数理解析研究所講究録
第 712 巻 1990 年 45-65

量子群 $GL_q(n+1;\mathbb{C})$ の有限次元表現と
量子球面 $SU_q(n)\backslash SU_q(n+1)$ 上の帯球函数

Institute for Advanced Study
山田裕史 (YAMADA, Hirofumi)

§0 Introduction

本稿は上智大学の野海正俊氏, 名古屋大学の三町勝久氏と私がこの一年間程共同研究を続けている量子群 $GL_q(N;\mathbb{C})$ の表現論についての報告である (cf. [NYM 1,2]).

初めに "q-analogue" 又は "basic analogue" ということについて若干の説明を試みる。くわしくは [H], [M'] などを見られたい。簡単に言ってしまえば q-analogue とは自然数 n を

$$[n] = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = (1-q^n)/(1-q)$$

に置きかえることである。ここで q は 0 でない複素数とする。極限 $q\mapsto 1$ を考えればもとの n が回復する。以後 q-analogue の記号として

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k) \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

をしばしば用いる。歴史的に一番早くから知られているのは, おそらく二項係数の q-analogue であろう。これは "Gauss の

二項係数とも呼ばれる：
$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m (q;q)_{n-m}}, \qquad n \geq m \geq 0 .$$
これは次のような漸化式を満たすことが証明される。
$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} q^{n-m+1} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} q^{m} + \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} .$$
今2つの変数 z, w（ある $\mathbb{C}$-代数の元）が $wz = qzw$ という交換関係を満たすとする。このとき容易に二項定理
$$(z+w)^n = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} z^m w^{n-m}$$
が証明される。このように"q-可換性"と q-analogue とは密接に結びついている。

ここでいう量子群の理論とは代数群の座標環の非可換化（q-可換化）のことであり，表現とはその上の余加群のことである（cf. [J], [D], [W]）．従って例えば表現の"球函数"として様々な古典的特殊函数の q-analogue が自然に現れることが期待される。既に量子群 $SU_q(2)$ の既約表現は（q が1の巾根でないときには）分類され行列要素も Jacobi 多項式の q-analogue を用いて表されることが知られている。この結果は日本のグループ [M]，オランダの T. Koornwinder，ソ連の L.L. Vaksman & Ja. S. Soibelman によって同時，独立に得られたようである。我々はここでの結果を量子群 $GL_q(N;\mathbb{C})$, $SU_q(N)$ に拡張することを次なる問題として選んだ。

本稿を通じて自然数 n を固定し $N = n+1$ とおく。また $q \in \mathbb{C}^{\times}$

は1の巾根でないものとする。さらに§4では $q\in\mathbb{R}^{\times}$ とする。

§1　量子半群 $Mat_q(N;\mathbb{C})$ と量子小行列式．

集合 S の元を成分にもつサイズが N の正方行列全体を $Mat(N;S)$ とかく。半群 $Mat(N;\mathbb{C})$ の座標環（函数環）は次のような多項式環である：

$$A(Mat(N;\mathbb{C}))=\mathbb{C}[x_{ij}\quad(0\leq i,j\leq n)].$$

この座標環は $\mathbb{C}$-代数としての準同型

$$(1.1)\quad\begin{cases}\Delta: A(Mat(N;\mathbb{C}))\longrightarrow A(Mat(N;\mathbb{C}))\otimes A(Mat(N;\mathbb{C}))\\ \qquad x_{ij}\longmapsto \sum_{k=0}^{n} x_{ik}\otimes x_{kj}\\ \varepsilon: A(Mat(N;\mathbb{C}))\longrightarrow \mathbb{C}\\ \qquad x_{ij}\longmapsto \delta_{ij}\end{cases}$$

により $\mathbb{C}$-余代数の構造をも持つ．

最初に[RTF]に従って上の $\mathbb{C}$-代数の"量子化"を導入しよう。N^2 個の文字 x_{ij} $(0\leq i,j\leq n)$ で生成された $\mathbb{C}$-代数で次の基本関係式をもつものを A_N とおく．

$$(1.2)\quad\begin{cases}x_{ik}x_{jk}=q\,x_{jk}x_{ik},\quad x_{ki}x_{kj}=q\,x_{kj}x_{ki}\quad(i<j)\\ x_{il}x_{jk}=x_{jk}x_{il}\qquad(i<j,\ k<l)\\ x_{ik}x_{jl}-q\,x_{il}x_{jk}=x_{jl}x_{ik}-q^{-1}x_{jk}x_{il}\quad(i<j,\ k<l).\end{cases}$$

この上には"行列の積"に対応して(1.1)と同じ $\mathbb{C}$-代数準同型 Δ,ε が存在する。これらをそれぞれ余積，余単位元として，

$\mathcal{A}_N$ は $\mathbb{C}$-余代数の構造をもつ。この $\mathbb{C}$-双代数 $\mathcal{A}_N$ を座標環にもつ"量子半群"を $Mat_q(N;\mathbb{C})$ と定義する。すなわち $\mathcal{A}_N = A(Mat_q(N;\mathbb{C}))$. いわゆる"Diamond Lemma"([B])を用いることにより $\mathcal{A}_N$ は可換な場合の多項式環 $A(Mat(N;\mathbb{C}))$ と同程度の大きさのものであることが示される。すなわち $\mathcal{A}_N$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として単項式基底

$$\{x^A = x_{00}^{a_{00}} x_{01}^{a_{01}} \cdots x_{10}^{a_{10}} x_{11}^{a_{11}} \cdots x_{nn}^{a_{nn}} ;\ A = (a_{ij}) \in Mat(N;N)\}$$

