数理解析研究所講究録
第712巻 1990年 5-12

有限体上の対称空間における球関数論

阪大・理　川中宣明
(Noriaki KAWANAKA)

代数学シンポジウム(1989年,於北大)の報告集のために全く同じタイトルの原稿を書いたばかりなので,詳しくは,そちらの報告集を見て頂くということにして,ここでは,話の粗筋だけを書かせて頂くことにする.

§1. 問題.

$\underline{G}$ を $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上の線型代数群で,その定義方程式の係数が有限体 $\mathbb{F}_q$ に入っているもの,とし,τ を $\underline{G}$ の involutive な自己同型で、定義式の係数が $\mathbb{F}_q$ に入っているものとする。$\underline{G}/\underline{G}_\tau$ ($\underline{G}_\tau=\{x\in\underline{G}\mid x^\tau=x\}$) は、代数群のカテゴリーにおける対称空間であり, G/G_τ ($G=\underline{G}(\mathbb{F}_q)$, $G_\tau=\underline{G}_\tau(\mathbb{F}_q)$) は,有限群のカテゴリーにおける対称空間である。G 上の両側 G_τ-不変な $\mathbb{C}$-値関数の空間は畳み込み積により多元環となる。これを Hecke 環と呼び $H(G,G_\tau)$ と書く([竹内])。$\omega\in H(G,G_\tau)$ が,作用 $\omega\longrightarrow f*\omega$ ($f\in H(G,G_\tau)$) による同時固有関数であるとき, G/G_τ 上の球関数という。このような ω を求めよ,というの

が「問題」である。特に、$G = H \times H$，$G_\tau = \Delta H = \{(h,h) \mid h \in H\}$ となる群 H がある場合には、（周知の如く）G/G_τ 上の球関数の概念 と H の既約指標の概念とは、本質的に一致する。特に，$\underline{G}$ が reductive な場合には，G/G_τ 上の球関数論は、〔DL〕や〔L_1〕の良い拡張を、与えるのでは、ないかと期待される。次節以降でも reductive case のみを、考える。

§2.「本当の」動機.

前節のような問題設定は、一応，もっともらしいが，筆者に、このようなタイプの問題が面白そうだ，ということを、教えてくれたのは、板内英一氏の論説〔板内〕である。では、板内氏の動機は、何であったのか？ 以下，［板内］［B］に従いつつ，筆者の理解した（と思っている）所を、書いてみよう。

有限群 H の既約指標は，群環 $\mathbb{C}H$ の既約指標である。群環 $\mathbb{C}H$ は、半単純な多元環に、特別な基底（$\leftrightarrow$ Hの元）を、指定したものと、考えることができる。さらに，基底の元の間に involutive な対応 $h \leftrightarrow h^{-1}$ が与えられている，と考えることができる。さて，

ℂ上の半単純多元環Aに，基底 $\{v, v', \cdots\}$ が指定され，基底の元の間の involutive な対応 $v \longleftrightarrow v^*$ が、いくつかの条件を、満たすように定められているならば，有限群の既約指標の直交関係式に相当する直交関係式が，Aの既約指標に対して成立することがわかっている（例えば[L_2]）。言わば，「群ぬきの，群の表現論」である。Aが可換ならさらに都合が良い。（群の場合は，群環の中心を考えることに相当する。）このような代数的対象は，組み合わせ論の方からも自然に定義できて，組み合わせ論的対象としては，(commutative) association scheme と呼ばれている（[BI]）。可換なアソシエーション・スキームの良いクラスが分類できれば，すばらしいが，今の所，まだそこまでは望めない状態らしい。しかし，比較的調べやすく，かつ面白いクラスとして P- and Q-association scheme というものが定義され，その分類が進んでいる。このクラスのアソシエーション・スキームが導入されるのと，ほぼ同時期に特殊関数論の方で，Askey-Wilson 多項式という直交多項式系が新しく見つかったのだが，これら両者の間には，P- and Q-ass. scheme の既約指標が Askey-Wilson (discrete) polynomials で書ける，という意味で密接な関係があることが知られている。指標と特殊関数とのこのような関係を一般化したい，というのが板内氏のひとつの問題意識であったらしい。アソシエーションスキームの指標の理論は，例えば loop (:群の公理系から結合律を取り去って定義される) に対しても適用できる。Paige's simple Moufang loop $M(\mathbb{F}_q)$ という良い有限 loop が知られている。板内氏と Song 氏が $M(\mathbb{F}_q)$ の既約指標を計算してみた所，$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の既約指標において q を q^3 に置き換えたのと殆ど同じ，という意外な結果を得た。そのとき，$M(\mathbb{F}_q)$ の既約指標は $O_8^+(\mathbb{F}_q)/O_7(\mathbb{F}_q)$ の上の球関数と見ることができる，ということも判った。筆者は [板内] を読んでいて，そこで問われている多くの問題や予想は，§1 のような枠組みで考えるのが自然だろうと思った。これが「本当の」動機である。

