数理解析研究所講究録
第 712 巻 1990 年 13-19

On the unitarizability of principal series representations of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups

吉田敬之 (京大理)
(Hiroyuki Yoshida)

§1. 本稿で述べる主結果は、$\mathfrak{p}$ 進体 k 上の連結半単純代数群 G の不分岐主系列表現の unitarizability の決定である。不分岐主系列表現は G の Borel 部分群の quasi-character からの誘導表現として書けるが、この表現が既約であり、かつ G が古典型のときは、unitarizability を完全に決定できる。しかし筆者はここで述べる方法はかなりの一般性をもち、例えば parabolic subgroup からの誘導表現が既約のときの unitarizability は同様に決定できると考えている。結果の要約はすでに [Y1] で発表し、詳しい証明は [Y2] に書いたので、本稿ではなるべく重複をさけ考え方と背景の説明に重点をおいた。

§2. まず G を t.d.group とする。ここに t.d.group とは、ハウスドルフ位相群であって、加算個の開かつコンパクトな集合を開集合の基底としてもつものをいう (cf. Silberger [Si])。π を G の irreducible admissible 表現、V を π の表現空間とする。V 上に non-degenerate invariant hermitian form が存在するとき、π を *hermitian* という。

$$\pi \text{ が } hermitian \Longleftrightarrow \pi \cong \bar{\tilde{\pi}}$$

は容易にわかる。ここに $-$ は複素共役を表し、$\tilde{}$ は contragredient を表す。$\pi \cong \bar{\tilde{\pi}}$ ならば、ある equivalence $I : \pi \longrightarrow \bar{\tilde{\pi}}$ があって

$$(u, v) = \langle I(u), \bar{v} \rangle, \qquad u, v \in V \tag{1}$$

により V 上の invariant hermitian form が得られ、V 上の invariant hermitian form は全てこの形である。ここに $\langle \ , \ \rangle$ は $\bar{\tilde{\pi}}$ と $\bar{\pi}$ の間の canonical pairing を表す。V 上に positive definite な invariant hermitian form が存在するとき、π を unitarizable という。

G 上の $\mathbf{C}$ に値をもつ locally constant functions 全体の vector space を $C_c^\infty(G)$ と書く。$C_c^\infty(G)$ 上の linear functional を G 上の distribution と呼ぶ。$D(G)$ により G 上の distribution 全体の成す vector space を表す。$\alpha \in C_c^\infty(G)$ に対して、$\tilde{\alpha} \in C_c^\infty(G)$ を

$$\tilde{\alpha}(x) = \overline{\alpha(x^{-1})}, \qquad x \in G$$

によって定義する。$T \in D(G)$ が *positive type* とは、$T(\alpha * \tilde{\alpha}) \geq 0$ が任意の $\alpha \in C_c^\infty(G)$ に対して成立することである。$P(G)$ により、positive type の distribution 全体の成す $D(G)$ の subset を表す。以下 G は unimodular であると仮定する。条件 $T \in P(G)$ は $\forall \alpha \in C_c^\infty(G)$ に対して、$\alpha * T * \tilde{\alpha}$ が G 上の positive type の連続函数であることと同値である。これから $T \in P(G)$ ならば、$\forall \alpha, \forall \beta \in C_c^\infty(G)$ に対して、$\alpha * T * \beta$ が G 上の有界連続函数であることが容易にわかる。

THEOREM 1. *t.d.group* G が次の条件 *(P1), (P2)* をみたすとする。

(P1) G は *open compact subgroups* の加算個の和集合である。

(P2) G の任意の *open compact subgroup* K と $1 \in G$ の任意の開近傍 V に対し、G の *open compact subgroup* U で、$U \subseteq V$, U は K で *normal*, K/U が巾零群、をみたすものが存在する。

このとき、任意の $T \in P(G)$, $\alpha \in C_c^\infty(G)$ に対して、*convolution* $T * \alpha$ は G 上の有界連続函数である。