をもつ。

量子半群 $Mat_q(N;\mathbb{C})$ 上での線型代数を展開するため、最も簡単な"表現"を準備する。今 N 次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間 V、その基底 $x_0, \cdots, x_n$ を固定する。線型写像 R を

$$R: V \longrightarrow V \otimes \mathcal{A}_N \ :\ x_j \longmapsto \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes x_{ij}$$

により定義する。この余作用により V は右 $\mathcal{A}_N$-余加群の構造をもつ。これを量子半群 $Mat_q(N;\mathbb{C})$ の"ベクトル表現"と呼ぼう。次に E を N 個の文字 $y_0, \cdots, y_n$ で生成され、次の基本関係式をもつ $\mathbb{C}$-代数とする。

$$y_i^2 = 0 \quad (0 \le i \le n), \qquad y_j y_i = -q y_i y_j \quad (i<j).$$

このとき E も $\mathbb{C}$-代数準同型

$$R: E \longrightarrow E \otimes \mathcal{A}_N \ :\ y_j \longmapsto \sum_{i=0}^{n} y_i \otimes x_{ij}$$

を余作用として右 $\mathcal{A}_N$-余加群の構造をもつことが示される。さらに E を $E = \sum_{r=0}^{N}{}^{\oplus} E_r$ と $y_0, \cdots, y_n$ の次数で直和分解したとき、

各 E_r は $\mathcal{A}_N$-部分余加群にな、ていることがわかる。この E_r を $Mat_q(N;\mathbb{C})$ の"r 次交代テンソル表現"と呼ぶ。さて E_r の表現行列を考察しよう。今 $J=\{j_0<j_1<\cdots<j_{r-1}\}$ を $\{0,1,\cdots,n\}$ の部分集合とする。このとき E_r の元 $y_{j_0}\cdots y_{j_{r-1}}$ を y_J と略記する。表現行列の行列要素とは次式で定まる元 $\xi^I_J=\xi^{i_0\cdots i_{r-1}}_{j_0\cdots j_{r-1}}\in\mathcal{A}_N$ のことである。

$$R(y_J)=\sum_{\# I=r} y_I\otimes\xi^I_J\,.$$

計算により

$$\xi^I_J=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(-q)^{l(\sigma)}x_{i_{\sigma(0)}j_0}\cdots x_{i_{\sigma(r-1)}j_{r-1}}$$

であることが確かめられる。ここで $l(\sigma)=\#\{(i,j);\,i<j,\,\sigma(i)>\sigma(j)\}$ はいわゆる"転倒数"である。この量 ξ^I_J を行 I, 列 J に関する"量子 r-小行列式"と呼ぶことは自然であろう。特に $I=\{0,1,\cdots,r-1\}$ のとき ξ^I_J を ξ_J, ξ^J_I を ξ^J と略記することがある。表現の行列要素というこことから次が従う。

$$\Delta(\xi^I_J)=\sum_{\# K=r}\xi^I_K\otimes\xi^K_J\,,\quad \varepsilon(\xi^I_J)=\delta_{I,J}$$

さらに $r=N$ のときは $I=J=\{0,1,\cdots,n\}$ として ξ^I_J は"量子行列式"と呼ばれる：

$$\det_q:=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}(-q)^{l(\sigma)}x_{\sigma(0),0}\cdots x_{\sigma(n),n}$$

$$\Delta(\det_q)=\det_q\otimes\det_q\,,\quad \varepsilon(\det_q)=1.$$

今 $\tau=\sigma^{-1}$ とすると $l(\sigma)=l(\tau)$ で

$$x_{\sigma(0),0}\cdots x_{\sigma(n),n}=x_{0,\tau(0)}\cdots x_{n,\tau(n)}$$

であるから，$\det q$ のもう一つの表示が得られる。

$$\det q = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} (-q)^{\ell(\tau)} x_{0,\tau(0)} \cdots x_{n,\tau(n)} .$$

量子小行列式はいくつかの極立った性質を有する。それらをここでまとめておく。$\{0,1,\cdots,n\}$ の部分集合 I, J に対して "q-符号" を

$$sgn_q(I;J) = \begin{cases} 0 & \text{if } I \cap J \neq \phi \\ (-q)^{\ell(I,J)} & \text{if } I \cap J = \phi \end{cases}$$

と定義する。ここで $\ell(I,J) = \#\{(i,j),\ i \in I, j \in J,\ i > j\}$.

