された（あるいは，後から見つけた）文献を，これからフラクタルを勉強しようという general topologists 向けに書きたい．
高校程度の数学の知識だけですぐに読めるものから上げると[高&高]，そして雑誌の特集[¥C]では，山口昌哉先生と畑政義さんの文章は，すぐに読めて一読の価値あり．　[O] も手軽に読める（例えば，複素力学系のジュリア集合の，パラメーターによる変形についての記述が参考になる）．　[Ba]は４回生のゼミくらいに丁度よい本である．

Dranishnikov の論文[D]の出ている同じ号[¥R]に[P]が載っている．　まだ，詳しく読んでいないが，フラクタル解析で重要な [E&R] Liapunov exponent について良い仕事をしているようである．　forcing についての報告[M]も見逃せないし，[¥R]は，我々には，宝玉の号と言えるだろう．　ついでに，同じ雑誌 [¥R] の２年前の号にある複素力学系についての総合報告[L]は，Sullivan の結果の証明が載っていたりして[Bl]とは相補的で面白そうな論文である．

ニュートン法に出て来るジュリア集合（以下Ｊと記す）について，最近[¥P]が出た．　複素力学系について勉強するのにニュートン法から入っていくのも，１つのとっつき安い方法ではないかと思っている．　例えば，局所連結性が応用面でも注目されている[M,G,O&Y]ことをふまえて，Ｊの局所連結性当りから調べて見るのも面白い．

この集会の折りに，フラクタルで良い仕事（例えば［畑］）をされている畑さん（京大理学部）に会うことができた．　その時にいろいろ面白い話が聞けたのであるが，その中の２つだけ書いて終わりにしたい．

まず，寺田寅彦はフラクタルを越えていたということ．　寺田寅彦は当時としては一風変わった物理をやっていたようであるが，その頭の中ではすでに，フラクタルの先にあるような数学を作ろうとしていた痕跡がある由．　この冬休みに[寺]を紐といてみるのも一興だろうと思う．

それから，フラクタルに２つの流れがあること．　１つは上で紹介した[Ba]の Barnsley 一派のやっている，自然界の殆どすべてのものをIFS で表わしてしまおうというもので，言うならば“殆どすべての物がフラクタル”という考え方で押し進めている流れ(e.g.[¥B]).

今一方の正統派(?)の Mandelbrot はこの考え方には批判的であるという（“今までの解析ではうまく扱えなかったものを，フラクタルとしてうまく扱っていこう”とする流れと言ってよいだろう）．

いろいろな数学を巻き込んで，フラクタルの勉強は留まることを許さない，というのが当方の率直な感想である．

結びに，怠惰な著者を，数理解析研究所にひっぱり出してくれた，この研究集会の代表者である小山晃氏に感謝する．

参考文献

[Ba] M. Barnsley, Fractals everywhere, Academic Press 1988.

[¥B] __________, Fractal Approximation, Constructive Approximation 5 (1989) No. 1:Special Issue, 1-168, Springer.

[Bl] P. Blanchard, Complex analytic daynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc. 11(1984), 85-141.

[Bo] K. Borsuk, An alternative concept of the n-dimensional measure, Ann. Polon. Math. 42(1983), 17-24.

[B,N&S] K. Borsuk, S. Nowak & S. Spież, Remarks on the n-dimensional geometric measure of compacta, Fund. Math. 121(1984),59-71.

[¥C] Computer Today: カオス特集号、 1989/7月号 No.32、 フラクタル特集号、9月号 No.33、サイエンス社．

[E&R] J.-P. Eckmann & D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, Review of Modern Physics 57(1985), 617-656.

[E1] R. Engelking, General Topology, PWN, Warsaw, 1977.

[E2] __________, Dimension Theory, North-Holland, 1978.

[F] K.J. ﾌｧﾙｺﾅｰ著 畑政義訳、フラクタル集合の幾何学、近代科学社、1989.

[畑] M. Hata, On the structure of self-similar sets, Japan J. Appl. Math. 2 (1985), 381-414.

[H&W] W. Hurewicz & H. Wallman, Dimension Theory, Princeton Univ. Press, 1941.

[K] 川村一宏, A personal communication.

[M,G,O&Y] S.W. Mcdonald, C. Grebogi, E. Ott & J.A. Yorke, Fractal basin boundaries, Pysica 17D(1985), 125-153.

[N1] 永見啓應，位相空間論，次元論， 数学 25(1972), 70-71.

[N2]________，この四半世紀の次元論瞥見，数学 30(1978), 359-364.

[岡] 岡晋平，A personal communication.

[O] 小川 泰，フラクタルとは何か，New Science Age 39，岩波書店，1989.

[¥P] H.O. Peitgen, Newton's method and dynamical systems, reprinted from Acta Appl. Math. 13(1988), Nos.1 & 2, Kluwer Acad. Pub. 1989.

[¥R] Russian Math. Surveys 43:4(1988)
[D] A.N. Dranishnikov, Homological dimension theory, 11-55.
[M] V.I. Malykin, New methods in general topology connected with forcing, 95-110.
[P] Ya. B. Pesin, Dimension type characteristics for invariant sets of dynamical systems, 111-151.
ibid. 41:4(1986) [L] M.Yu. Lyubich, The dynamics of rational transforms: the topological picture, 43-117.
[寺] 寺田寅彦全集 １－１７巻, １９６１年, 岩波書店.
[高&高] 高安秀樹＋高安美佐子, フラクタルって何だろう, ダイヤモンド社 1988.
[T1] K. Tsuda, some examples concerning the dimension of product spaces, Math. Japonica 27(1982), 177-195.
[T2] 津田光一, ジェネラル・トポロジーとフラクタル, 数理科学 291(1987) Sept. 特集／フラクタル周辺の数理, 69-73.
[T3] , Hausdorff 次元について－フラクタルの観点から－, Gen. Topology Symp. 1988年12月, 講演録, 90-95.
[T4] K. Tsuda, A topological fractional dimension, preprint.
[綿] 綿谷安男, A personal communication.
[W] P. Walters, An introduction to Ergodic theory, Springer 1982.