数理解析研究所講究録
第712巻 1990年 1-4

青本-ゲルファントの超幾何函数とK3曲面の族

九大 理 吉田正章 (Masaaki YOSHIDA)

超幾何微分方程式 $E(a,b,c)$:

$$x(1-x)u'' + \{c-(a+b+1)x\}u' - abu = 0$$

がいかに重要な方程式であるかは，この集会では説明の必要は無いであろう。その中でも $E(1/2, 1/2, 1)$ が一番面白い。なぜならこれは以下に復習するように楕円曲線族と関係するからである．記号を用意する．

$p = \{p_1, \cdots, p_4\}$: 複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の相異る4点，

$C(p)$: p で分岐する $\mathbb{P}^1$ の二重cover，楕円曲線，

$\eta(p)$: $C(p)$ 上の正則1-形式，

$\gamma_i(p), i=1,2$: $H_1(C(p),\mathbb{Z})$ の基で，交点行列が $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$,

$\omega^i(p) = \int_{\gamma_i(p)} \eta(p)$, $i=1,2$: $C(p)$ の周期．

このとき，$\mathrm{Im}\, \omega_1(p)/\omega_2(p) > 0$ となり，写像 $p \mapsto (\omega^1(p), \omega^2(p))$ の多価性を表す群（モノドロミイ群）は，$\Gamma(2) = \{g \in SL(2,\mathbb{Z}) \mid g \equiv 1_2 \mod 2\}$ に共役である。今 $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = \infty$, $p_4 = x$ と規格化

して，$\omega^i(p)$ の代りに $\omega^i(x)$ と書くと，$\omega^1(x)$, $\omega^2(x)$ は，$E(1/2, 1/2, 1)$ の線型独立解である。

このように，幾何学的材料から超幾何微分方程式の一番面白い場合が得られるのである。超幾何微分方程式には，様々な角度から，多くの一般化が存在するが，以下述べるものは，その中でも一等勝れたものである．前頁に復習した経過を素直に真似る：

$l = \{l_1, \cdots, l_6\}$：$\mathbb{P}^2$ 内の一般の位置にある6本の直線，

$S'(l)$：l で分岐する $\mathbb{P}^2$ の二重 cover，

$S(l)$：$S'(l)$ の非特異化；$S'(l)$ の15個の特異点を解消したもの，楕円K3曲面．

$\eta(l)$：$S(l)$ 上の正則2-形式

AC：特異点解消で出て来た自己交点数 -2 の有理曲線15本と，$\mathbb{P}^2$ の一般的な直線のひきもどしである曲線とで生成される $H_2(S(l), \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$-submodule，

$\gamma'_1(l), \cdots, \gamma'_6(l) \in H_2(S(l), \mathbb{Z})$：$AC$ に直交し，もう一組の6つのサイクル $\gamma_1(l), \cdots, \gamma_6(l)$ があって $\gamma'_i \cdot \gamma_j = \delta_{ij}$ となるもの．

$A = (\gamma'_i(l) \cdot \gamma'_j(l))_{ij} = (A_{ij})$：交点行列，対称整数行列で符号は $(4-, 2+)$，

$\omega^i(l) = \int_{\gamma_i(l)} \eta(l)$，$i = 1, \cdots, 6$：$S(l)$ の周期．

このとき

$$\sum A_{ij}\,\omega^i(\ell)\,\omega^j(\ell) = 0,\quad \text{リーマンの関係式}$$

$$\sum A_{ij}\,\omega^i(\ell)\,\overline{\omega^j(\ell)} > 0,\quad \text{リーマンの不等式}$$

が成り立ち，写像 $\ell \longmapsto (\omega^1(\ell),\cdots,\omega^6(\ell))$ のモノドロミイ群は，

$$\Gamma_A(2) = \{ g \in GL(6,\mathbb{Z}) \mid {}^t g A g = A,\ g \equiv 1_6 \bmod 2 \}$$

に共役である。 $\omega^1(\ell),\cdots,\omega^6(\ell)$ は 青本－ゲルファントの超幾何微分方程式 $E(3,6;\frac12,\cdots,\frac12)$ の線型独立解である。この方程式の定義は [MSY1,2] 参照． 6本の直線 $\ell_1,\cdots,\ell_6$ のうち，4本は止まっていると考えられるから $\{\ell\}$ は実質的に 4次元である． 故に，方程式 $E(3,6;\frac12,\cdots,\frac12)$ は 4独立変数で 解空間の次元が 6 なる方程式に書き替ることができる． このような方程式は [SY] で調べられている．

微分方程式 $E(3,6;\frac12,\cdots,\frac12)$ はすばらしい方程式であり，面白いことが色々ある． くわしくは[MSY3]参照．

参考文献

[MSY1]: 松本圭司－佐々木武－吉田： The period map of a 4-parameter family of K3-surfaces and the Aomoto-Gel'fand hypergeometric function of type

(3,6), Proc. J. Acad. 64, A, 8 (1988), 307-310
[MSY2] —: Aomoto-Gel'fandの超幾何函数と周期写像, 数学 (1989).
(この記事の文献表に, Gel'fand達の一連の論文がある).
[MSY3] —: The modromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the Aomoto-Gel'fand hypergeometric function of type (3,6). (プレプリント)
[SY]: 佐々木-吉田: Linear differential equations modeled after hyperquadrics, Tohoku Math. J. 41 (1989), 321-348.