<u>定理 1.1</u>（Laplace 展開）。正整数 r, r_0, r_1 を $0 < r \leq N$, $r_0 + r_1 = r$ ととり $I, J \subset \{0,1,\cdots,n\}$ を $\#I = \#J = r$ ととる。

(a) $J_\nu \subset J$, $\#J_\nu = r_\nu$ $(\nu = 0,1)$ としたとき，

$$sgn_q(J_0;J_1)\, \xi^I_J = \sum_{I_0 \cup I_1 = I} \xi^{I_0}_{J_0} \xi^{I_1}_{J_1}\, sgn_q(I_0;I_1).$$

ここで和は I の分割 $I_0 \cup I_1$ で $\# I_\nu = r_\nu$ $(\nu = 0,1)$ を満たすものをわたる。

(b) $I_\nu \subset I$, $\# I_\nu = r_\nu$ $(\nu = 0,1)$ としたとき，

$$sgn_q(I_0;I_1)\, \xi^I_J = \sum_{J_0 \cup J_1 = J} \xi^{I_0}_{J_0} \xi^{I_1}_{J_1}\, sgn_q(J_0;J_1).$$

ここで和は J の分割 $J_0 \cup J_1$ で $\# J_\nu = r_\nu$ $(\nu = 0,1)$ を満たすものをわたる。 //

<u>系</u>（余因子展開）

(a) $$\sum_{k=0}^{n} (-q)^{i-k}\, \xi^{\hat{k}}_{\hat{i}}\, x_{kj} = \delta_{ij} \det q ,$$

(b) $$\sum_{k=0}^{n} (-q)^{k-j}\, x_{ik}\, \xi^{\hat{j}}_{\hat{k}} = \delta_{ij} \det q .$$

ここで $\hat{k} = (0,1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n)$。 //

今 (i,j)-余因子を $\tilde{x}_{ij} = (-q)^{j-i}\xi^{\hat{i}}_{\hat{j}}$ と定義し、$x = (x_{ij})_{ij}$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_{ji})_{ij} \in Mat(N; \mathcal{A}_N)$ と書いておくと上の系は $\tilde{x}\cdot x = x\cdot \tilde{x} = \det_q \cdot I_N$ と書かれる。これより $x\cdot \det_q = x\cdot\tilde{x}\cdot x = \det_q\cdot x$, すなわち、$\det_q$ は $\mathcal{A}_N$ の中心に入ることがわかる。実は次の事実がある。

<u>定理1.2.</u> $\mathrm{Center}(\mathcal{A}_N) = \mathbb{C}[\det_q]$ //

最後に量子小行列式の間の(一般化された) Plücker 関係式を述べておく。

<u>定理1.3.</u> 正整数 l_ν, r_ν $(\nu = 0,1)$ を $l_\nu + r_\nu \leq N$ ととる。$\{0,1,\cdots,n\}$ の部分集合 I_ν, J_ν, K を $\# I_\nu = l_\nu + r_\nu$, $\# J_\nu = l_\nu$, $\# K = r_0 + r_1$ ととる。このとき $\#(I_0 \cup I_1) < r_0 + r_1$ ならば、

(a) $\displaystyle\sum_{K'\cup K''=K} \xi^{I_0}_{J_0\cup K'}\,\xi^{I_1}_{K''\cup J_1}\, \mathrm{sgn}_q(J_0;K')\,\mathrm{sgn}_q(K';K'')\,\mathrm{sgn}_q(K'';J_1) = 0,$

(b) $\displaystyle\sum_{K'\cup K''=K} \xi^{J_0\cup K'}_{I_0}\,\xi^{K''\cup J_1}_{I_1}\, \mathrm{sgn}_q(J_0;K')\,\mathrm{sgn}_q(K';K'')\,\mathrm{sgn}_q(K'';J_1) = 0$

が成り立つ。ここで和は K の分割 $K' \sqcup K''$ で $\# K' = r_0$, $\# K'' = r_1$ を満たすものをわたる。//

§2 量子群 $GL_q(N;\mathbb{C})$ の有限次元表現の実現.

最初に量子群 $GL_q(N;\mathbb{C})$ を量子半群 $Mat_q(N;\mathbb{C})$ の場合と同様に座標環により定義する。量子群 $GL_q(N;\mathbb{C})$ の座標環 $A(GL_q(N;\mathbb{C}))$ は $\mathcal{A}_N = A(Mat_q(N;\mathbb{C}))$ に $\det_q^{-1}$ を付加することによって得られる。

$$A(GL_q(N;\mathbb{C})) = \mathbb{C}[\, x_{ij}\ (0\leq i,j\leq n),\ \det_q^{-1}\,].$$

基本関係式は (1.2) に

$$x_{ij}\cdot \det_q^{-1} = \det_q^{-1}\cdot x_{ij} \qquad (0\leq i,j\leq n)$$

$$\det_q\cdot \det_q^{-1} = \det_q^{-1}\cdot \det_q = 1$$

を付け加える。今後 $A(GL_q(N;\mathbb{C}))$ をしばしば $\mathcal{A}_N^{GL}$ とも書く。$\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{A}_N^{GL}$ も (1.1) に

$$\Delta(\det_q^{-1}) = \det_q^{-1}\otimes \det_q^{-1}, \quad \varepsilon(\det_q^{-1}) = 1$$

を加えることによって $\mathbb{C}$-双代数になるが、さらに $\mathbb{C}$-代数の逆準同型

$$S : \mathcal{A}_N^{GL}\longrightarrow \mathcal{A}_N^{GL} : x_{ij}\longmapsto \tilde{x}_{ji}\det_q^{-1} = (-q)^{i-j}\xi_{\hat{i}}^{\hat{j}}\det_q^{-1}$$