この "片側有界性定理" は、本稿での推論の鍵となるものである。証明は $D(G) \ni T$ の G の open compact subgroup への制限についてやや立ち入った考察を必要とするが、さほど困難ではない。$\mathfrak{p}$ 進巾零群は、条件 (P1), (P2) をみたす。同様な定理が巾零 Lie 群に対しても成立するであろうと期待される。

§3. k を non-archimedean local field, $\mathfrak{O}$ を k の maximal compact subring, ϖ を k の素元、$|\ |$ を k の absolute value とする。このとき、$q = |\varpi|^{-1}$ は k の module である。以下 k 上定義される代数群を bold face roman capital で表し、その k-有理点の成す群を対応する roman capital で表すことにする。

$\mathbf{G}$ は k 上定義された connected semi-simple algebraic group で k 上 split するものとし、$\mathbf{G}$ の k-split maximal torus $\mathbf{T}$ を一つとる。$\mathbf{B}$ を $\mathbf{T}$ を含む Borel subgroup とし、$\mathbf{N}$ を $\mathbf{B}$ の unipotent radical とする。Σ と Δ をそれぞれ $(\mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{T})$ の定める root system と simple roots の集合、Σ^+ を Σ の positive roots の集合とする。$\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ とおく。ここに ℓ は G の rank である。W を Weyl 群とする。$w \in W$ に対して

$$\Psi_w^+ = \{\alpha \in \Sigma^+ \mid w\alpha < 0\}$$

とおく。$X(\mathbf{T}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \mathbf{G}_m)$ を $\mathbf{T}$ の character group とすると、Σ は $X(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \cong \mathbf{R}^\ell$ 内に実現されている。$X_*(\mathbf{T}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, \mathbf{T})$ は $\mathbf{T}$ の co-character group とする。$\alpha \in \Sigma$ に対し co-root $\check{\alpha} \in X_*(\mathbf{T})$ をとり、

$$a_\alpha = \check{\alpha}(\varpi) \in T$$

とおく。

T の quasi-character χ は N 上 trivial において B の quasi-character に拡張されるが、これも同じ記号 χ で表す。$PS(\chi)$ により、G 上の locally constant function φ で

$$\varphi(bg) = \delta_B(b)^{1/2}\chi(b)\varphi(g), \qquad \forall b \in B, \forall g \in G$$

をみたすもの全体の成す vector space を表し、$\pi(\chi)$ により $PS(\chi)$ 上 right translation で realize される G の admissible 表現とする。ここに δ_B は B の modular function である。

以下 §6 の終りまで $\mathbf{G}$ は simply connected であると仮定する。このとき G は Steinberg [St] の意味での k 上の universal Chevalley group と同一視でき [St] での基本的記号を自由に使うことにする。K により $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Sigma$, $t \in \mathfrak{O}$ で生成される G の部分群とする。K は G の maximal compact subgroup であり、Iwasawa 分解 $G = BK$ が成立する。$T \cap K$

は $\check{\alpha}(t)=h_\alpha(t),\ t\in\mathfrak{O},\ \alpha\in\Sigma$ で生成される T の maximal compact subgroup である。T の quasi-character χ は $T\cap K$ で trivial であるとき *unramified* であるという。X により、T の unramified quasi-character 全体の群を表す。

$$X\ni\chi\longrightarrow(\chi(a_{\alpha_1}),\chi(a_{\alpha_2}),\cdots,\chi(a_{\alpha_\ell}))\in(\mathbf{C}^\times)^\ell$$

は同型写像であり、これにより X に complex structure を入れる。$\chi\in X$ が任意の $w\in W$ に対して $w\chi\neq\chi$ をみたすとき χ を regular という。

$$X^r=\{\chi\in X\mid\chi\ \text{は}\ regular\},$$
$$X^i=\{\chi\in X^r\mid\chi\ \text{は}\ irreducible\}$$

