数理解析研究所講究録
第712巻 1990年 112-117

Exponential group のユニタリ表現の制限について

近畿大学九州工学部　藤 原 英 徳
(Hidenori Fujiwara)

$G=\exp\mathfrak{g}$ をリー環 $\mathfrak{g}$ をもつ exponential group とし、つまり指数写像 exp が から G 上への微分同相写像であるとし、π を G の既約ユニタリ表現、K を G の解析部分群とする。　我々は π の K への制限 $\pi|_K$ の既約分解を与え、この状況で Frobenius の相互律が成立することを見よう。

この為我々は軌道の方法を用いるが、その枠組の中で Kirillov によって触れられたこの問題は、ベキ零群に対し Corwin-Greenleaf により、又完全可解リー群に対し Lipsman により解決されている。　π に対応する G の余随伴軌道を $\Omega_G(\pi)$ で表し、$\Omega_G(\pi)$ 上の Kostant 測度を $\mathfrak{g}^*$ 上の測度とみなしこれに同値な $\mathfrak{g}^*$ 上の有限測度 μ_π を取る。

$\mathfrak{k}$ を K のリー環、$\hat{K}$ を K のユニタリ双対とし、$p=p(\mathfrak{g},\mathfrak{k}):\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{k}^*$ を制限写像としよう。　Kirillov-Bernat 写像 $\theta_K:\mathfrak{k}^*\to\hat{K}$ は軌道空間 $\mathfrak{k}^*/K$ から $\hat{K}$ 上への Borel 同形写像を誘導する。　そこで $\nu=\nu_K{}^\pi=(\theta_K\cdot p)_*(\mu_\pi)$ を写像 $\theta_K\cdot p:\mathfrak{g}^*\to\hat{K}$ による μ_π の像とする。　最後に $\sigma\in\hat{K}$ に対し、$\Gamma(\pi,\sigma)=\Omega_G(\pi)\cap p^{-1}(\Omega_K(\sigma))$ に含まれる K-軌道の数を $n_\pi(\sigma)$ で表す。

定理　1.　　　　$\pi|_K\simeq\int_{\hat{K}}^{\oplus} n_\pi(\sigma)\sigma\,d\nu(\sigma).$

G の2つの既約ユニタリ表現 π_1, π_2 に対し、外部 Kronecker 積 $\pi_1\times\pi_2$ は軌道 $\Omega_{G\times G}(\pi_1\times\pi_2)=(\Omega_G(\pi_1),\Omega_G(\pi_2))\subset\mathfrak{g}^*\oplus\mathfrak{g}^*$ に対応する。　G を G×G の対角成分からなる部分群と同一視しよう。

系　1.　$p=p(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g},\mathfrak{g}):\mathfrak{g}^*\oplus\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ とし、$\nu=(\theta_G\cdot p)_*(\mu_{\pi_1\times\pi_2})$ 又 $(\Omega_G(\pi_1),\Omega_G(\pi_2))\cap p^{-1}(\Omega_G(\pi))$ に含まれる G-軌道の数を $m(\pi)$ とすると、

$$\pi_1\otimes\pi_2\simeq\int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi\,d\nu(\pi)。$$

他方我々は誘導表現の既約分解を知っている。　K の既約ユニタリ表現 σ から出発する。　$\Omega_G(\sigma)$ 上の Kostant 測度と零化空間 $\mathfrak{k}^\perp=\{f\in\mathfrak{g}^*;\ f|_{\mathfrak{k}}=0\}$ 上のルベーグ測度は $\mathfrak{g}^*$ の部分多様体 $p^{-1}(\Omega_K(\sigma))$ 上に測度 μ を与える。

今 μ を $\mathfrak{g}^*$ 上の測度とみてそれに同値な有限測度 $\hat{\mu}$ を取り、その $\hat{G}$ 上における像 $\nu=\nu^G{}_\sigma=(\theta_G)_*(\tilde{\mu})$ を考える。

定理　2 (cf.[4]).　　　$\mathrm{ind}_K^G\,\sigma\simeq\int_{\hat{G}}^{\oplus} n_\pi(\sigma)\pi\,d\nu(\pi)。$

定理2は [4] において σ が K のユニタリ指標のとき証明されたが、σ は単項故この制限は本質的でない。　実際 $f\in\Omega_K(\sigma)\subset\mathfrak{k}^*$ において Pukanszky 条件 $B\cdot f=f+\mathfrak{b}^\perp$, $B=\exp\mathfrak{b}$, を満たす実 polarization $\mathfrak{b}$ を取れば σ は B のユニタリ指標

χ_f, $\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1}f(X)}$ ($X \in \mathfrak{b}$), となりこれより容易に定理2が得られる。