が存在してこれが対合射 (antipode) になる。すなわち $\mathcal{A}_N^{GL}$ は Hopf 代数の構造をもつ。次に量子群 $SL_q(N;\mathbb{C})$ の座標環 $\mathcal{A}_N^{SL} = A(SL_q(N;\mathbb{C}))$ は商代数 $\mathcal{A}_N/\mathcal{A}_N(\det_q - 1)$ として定義される。$\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{A}_N^{SL}$ も対合射 $S(x_{ij}) = \tilde{x}_{ji}$ により Hopf 代数である。$\mathbb{C}$-双代数の準同型 $\mathcal{A}_N \longrightarrow \mathcal{A}_N^{GL}\longrightarrow \mathcal{A}_N^{SL}$ を通して任意の $\mathcal{A}_N$-余加群は $\mathcal{A}_N^{GL}$-余加群, $\mathcal{A}_N^{SL}$-余加群とみなされる。

さて量子群 $GL_q(N;\mathbb{C})$ の"部分群"を用意する。対角部分群 H の座標環は N 変数の (可換な) Laurent 多項式環である:

$$A(H) = \mathbb{C}[t_i, t_i^{-1} \ (0\leq i\leq n)].$$

制限写像を π_H と書く:

$$\pi_H : \mathcal{A}_N^{GL}\longrightarrow A(H) : x_{ij}\longmapsto \delta_{ij}t_i.$$

次に"上三角 (resp. 下三角) 行列"から成る Borel 部分群 B^+

(resp. B^-) の座標環を

$$A(B^+) = \mathbb{C}[z_{ij}\ (i \leq j),\ z_{ii}^{-1}\ (0 \leq i \leq n)]$$

$$(\text{resp.}\quad A(B^-) = \mathbb{C}[z_{ij}\ (i \geq j),\ z_{ii}^{-1}\ (0 \leq i \leq n)]\quad)$$

と定義する。交換関係は (1.2) と同様である。制限写像は $\pi_{B^\pm} : A_N^{GL} \longrightarrow A(B^\pm)$ と書かれる。

さて本節の主題である $GL_q(N;\mathbb{C})$ の有限次元表現の構成を述べるため、少し一般的定義をしておこう。今 G を座標環 $A(G)$ をもつ量子群とする。量子空間 X が"左 G-空間"であるとは、座標環 $A(X)$ が左 $A(G)$-余加群の構造をもつことをいう:

$$L : A(X) \longrightarrow A(G) \otimes A(X).$$

$A(G)$ の元 χ が乗法的であるとする。すなわち

$$\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi,\quad \varepsilon(\chi) = 1.$$

このとき、$A(X)$ の元 φ が χ に関して"左 G-相対不変"であるとは

$$L(\varphi) = \chi \otimes \varphi$$

を満たすことをいう。それらの全体を $A(G\backslash X;\chi)$ と書く。特に $\chi = 1$ のときは単に φ は"左 G-不変"であるといい、その全体を $A(G\backslash X)$ と書く。右 G-空間、右 G-(相対)不変も同様に定義される。さらに G, G' を量子群とするとき両側 (G,G')-空間、両側 (G,G')-(相対)不変も自然に定義される。両側 (G,G')-不変式の全体を $A(G\backslash X/G')$ と書く。X が両側 (G,G')-空間のとき、$\chi \in A(G)$ に関する左 G-相対不変式の全体 $A(G\backslash X;\chi)$ は、

右$A(G')$-部分余加群，$x'\in A(G')$に関する右G'-相対不変式の全体$A(X/G';x')$は左$A(G)$-部分余加群になっている。

我々の$GL_q(N;\mathbb{C})$にもどろう。しばらく$G=GL_q(N;\mathbb{C})$とおく。先ず$X=Mat_q(N;\mathbb{C})$は余積Δにより両側G-空間である。基底$\{\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_n\}$をもつ自由$\mathbb{Z}$-加群を$L_N$とおく。$L_N$上に対称双一次形式$\langle\ ,\ \rangle : L_N\times L_N\longrightarrow\mathbb{Z}$を$\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\delta_{ij}$により定義する。今後$L_N$の元$\lambda$を"整形式"，$\lambda=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\varepsilon_i$で$\lambda_0\geqq\cdots\geqq\lambda_n$を満たすものを"優形式"，さらに$\lambda_n\geqq 0$なる優形式を"正の優形式"と呼ぶ。整形式$\lambda=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\varepsilon_i\in L_N$に対して乗法的元$t^\lambda$, z^λをそれぞれ次のように定義する。

$$t^\lambda=t_0^{\lambda_0}\cdots t_n^{\lambda_n}\in A(H),\quad z^\lambda=z_{00}^{\lambda_0}\cdots z_{nn}^{\lambda_n}\in A(B^{\pm})。$$