とおく。Casselman [C] により、$\chi\in X^r$ が $\chi\in X^i$ となる必要十分条件は

(2) $$\chi(a_\alpha)\neq q,\qquad\forall\alpha\in\Sigma$$

が成立することである。W の元 w をとり

$$X_w=\{\chi\in X\mid w\chi=\bar{\chi}^{-1}\},\qquad X_w^r=X_w\cap X^r,\qquad X_w^i=X_w\cap X^i$$

とおく。w を代表する $x_w\in K$ をとり、$PS(\chi)$ から $PS(w\chi)$ への intertwining operator T_w を

$$(T_w(\varphi))(g)=\int_{wNw^{-1}\cap N\backslash N}\varphi(x_w^{-1}ng)dn,\quad\varphi\in PS(\chi),\ g\in G,$$

によって定義する。ここに invariant measure dn は適当に normalize しておくのが都合がよいのであるが、以下の議論に必要ではないのでここでは述べない。この積分は全ての $\alpha\in\Psi_w^+$ に対して $|\chi(a_\alpha)|<1$ ならば絶対収束し、X 全体に有理型に解析接続できる。全ての $\alpha\in\Psi_w^+$ に対して $\chi(a_\alpha)\neq1$ ならば T_w は χ で正則である。特に T_w は X^r で正則である。ここで正則などの正確な意味は次の通り。S により、K 上の locally constant functions で left $B\cap K$-invariant なもの全体の成す vector space を表す。制限写像 R により、$PS(\chi)$ と S は vector space として同型になる。任意の $f\in S$ と $k\in K$ に対して $T_w((R^{-1}f))(k)$ が χ で正則、または有理型であるとき、T_w は χ で正則、あるいは有理型であるという。

§4. まず $\chi\in X^i$ として、$\pi(\chi)$ が unitarizable になる条件を考察する。(§5 の終りまで $\chi\in X^i$ と仮定する。) $\pi(\chi)$ が unitarizable とすると $\pi(\chi)$ は hermitian ゆえ、$\pi(\chi)\cong\overline{\tilde{\pi}(\chi)}\cong\pi(\bar{\chi}^{-1})$ がわかり、これからある $w\in W$ に対して $w\chi=\bar{\chi}^{-1}$ が成立していなければならない。即ち $\chi\in X_w$. これから $w^2\chi=\chi$ が得られ、$\chi\in X^r$ ゆえ、$w^2=1$ をうる。(1) により、$PS(\chi)$ 上の invariant hermitian form は、ある $c\in\mathbf{C}$ があって

(3) $$(\varphi_1,\varphi_2)=c\int_{B\backslash G}(T_w(\varphi_1))(g)\overline{\varphi_2(g)}dg,\qquad\varphi_1,\varphi_2\in PS(\chi)$$

により与えられていることがわかる。従って問題は (3) で与えられる (,) が positive definite か否かを決することである。w_0 により W の longest element を表し、w_0 を代表する K の元を ω_0 とかく。$B\omega_0N$ が G の big cell であることから、(3) は

(4) $$(\varphi_1,\varphi_2)=c\int_N(T_w(\varphi_1))(\omega_0n)\overline{\varphi_2(\omega_0n)}dn,\quad\varphi_1,\varphi_2\in PS(\chi)$$

と変形される。任意の $\Phi \in C_c^\infty(N)$ に対して、ある $\varphi \in PS(\chi)$ が一意的に定まり、$\Phi(n) = \varphi(\omega_0 n)$, $n \in N$ が成立つ。$\varphi = \iota_\chi(\Phi)$ とかく。

$$T_\chi(\Phi) = T_w(\iota_\chi(\Phi))(\omega_0), \qquad \Phi \in C_c^\infty(N) \tag{5}$$