系 2. 我々の状況で Frobenius の相互律が成り立つ。

この相互律は'殆ど至るところ'既に知られており[9]、ここで新しい点は、既に[3]で注意されたように、この相互律が至るところ成立することである。

定理1の証明を始める前に、後に繰り返し利用されるよく知られた結果を記しておこう。 $\mathfrak{g}_0$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルで $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 = 1$ なるものとし、$G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ 又記号を簡単にする為 $p = p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ とおく。 $\mathfrak{g}_0$ に関し $\mathfrak{g}$ の余随伴軌道は、従って G の既約ユニタリ表現も2種類に分かれる。 $f \in \mathfrak{g}^*$ の G における固定群を $G(f)$、そのリー環を $\mathfrak{g}(f)$ で表す。

定理 0 ([5],[11]). Ω を G の余随伴軌道、$f \in \Omega$ とし、Ω に対応する G のユニタリ表現を $\pi(\Omega)$ で表す。 このとき次のいずれか一方が生じる。

(i) $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}_0$ のとき、Ω を飽和軌道という。 このとき $p(\Omega)$ は G_0-軌道 ω_t $(t \in \mathbb{R})$ の1変数族に分かれ、$\Omega = p^{-1}(p(\Omega))$ となる。 これに応じて $\pi(\Omega)|_{G_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi(\omega_t)dt$ かつ $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}\pi(\omega_t)$ は既約である。

(ii) $\mathfrak{g}(f) \not\subset \mathfrak{g}_0$ のとき、 Ω を非飽和軌道という。 このとき $\omega = p(\Omega)$ は1つの G_0-軌道で $p^{-1}(\omega)$ は G-軌道 Ω_t $(t \in \mathbb{R})$ の1変数族に分かれる。 更に $\pi(\Omega_t)|_{G_0}$ は既約で他方 $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}\pi(\omega) \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi(\Omega_t)dt$。

以下定理1を示す。 記号はそこで述べた意味とし、G の次元に関する帰納法を用いる。 まず最初に $\mathfrak{k}$ が余次元1の $\mathfrak{g}$ のイデアルのときは結果は既に知られている。 又 $\mathfrak{k}$ が $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}$ を含むとして構わないので以後これを仮定しよう。 いま $\mathfrak{k}$ を含む $\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{h}$ があると仮定し、$p(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_*(\mu_\pi)$ を ν_H^π, $H = \exp \mathfrak{h}$ に関し分解する:

$$p(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_*(\mu_\pi) = \int_{\hat{H}} \mu_H{}^\rho d\nu_H{}^\pi(\rho)。$$

μ_π は H の作用で準不変故ファイバー測度 $\mu_H{}^\rho$ は殆ど至るところ $\Omega_H(\rho)$ 上の Kostant 測度と同値である。 $\mu_H{}^\rho$ を $\mathfrak{h}^*$ 上に拡げて μ_ρ を得る。

Borel 集合 $E \subset \hat{K}$ に対し

$$\begin{aligned}\nu_K{}^\pi(E) &= \mu_\pi(p(\mathfrak{g},\mathfrak{k})^{-1}(\theta_K^{-1}(E))) = \mu_\pi(p(\mathfrak{g},\mathfrak{h})^{-1}(p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\theta_K^{-1}(E))))\\ &= p(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_*(\mu_\pi)(p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\theta_K^{-1}(E)))\\ &= \int_{\hat{H}} \mu_H{}^\rho(\Omega_H(\rho) \cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\theta_K^{-1}(E)))d\nu_H{}^\pi(\rho)\\ &= \int_{\hat{H}} p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})_*(\mu_\rho)(\theta_K^{-1}(E))d\nu_H{}^\pi(\rho) = \int_{\hat{H}} \nu_K{}^\rho(E)d\nu_H{}^\pi(\rho)。\end{aligned}$$

そこで $\pi|_H$ に対し定理1を認めるなら、$\pi|_K$ の分解に現われる測度が得られ、又もし $f|_{\mathfrak{k}} \in \Omega_K(\sigma)$ なるすべての $f \in \Omega_G(\pi)$ に対し $H(f|_{\mathfrak{h}}) \cdot f \subset K \cdot f$ となっていれば重複度に関する主張も得られる。 更に H が G の余次元1の正規部分群のときは $\pi|_K$ における重複度に関する主張が Lipsman [8] により得られている。

以上のことより我々は K を含む G の正規部分群は G のみと仮定して推論を進めよう。 $f \in \Omega_G(\pi)$ における polarization $\mathfrak{b}$ を用いて π を実現し、$\pi \simeq \mathrm{ind}_B^G \chi_f$, $B = \exp \mathfrak{b}$, $\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1}f(X)}$ $(X \in \mathfrak{b})$ とする。 ここで f は $\mathfrak{g}$ のいかなるイ