これらは$t^\lambda\cdot t^\mu=t^{\lambda+\mu}$, $z^\lambda\cdot z^\mu=z^{\lambda+\mu}$ $(\lambda,\mu\in L_N)$という性質をもつことを注意しておく。上の一般論より$X=Mat_q(N;\mathbb{C})$としたとき$A(H\backslash X;t^\lambda)$, $A(B^-\backslash X;z^\lambda)$は$\mathcal{A}_N=A(X)$の右$A(G)$-部分余加群である。後者が$G=GL_q(N;\mathbb{C})$の既約表現を与えるわけであるが、この空間を記述するために標準単項式を導入しよう。L_Nの元Λ_mを$\Lambda_m=\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{m-1}$ $(1\leqq m\leqq N)$で定義する。正の優形式$\lambda=\Lambda_{m_0}+\cdots+\Lambda_{m_{\ell-1}}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\varepsilon_i$
$(m_0\geqq\cdots\geqq m_{\ell-1}>0,\ \lambda_0\geqq\cdots\geqq\lambda_n\geqq 0)$に対して次のような数列を考える。

$$T=(T_{rs}\in\{0,1,\cdots,n\},\ 0\leqq r\leqq n,\ 0\leqq s<\lambda_r)$$

$$\begin{cases} T_{r-1,s} < T_{rs} & (0 \leq s < l,\ 1 \leq r < m_s), \\ T_{r,s-1} \leq T_{rs} & (0 \leq r \leq n,\ 1 \leq s < \lambda_r). \end{cases}$$

このような $\mathbb{T}$ を λ を台にもつ"半標準盤"と呼ぶ。("column strict plane partition" という呼び方もある。) この全体を、$SSTab(\lambda)$ と書くことにする。半標準盤の個数についてはいわゆる hook length による公式がよく知られている。λ を台にもつ半標準盤 $\mathbb{T} = (T_{rs})$ に対して"標準単項式" $\xi_{\mathbb{T}}$ を量子小行列式の積として定義する。

$$\xi_{\mathbb{T}} = \xi_{J_0} \cdots \xi_{J_{l-1}} \in A(X).$$

ここで $J_s = \{T_{0,s} < \cdots < T_{m_s-1,s}\}$ $(0 \leq s < l)$ である。Borel 部分群 $B^- \subset G$ の $X = Mat_q(N;\mathbb{C})$ への作用 $L_{B^-} = (\pi_{B^-} \otimes id) \circ \Delta$ により量子小行列式 ξ_J は左 B^--相対不変:

$$L_{B^-}(\xi_J) = z^{\Lambda_r} \otimes \xi_J \qquad (\# J = r)$$

であり、L_{B^-} は $\mathbb{C}$-代数準同型であるから標準単項式も左 B^--相対不変である:

$$L_{B^-}(\xi_{\mathbb{T}}) = z^{\lambda} \otimes \xi_{\mathbb{T}} \qquad (\mathbb{T} \in SSTab(\lambda)).$$

すなわち $\xi_{\mathbb{T}} \in A(B^- \backslash X; z^{\lambda})$。適当な順序に関する $\xi_{\mathbb{T}}$ の主要部を比べることにより $\{\xi_{\mathbb{T}}; \mathbb{T} \in SSTab(\lambda)\}$ は $\mathbb{C}$ 上線型独立であることもわかる。実は次の定理が成り立つ。

<u>定理 2.1.</u> 整形式 $\lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varepsilon_i \in L_N$ が正の優形式ならば、すなわち

$$(*) \quad \lambda_0 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

を満たすならば標準単項式 $\{\xi_{\mathbb{T}}\,;\,\mathbb{T}\in SSTab(\lambda)\}$ は右 $A(G)$-余加群 $A(B^-\backslash X\,;\,z^\lambda)$ の基底をなす。また λ が条件(*)を満たさないときは $A(B^-\backslash X\,;\,z^\lambda)=0$. //

この定理の証明は次の3つの条件が互いに同値であることを示すことによる。整形式 $\lambda=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\varepsilon_i\in L_N$ と0でない元 $\varphi\in A(H\backslash X\,;\,z^\lambda)$ に対して

(a) $\varphi\in A(B^-\backslash X\,;\,z^\lambda)$,

(b) $\varphi\cdot f_k=0 \quad (1\leq k\leq n)$,

(c) λ は(*)を満たし φ は $\xi_{\mathbb{T}}$ $(\mathbb{T}\in SSTab(\lambda))$ の一次結合として書ける。

ここで説明はしないが f_k $(1\leq k\leq n)$ は"量子包絡環" $U_q(gl(N;\mathbb{C}))$ の生成元(通常の包絡環のChevalley生成元に相当する)の一部であり, $\varphi\cdot f_k$ は f_k の φ への右作用を表わす(cf [J]). 上の条件の(a)⇒(b)は定義に戻って考えればわかる。また(c)⇒(a)は先程述べた。従って(b)⇒(c)が証明されればよいがこの部分は少しテクニカルな計算が必要となるのでここでは省略する。

左 $A(G)$-余加群についても定理2.1と同様のことが成立する。すなわち $\lambda=\Lambda_{m_0}+\cdots+\Lambda_{m_{\ell-1}}$ $(m_0\geq\cdots\geq m_{\ell-1})$ に対して標準単項式 $\{\xi^{\mathbb{T}}\,;\,\mathbb{T}\in SSTab(\lambda)\}$ が左 $A(G)$-余加群 $A(X/B^+\,;\,z^\lambda)$ の基底をなす。また G 上の左 B^--相対不変式については, $\lambda\in L_N$ に対して,

$$A(B^-\backslash G; Z^\lambda) = (\det q)^{-l} A(B^-\backslash G; Z^{\lambda + l\Lambda_{n+1}})$$