§3.「6点セット」

次の6種類の対称空間を，ひとつのセットとして考えたい。(これらは，すべて $\mathbb{F}_q$ 上の「A型対称空間」である。)

(1) $GL_n(\mathbb{F}_q)\times GL_n(\mathbb{F}_q)/\Delta GL_n(\mathbb{F}_q)$ ([G])

(1′) $U_n(\mathbb{F}_q) \times U_n(\mathbb{F}_q) / \Delta U_n(\mathbb{F}_q)$ ([HS], [K])

(2) $GL_{2n}(\mathbb{F}_q) / Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ ([BKS])

(2′) $U_{2n}(\mathbb{F}_q) / Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$

(3) $GL_n(\mathbb{F}_{q^2}) / GL_n(\mathbb{F}_q)$

((3′) $GL_n(\mathbb{F}_{q^2}) / U_n(\mathbb{F}_q)$).

ただし，$U_n(\mathbb{F}_q)$ は $\mathbb{F}_q$ 上のユニタリ群（$\subset GL_n(\mathbb{F}_{q^2})$）である。(3′) だけ括弧でくくってあるのは，この場合の球関数の値について，予想はあるが，まだ証明ができていないことを意味する。最初の2つ (1), (1′) は，§1 でも述べたように，球関数が群の既約指標と一致する場合である。(3) や (3′) も，§1 で述べた枠組みに入っていることに注意しておく。

得られた結果は，「(1)―(3′) の球関数が，Macdonald の対称式 [M] を用いて統一的に記述される。」ということである。ただし (3′) の場合は，まだ予想であり，証明の方は残念ながら統一的ではない。Macdonald の対称式は，A 型の実対称空間上の（多項式型の）球関数の q-analogue として定義されるので，ある意味では，§2 で述べた「特殊関数と既約指標」との

結びつき」の例にはなっている。ただし，球関数の値がMacdonald対称式で書けるという意味ではなく，Macdonald対称式を，別の標準的な対称式の1次結合として書くときの係数が使われるのである。

Macdonaldの対称式は，次のようにして定義される。A型の実対称空間上の不変微分作用素の環の生成元は，Capelli型作用素として統一的に書くことができ，そのradial partsも計算されている（[S]）。radial partsにおいて微分$\frac{\partial}{\partial x_i}$を$q$-差分$\frac{\partial}{\partial_q x_i}$に置き換え（あと少し別の変更もして）得られる$q$-差分作用素系を対称多項式の空間に作用させて，同時固有ベクトルとして得られるのがMacdonaldの対称式で，パラメータqを1にすれば，実対称空間上の球関数になっている。

文献

[坂内] 坂内英一：ある種のアソシエーションスキームの指標表と有限群PSL(2, q)の指標表との関係，代数学シンポジウム報告集，1987，福井大．

[B] E. Bannai : Character Table of commutative association scheme, preprint.

[BI] E. Bannai and T. Ito : Algebraic Combinatorics I, Benjamin, 1984.

[BKS] E. Bannai, N. Kawanaka and S. Y. Song : The character table of the Hecke algebra $H(GL_{2n}(\mathbb{F}_q), Sp_{2n}(\mathbb{F}_q))$, to appear in J. of Algebra.

[DL] P. Deligne and G. Lusztig : Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math. 103 (1976), 103-161.

[L_1] G. Lusztig : Characters of Reductive Groups over a Finite Field, Ann. Math. Study 107, Princeton Univ. Press, 1984.

[L_2] G. Lusztig : Leading coefficients of character values of Hecke algebras, Proc. Symp. Pure Math. Vol 47-2, 235-262.

[G] J. A. Green : The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 402 - 447.

[HS] R. Hotta and T. A. Springer : A specialization theorem for certain Weyl grouprepresentations and an application to the Green polynomials of unitary groups, Invent. Math. 41 (1977), 113 - 127.

[K] N. Kawanaka : Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, Advanced Studies in Pure Math. vol 6, Kinokuniya, 1985, 175-206.
[M] I.G. Macdonald : Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition, to appear.
[S] J. Sekiguchi, Zonal spherical functions on some symmetric spaces, Publ. RIMS, 12 (1977), 455-459.
[竹内] 竹内 勝 :「現代の球関数論」岩波.