とおけば、T_χ は N 上の distribution を与える。

LEMMA 1. *$\pi(\chi)$ が unitarizable ならば cT_χ は positive type である。*

これは (4) により容易にわかる。Δ の部分集合 J に対して、W_J は J の元の定義する reflexion で生成される Coxeter 群、w_J を W_J の longest element とする。W の位数 2 の元は、ある $J \subseteq \Delta$ に対して、w_J と W で共役になる (cf. [Bou], p. 225) 。任意の $w_1 \in W$ について $\pi(w_1\chi) \cong \pi(\chi)$ であるから、$\chi \in X^i_{w_J}$ と仮定して一般性を失わない。($\chi \in X^i$ に対して $\pi(\chi)$ の unitarizability を問題とする限り。) Σ_J を J で生成される root system とし、

$$\Sigma_J^+ = \Sigma_J \cap \Sigma^+, \qquad n_J(\alpha) = \sum_{\beta \in \Sigma_J^+} \langle \beta, \check{\alpha} \rangle, \qquad \alpha \in \Sigma_J,$$

とおく。ここに $\langle\ ,\ \rangle$ は root と co-root の間の canonical pairing を表す。$\pi(\chi)$ が unitarizable ならば、Theorem 1 と Lemma 1 により、$T_\chi * f$ は任意の $f \in C_c^\infty(N)$ に対して N 上の有界函数となる。これから、次の評価を得る。

THEOREM 2. *$\chi \in X^i_{w_J}$, $\pi(\chi)$ は unitarizable であると仮定する。このとき*

$$q^{-n_J(\alpha)/2} < |\chi(a_\alpha)| < q^{n_J(\alpha)/2}, \qquad \forall \alpha \in \Sigma_J$$

が成立つ。

w_J が J に -1 倍で作用しているとする。このとき、任意の $\alpha \in \Sigma_J$ に対し、$w \in W$, $\beta \in J$ があり $w(\beta) = \alpha$ となる。Theorem 2 を $\pi(w\chi)$ に用いれば、

$$q^{-n_J(\beta)/2} < |w\chi(a_\beta)| = |\chi(a_\alpha)| < q^{n_J(\beta)/2}$$

を得るが、$n_J(\beta) = 2$ であるから、次の Corollary を得る。

COROLLARY. *w_J が J に -1 倍で作用していれば、*

$$q^{-1} < |\chi(a_\alpha)| < q, \qquad \forall \alpha \in \Sigma_J \tag{6}$$

が成立つ。

この評価は spherical function が有界である等の条件から得られるものよりはるかに sharp である。

§5. この Corollary と表現の deformation についての議論を組合せることにより、$\pi(\chi)$, $\chi \in X^i$ の unitarizability は完全に決定できる。ここで deformation とは、$\chi \in X$ を X 内の連続的な path $p : [0,1] \longrightarrow X$ の上で動かすことをいう。この path 上の各点で $\pi(p(t))$

が既約であれば $\pi(p(0))$ と $\pi(p(1))$ の unitarizability は同値となる（正確には Lemma 1 参照）。しかし、$0 < t_0 < 1$ で $\pi(p(t_0))$ が既約でないものがあれば、$\pi(p(0))$ と $\pi(p(1))$ の unitarizability の関係を調べることはかなり難しくなる。一方、$\chi(a_\alpha) = 1$, $\alpha \in \Psi_w^+$ となる χ において、T_w は holomorphic でなくなるが、このような χ が$[0,1]$ 上に存在することは大した問題を引起こさないのみならず、むしろ漸近的に hermitian form の符号がわかり都合がよい。Theorem 2 の Corollary により、問題となる χ はすでに十分小さな領域に入っており、よくわかる表現に、上述の困難を避けて、 deform 可能なのである。主要な Lemma をあげると

Lemma 2. $p : [0,1] \longrightarrow X_w^i$ を連続写像とすれば、$\pi(p(0))$ と $\pi(p(1))$ の *unitarizability* は同値である。