が任意の$l \in \mathbb{N}$についていえることから次の定理を得る。

定理2.2. 自然数l, 及び優形式$\lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$, $\lambda_n \geq -l$に対して単項式$\{(\det q)^{-l} \xi_T ; T \in SSTab(\lambda + l\Lambda_{n+1})\}$は右$A(G)$-余加群$A(B^-\backslash G; Z^\lambda)$の基底をなす。//

§3 座標環 $A(GL_q(N;\mathbb{C}))$ の既約分解.

本節では$A(GL_q(N;\mathbb{C}))$の両側$GL_q(N;\mathbb{C})$の作用の既約分解を述べる。優形式$\lambda \in L_N$に対して前節で構成した$A(G)$-余加群を次のようにおく。ただし$G = GL_q(N;\mathbb{C})$。

$$V^R(\lambda) = A(B^-\backslash G; Z^\lambda) \qquad (\text{右}A(G)\text{-余加群})$$

$$V^L(\lambda) = A(G/B^+; Z^\lambda) \qquad (\text{左}A(G)\text{-余加群})$$

<u>補題3.1.</u> $\lambda, \mu \in L_N$を優形式とする。このとき、

(a) $\dim_{\mathbb{C}}(V^R(\lambda) \cap V^L(\lambda)) = 1$.

(b) $V^R(\lambda) \cap V^L(\mu) = 0 \quad \text{if } \lambda \neq \mu$. //

この補題より$V^R(\lambda)$, $V^L(\lambda)$はそれぞれただ一つの"最高ウェイトベクトル"しかもたないことがわかる。量子包絡環$U_q(sl(N;\mathbb{C}))$上の有限次元加群に対する完全可約性定理[R]を用いて次のことが帰結される。

<u>定理3.2.</u> 優形式$\lambda \in L_N$に対して$A(G)$-余加群$V^R(\lambda)$, $V^L(\lambda)$は共に既約である。//

さて今 M を有限次元の右 $A(G)$-余加群とする:

$$R : M \longrightarrow M\otimes A(G).$$

このとき M の双対空間 $M^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M;\mathbb{C})$ は次のようにして、左 $A(G)$-余加群の構造 $L : M^\vee \longrightarrow A(G)\otimes M^\vee$ をもつ:

$$(L(v), u) = (v, R(u)) \qquad (u\in M,\ v\in M^\vee).$$

ここで $(v, u) = v(u)$ である。すると $M^\vee\otimes M$ には両側 $A(G)$-余加群の構造が入り準同型 Φ_M が

$$\Phi_M : M^\vee\otimes M \longrightarrow A(G) : v\otimes u \longmapsto (v, R(u))$$

により定義される。この Φ_M による像を $W(M)$ と書く。特に $M = V^R(\lambda)$ のときは単に Φ_λ, $W(\lambda)$ と書く。λ が正の優形式のときは $W(\lambda)\subset A(Mat_q(N;\mathbb{C}))$ である。M の基底を $\{u_i\}_{i\in I}$ としてこの基底に関する行列要素を w_{ij} とする。すなわち、

$$R(u_j) = \sum_{i\in I} u_i\otimes w_{ij} \qquad (j\in I).$$

双対空間 $M^\vee$ の $\{u_i\}_{i\in I}$ に関する双対基底を $\{v_j\}_{j\in I}$ とする。$M^\vee$ の左 $A(G)$-余加群の構造より

$$L(v_i) = \sum_{j\in I} w_{ij}\otimes v_j \qquad (i\in I)$$

であることがわかる。すなわち M と $M^\vee$ は同じ行列要素をもつ。

$$\Phi_M(v_i\otimes u_j) = w_{ij} \qquad (i, j\in I)$$

であるから $W(M)$ は行列要素 $\{w_{ij}\,;\ i, j\in I\}$ で張られた部分空間ということになる。この $W(M)$ の両側 $A(G)$-余加群の構造は次で与えられる。

$$\Delta(w_{ij}) = \sum_{k\in I} w_{ik} \otimes w_{kj}, \quad \varepsilon(w_{ij}) = \delta_{ij}.$$

また M が $A(Mat_q(N:\mathbb{C}))$ 又は $A(G)$ の部分余加群であるときは余単位元 ε の性質により

$$u_j = \sum_{i\in I} \varepsilon(u_i) w_{ij} \qquad (j \in I)$$

となり M は $W(M)$ に含まれる。これらの事実から，優形式 $\lambda \in L_N$ に対して

$$V^R(\lambda)^\vee \cong V^L(\lambda)$$

であることがわかる。さらに証明は省くが最終的に次の定理を得る。

定理 3.3. (a) 優形式 $\lambda \in L_N$ に対して

$$\Phi_\lambda : V^R(\lambda)^\vee \otimes V^R(\lambda) \longrightarrow W(\lambda)$$

は両側 $A(G)$- 余加群としての同型写像である。

(b) $G = GL_q(N:\mathbb{C})$ の座標環の既約分解は，

$$A(G) = \sum_\lambda^{\oplus} W(\lambda), \quad W(\lambda) \cong V^L(\lambda) \otimes V^R(\lambda)$$

で与えられる。ここで和はすべての優形式 $\lambda \in L_N$ をわたる。

(c) $X = Mat_q(N:\mathbb{C})$ の座標環の既約分解は，

$$A(X) = \sum_\lambda^{\oplus} W(\lambda), \quad W(\lambda) \cong V^L(\lambda) \otimes V^R(\lambda)$$

で与えられる。ここで和は正の優形式 $\lambda \in L_N$ をわたる。//

この定理は古典的（$q=1$, i.e., $A(X)$, $A(G)$ が可換環の場合）には I. Schur が 1901 年の学位論文 [S] で得ているものである。

§4 量子球面 $SU_q(n)\backslash SU_q(n+1)$ とその上の帯球函数.

本節においては q は 0 でない実数とする。まず量子群 $SL_q(n+1;\mathbb{C})$ の"コンパクト実形"である $SU_q(n+1)$ を定義しよう。§2で定義した $SL_q(n+1;\mathbb{C})$ の座標環 $\mathcal{A}^{SL}_{n+1}$ の上には共役線型な逆準同型 $*:\mathcal{A}^{SL}_{n+1}\longrightarrow\mathcal{A}^{SL}_{n+1}:a\mapsto a^*$ で生成元に対しては

$$x_{ji}^* = S(x_{ij}) = (-q)^{i-j}\xi^{\hat{j}}_{\hat{i}} \qquad (0\le i,j\le n)$$

となるものが唯一つ存在する。この $*$-作用素を合わせて考えた Hopf 代数 $\mathcal{A}^{SL}_{n+1}$ を $A(SU_q(n+1))$ と定義する。今後 $G=SU_q(n+1)$ とおく。部分群 $K\cong SU_q(n)$ を次のように定義する。

$$A(K)=\mathbb{C}[\,y_{ij}\quad(0\le i,j<n)\,]$$

(基本関係式は (1.2) と同じもの)

$$\pi_K : A(G)\longrightarrow A(K)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\pi_K(x_{ij}) = y_{ij}\ ,\ \pi_K(x_{nn})=1,\\ \pi_K(x_{in}) = \pi_K(x_{nj}) = 0.\end{array}\right. \qquad (0\le i,j<n)$$

さて正の優形式 $\lambda\in L_{n+1}$ に対して $G=SU_q(n+1)$ の既約表現(左 $A(G)$-余加群) $V^L(\lambda)$ が決まったのであった。この既約表現を $K=SU_q(n)$ の表現として既約分解した際、K の自明な表現が現れるとする。すなわち、ある 0 でない元 $v_0\in V^L(\lambda)$ に対して

$$L_K(v_0)=1\otimes v_0 \qquad ただし\ L_K=(\pi_K\otimes id)\circ\Delta$$

となるとする。このとき $V^L(\lambda)$ は K に関して"クラス 1"であるといわれる。Branching に関するいわゆる "Gel'fand pattern" を見ること

により次の命題を得る。

命題4.1. 正の優形式 $\lambda \in L_{n+1}$ に対して左 $A(G)$-余加群 $V^L(\lambda)$ が K に関してクラス1であるための必要十分条件は、ある自然数 l, m があって $\lambda = l\Lambda_1 + m\Lambda_n$ と書けることである。またこのとき左 K-不変ベクトルは定数倍を除いて一意的である。//

量子空間 X を $X = K\backslash G = SU_q(n)\backslash SU_q(n+1)$ とおけばこれは一種の"量子球面"をあらわす。X の座標環 $A(X)$ は $A(G)$ の右 $A(G)$-部分余加群であり、既約余加群の直和に分解される。最高ウェイトベクトルを見ることによって次の分解を得る。

命題4.2. 右 $A(G)$-余加群として

$$A(X) = \sum_{l, m \in N}^{\oplus} V(l, m),$$

ここで $V(l, m)$ は $v_0(l, m) = (x_{nn}^*)^m (x_{n0})^l = (\xi_{\hat{n}}^{\hat{n}})^m (\xi_0^n)^l$ を(ウェイト $\lambda = l\Lambda_1 + m\Lambda_n$ の)最高ウェイトベクトルとして含む($V^R(\lambda)$ と同型な)既約右 $A(G)$-余加群である。//

以下 $A(X)$ の元 z_k, w_k を

$$z_k = x_{nk}, \quad w_k = z_k^* = (-q)^{k-n} \xi_{\hat{k}}^{\hat{n}} \qquad (0 \leq k \leq n)$$

とおく。これらは次の交換関係を満たすことが計算によりわかる。

$$\begin{cases} z_i z_j = q z_j z_i, \quad q w_i w_j = w_j w_i, & (0 \leq i < j \leq n) \\ w_j z_i = q z_i w_j, & (0 \leq i, j \leq n, \ i \neq j) \\ w_k z_k = z_k w_k + (1 - q^2) \sum_{\nu < k} z_\nu w_\nu, & (0 \leq k \leq n) \end{cases}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} z_k w_k = \sum_{k=0}^{n} q^{2(n-k)} w_k z_k = 1 . \right.$$