Lemma 3. $w \in W$ は位数 *2* とし、$p : [0,1] \longrightarrow X_w$ を連続写像とする。このとき
(i) $\chi_0(a_\alpha) = 1, \qquad \forall\alpha \in \Psi_w^+,$
(ii) $p((0,1]) \subseteq X_w^i$
ならば、$\pi(p(t))$, $0 < t \leq 1$ は全て *unitarizable* である。

この Lemma は complementary series を作る standard technique の一つである。しかし、条件 (i) は強すぎて十分一般ではない。次の Lemma が最も有用である。

Lemma 4. w, w_1, w_2 を W の位数 *2* の元とし、$w = w_1 w_2$, $l(w) = l(w_1) + l(w_2)$ とする。ここに l は W の元の *length* 表す。$p : [0,1] \longrightarrow X_w$, $p_1 : [0,1] \longrightarrow X_{w_1}$, を連続写像とし、$\chi_t = p(t)$, $\chi_t^1 = p_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$ とおく。次の条件 *(i)* $\sim$ *(iv)* を仮定する。
(i) $\chi_0 = \chi_0^1$.
(ii) $p(0,1] \subseteq X_w^i$ かつ $p_1(0,1] \subseteq X_{w_1}^i$.
(iii) $\forall\alpha \in \Psi_{w_1}^+$ について$\chi_0(a_\alpha) \neq 1, q$.
(iv) $\forall\alpha \in \Psi_{w_2}^+$ について$\chi_0(a_\alpha) = 1$.
このとき $\pi(\chi_{t_0}^1)$ がある $t_0 \in (0,1]$ について *unitarizable* になることと、$\pi(\chi_t)$ が全ての $0 < t \leq 1$ について *unitarizable* であることとは同値である。

Lemma 3 はこの Lemma の $w_1 = 1$ の場合であると解せる。

これによって得られた最終的な結果は次の通り。B 型、C 型、D 型について別々に考察する。(A 型については、Bernstein, Tadič 等の結果があるので省く。) Σ を [Bou] の "Planche" の様に実現しておく。w_J を更にその共役 $w_{J'}$ で置き換えることにより、J を次の形に normalize できる。Σ が B_ℓ 型または C_ℓ 型ならば、

$$J = \{\, \alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{2m-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell \,\}, \quad 2m < n.$$

Σ が D_ℓ 型ならば、

$$J = \{\, \alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{2m-1} \,\} \cup J_1, \qquad J_1 = \{\, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell \,\}.$$

ここで $2m < n$, $|J_1| \geq 4$, $|J_1|$ が偶数、または $J_1 = \emptyset$, $2m \leq \ell - 1$, または $J_1 \subseteq \{\, \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell \,\}$, $2m < \ell - 1$.

この様に normalize しておくと、w_J は J に -1 倍で作用し、Theorem 2 の Corollary は unitarizability の必要条件となる。

THEOREM 3. **G** は *type* B_ℓ, C_ℓ, または D_ℓ, $\chi \in X^i_{w_J}$ とする。$\pi(\chi)$ が *unitarizable* となる必要十分条件は評価 (6) と型に応じて次の符号条件が満たされることである。

(i) B_ℓ 型のとき

$$\chi(a_{\alpha_\ell}) > 0 \quad \text{if} \quad \alpha_\ell \in J, \qquad \chi(a_{\alpha_{2m-1}}) > 0 \quad \text{if} \quad \alpha_\ell \notin J.$$

(ii) C_ℓ 型のとき

$$\chi(a_{2\varepsilon_i}) < 0, \ n \le i \le \ell \quad \text{となる indices } i \text{ の数は偶数。}$$

(iii) C_ℓ 型のとき

$$\chi(a_\alpha) > 0, \qquad \forall \alpha \in J_1.$$

§6. $\chi \in X$ とする。$PS(\chi)$ は長さ有限で (即ち組成列をもち)、唯一つの spherical constituent π^1_χ をもつことが知られている。**P** により、π^1_χ が unitarizable となる $\chi \in X$ 全体の集合を表す。**P** は W で stable な compact set になることはよく知られている。(例えば Macdonald による。)