さらに実は $A(X) = \mathbb{C}[z_k, w_k \quad (0 \le k \le n)]$ である。

我々は$A(X)$の右K-不変ベクトル v (i.e., $v \in A(K \backslash G / K)$) を $X = K \backslash G$ 上の"帯球函数"と呼ぶ。命題4.2により $A(X)$ は右 $A(G)$-余加群として既約分解される。各既約成分 $V(l, m)$ は K に関してクラス1であり、帯球函数 $\varphi(l, m)$ を含む。帯球函数は $\varepsilon(\varphi(l, m)) = 1$ と正規化しておく。今 $V(l, m)$ の基底 $\{v_i \ (0 \le i < d)\}$ ($d = \dim_{\mathbb{C}} V(l, m)$) を $v_0 = \varphi(l, m)$ となるようにとり、この基底に関する行列要素を w_{ij} とおく:

$$\Delta(v_j) = \sum_{i=0}^{d-1} v_i \otimes w_{ij} \qquad (0 \le j < d).$$

このとき w_{00} は基底ベクトル $v_i \ (1 \le i < d)$ の選び方に依らずに決まりしかも $w_{00} = \varphi(l, m)$ であることが確かめられる。この帯球函数を表示するため (2,1) 型の"q-超幾何級数"を用意しよう。

$${}_2\varphi_1 \left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix} ; q, \zeta \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k (b;q)_k}{(c;q)_k (q;q)_k} \zeta^k$$

またJacobi多項式の q-analogueは、$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(\zeta; q) = {}_2\varphi_1 \left(\begin{matrix} q^{-m} & q^{\alpha+\beta+m+1} \\ & q^{\alpha+1} \end{matrix} ; q, q\zeta \right)$$

により定義される。この q-Jacobi多項式は通常"little" q-Jacobi多項式と呼ばれるものである。他にも (3.2) 型の q-超幾何級数を用いて定義される"big" q-Jacobi多項式と呼ばれ

るものが存在し、これも量子球面上の"球函数"と解釈されることがわかっている（cf. [NM 1, 2]）。

<u>定理 4.3.</u> 既約右$A(G)$-余加群$V(l, m)$ ($l, m \in N$) のKに関する帯球函数$\varphi = \varphi(l, m)$は変数$\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} z_k w_k = 1 - x_{nn}\zeta_{\hat{n}}^{\hat{n}}$に関する$q$-Jacobi多項式で次のように表わされる。

$$\varphi = \begin{cases} (x_{nn})^{l-m} P_m^{(n-1, l-m)}(\zeta ; q^2) & \text{if } l \geq m \\ P_l^{(n-1, m-l)}(\zeta ; q^2)\, (\xi_{\hat{n}}^{\hat{n}})^{m-l} & \text{if } l \leq m. \end{cases}$$

//

本稿で述べなかったこととしては、量子包絡環$U_q(gl(N; \mathbb{C}))$との関係、$SU_q(N)$上のHaar測度、及び内積、表現の指標、Fourier変換などがある。詳しくは、[NYM 2] を参照されたい。

10/25/89.

文献 （もとより網羅的ではあり得ない）

[A] 阿部英一：ホップ代数，岩波．

[B] G. M. Bergman: The diamond lemma for ring theory, Adv. Math. 29 (1978), 178-218.

[D] V. G. Drinfeld: Quantum groups, Proc. ICM, 1986, 798-820.

[H] 日比孝之：q-analogue の世界，数学 (1989), 269-274.

[J] M. Jimbo: A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63-69.

[M] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi & K. Ueno: Representations of the quantum group $SU_q(2)$ and the little q-Jacobi polynomials, to appear in J. Funct. Anal.

[NM1] M. Noumi & K. Mimachi: Quantum 2-spheres and big q-Jacobi polynomials, to appear in Lett. Math. Phys.

[NM2] ———: Big q-Jacobi polynomials, q-Hahn polynomials and a family of quantum 3-spheres, to appear in Comm. Math. Phys.

[NYM1] M. Noumi, H. Yamada & K. Mimachi: Zonal spherical functions on the quantum homogeneous space $SU_q(n+1)/SU_q(n)$, Proc. Japan Acad. 65A (1989), 169-171.

[NYM2] ———— : Finite dimensional representations of the quantum group $GL_q(n+1;\mathbb{C})$ and the zonal spherical functions on $U_q(n)\backslash U_q(n+1)$, preprint 1989.

[R] M. Rosso : Finite dimensional representations of the quantum analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra, Comm. Math. Phys. 117 (1988), 581 -

[RTF] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtajan & L. D. Faddeev : Quantization of Lie groups and Lie algebras, to appear in Algebra & Analysis (in Russian).

[S] I. Schur : Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Dissertation, Berlin 1901, 全集 Vol 1, 1-72.

[W] S. L. Woronowicz : Compact matrix pseudogroups, Comm. Math. Phys. 111 (1987), 613 - 665.

[M'] 三町勝久 : q-アナログ入門, 数学のあゆみ 29号 (1987), 58 - 72.