THEOREM 4. **G** は古典型、$\chi \in X$ かつ $\pi(\chi)$ は *irreducible* とする。このとき、$\pi(\chi)$ が *unitarizable* となる必要十分条件は、χ が $\mathbf{P} \cap X^i$ の X における *closure* に入ることである。

この定理もまた deformation argument により証明できる。$\pi(\chi)$ の既約性の条件は Kato [K], Muller [M] により知られている。また Theorem 3 により $\mathbf{P} \cap X^i$ は決定された。従って $\pi(\chi)$ が既約である限り、$\pi(\chi)$ の unitarizability は完全にわかった。

§7. 次に **G** が simply connected であるという条件を落とそう。(この部分は土方教授との discussion が有益であった。) **G** を §3 の通り k 上 split する connected semi-simple algebraic group とする。$\tilde{\mathbf{G}}$ を **G** の universal covering group とし、$\psi : \tilde{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathbf{G}$ を central isogeny とする。$\tilde{\mathbf{T}}$, **T** をそれぞれ $\tilde{\mathbf{G}}$, **G** の k-split maximal torus とする。$\mathbf{T} = \psi(\tilde{\mathbf{T}})$ としてよい。$G' = \psi(\tilde{G})$, $T' = \psi(\tilde{T})$ とおく。$\tilde{X}$, X, X' により $\tilde{T}$, T, T' の unramified quasi-characters の集合とする。$\chi' \in X'$ に対しても、$\pi(\chi')$ を全く同様に定義できる。このとき、$\tilde{\chi} = \chi' \circ \psi \in \tilde{X}$ を考えると、$\tilde{\chi}$ は χ' が regular なとき、かつそのときに限り regular となり、$\pi(\tilde{\chi})$ の unitarizability (resp. irreducibility) は $\pi(\chi')$ の unitarizability (resp. irreducibility) と同値である。X'^p は、$\chi' \in X$ で χ' が regular, $\pi(\chi')$ が irreducible かつ unitarizable となるもの全体の集合とする。X'^p は **G** が古典型のとき Theorem 3 によって決定されている。

THEOREM 5. **G** は古典型、$\chi \in X$, $\pi(\chi)$ は既約とする。このとき $\pi(\chi)$ が *unitarizable* になる必要十分条件は、$\chi|T'$ が X'^p の X' における *closure* に入ることである。

以上の議論で、古典型との仮定は、deformation を詳しく調べるときに必要となる。例外型のときも同様の結果が得られると思われ、G_2 型のときは Theorems 3, 4 をそのまま拡張できる。(G_2 型の split 群は simply connected である。)

References

[Bor] A. Borel and N. Wallach, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, Princeton University Press, 1980.

[Bou] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV, V, VI, Hermann, Paris, 1968.

[C] W. Casselman, The unramified principal series of $\mathfrak{p}$-adic groups I. The spherical function, Compositio Math. 40(1980), 387–406.

[K] S. Kato, Irreducibility of principal series reperesentations for Hecke algebras of affine type, Jour. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 28(1982), 929–943.

[M] I. Muller, Integrales d'entrelacement pour un group de Chevalley sur un corps p-adique, in Lecture note in Math. 739, Springer Verlag, 1979.

[Si] A. J. Silberger, Introduction to Harmonic analysis on reductive p-adic groups, Math. Notes 23, Princeton University Press, 1979.

[St] R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups, Yale University Lecture notes (1967).

[Y1] H. Yoshida, On the unitarizability of principal series representations of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups, Proc. Japan Acad., 65, Ser. A (1989), 227–230.

[Y2] H. Yoshida, On the unitarizability of principal series representations of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups, preprint, 1989.