デアル ($\neq\{0\}$) 上でも消えてないとしてよい。 従って $\dim \mathfrak{z} \leqq 1$ で、もし $\dim \mathfrak{z} = 1$ なら f の $\mathfrak{z}$ への制限 $f|_{\mathfrak{z}}$ は 0 でない。 $\mathfrak{g}$ の中心に含まれないイデアルの族で極小なものを1つ取り $\mathfrak{a}$ で表す。 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}^f = \{X \in \mathfrak{g};\ f([X,Y]) = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{a}\}$, $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$ とおくと、よく知られているように (cf. [2]) $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}_1$ の中に取れる。 すると $\pi \simeq \mathrm{ind}_{G_1}^{G} \pi_1$, $\pi_1 = \mathrm{ind}_{B}^{G} \chi_f$. $\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{g}_1$ の補空間 $\mathfrak{t}$ を $G = TG_1$, $T = \exp \mathfrak{t}$, となるように選ぶ (cf. [2],[12],[13])。

まず $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a}$ の場合を考える。 明らかに $G = KG_1$。 Mackey [10] の部分群定理より $K_1 = K \cap G_1$ として

$$\pi|_K \simeq \mathrm{ind}_{K_1}^{K}(\pi_1|_{K_1})。$$

K_1 のリー環を $\mathfrak{k}_1$ とする。 このとき $\pi_0 = \pi_1|_{K_1}$ は既約で $f|_{\mathfrak{k}_1} \in \mathfrak{k}_1^*$ を通る K_1-軌道に対応している。 定理2より

$$\pi|_K \simeq \int_{\hat{K}}^{\oplus} m(\sigma)\sigma\, d\nu^{K}{}_{\pi_0}(\sigma) \qquad (1)$$

として重複度 $m(\sigma)$ は $\Omega_K(\sigma) \cap \Xi$, $\Xi = p(\mathfrak{k},\mathfrak{k}_1)^{-1}(\Omega_{K_1}(\pi_0)) \subset \mathfrak{k}^*$, における K_1-軌道の数 $n_\sigma(\pi_0)$ で与えられる。 公式 (1) を見直してやろう。 上記 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k}$ の中に取れば $\mathfrak{k} = \mathfrak{t} + \mathfrak{k}_1$ で $K = TK_1$。 すると

$$\Omega_G(\pi) = T\cdot(K_1\cdot f + \mathfrak{g}_1^{\perp}),$$
$$p(\mathfrak{g},\mathfrak{k})(\Omega_G(\pi)) = T\cdot(K_1\cdot(f|_{\mathfrak{k}_1}) + \mathfrak{k}_1^{\perp}) = T\cdot\Xi。$$

故に商空間 $p(\mathfrak{g},\mathfrak{k})(\Omega_G(\pi))/K$ は Ξ/K と同一視され $\nu^{K}{}_{\pi_0}$ は我々の $\nu_K{}^{\pi}$ としての資格をもつ。 重複度に関しては、 $\nu^{K}{}_{\pi_0}$ の台に属する σ に対し、$\mathfrak{a}$ 上の評価点を固定して $n_\sigma(\pi_0) = n_\pi(\sigma)$ が示される。

次に $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{k} + \mathfrak{a}$ の場合を考える。 最初に $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{k}$ と仮定しよう。 もし $f \in \Omega_G(\pi)$ をどのように選んでも $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}^f$ ならば上と同じような状況にあり、$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k}$ の中に取れ (cf. [2],[13]) $G = KG_1$。 Mackey の部分群定理より $K_1 = \exp \mathfrak{k}_1 = K \cap G_1$ として

$$\pi|_K \simeq \mathrm{ind}_{K_1}^{K}(\pi_1|_{K_1})。$$

但し一般に $\pi_1|_{K_1}$ は既約でなく、帰納法の仮定より

$$\pi_1|_{K_1} \simeq \int_{\hat{K}_1}^{\oplus} n_{\pi_1}(\rho)\rho\, d\nu_{K_1}{}^{\pi_1}(\rho)。$$

従って

$$\pi|_K \simeq \mathrm{ind}_{K_1}^{K} \int_{\hat{K}_1}^{\oplus} n_{\pi_1}(\rho)\rho\, d\nu_{K_1}{}^{\pi_1}(\rho) \simeq \int_{\hat{K}_1}^{\oplus} n_{\pi_1}(\rho)(\mathrm{ind}_{K_1}^{K}\rho)\, d\nu_{K_1}{}^{\pi_1}(\rho)。$$

この公式を詳しく調べる。 $\rho|_A$, $A = \exp \mathfrak{a}$, は $\chi_f|_A$ を並べたもので K_1 は K における $\chi_f|_A$ の固定群と一致する。 故に Mackey の一定理 (cf. [2],[10]) によれば $\sigma = \mathrm{ind}_{K_1}^{K}\rho$ はすべて既約で互いに同値でない。 $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1} \in \mathfrak{g}_1^*$ とおき、$\mathfrak{g}_1^*$ を $\mathfrak{g}^*$ の部分空間 $\{\lambda \in \mathfrak{g}^*;\ \lambda|_{\mathfrak{t}} = 0\}$ と同一視し、G (resp. G_1) の余随伴作用を $\dot{}_G$ (resp. $\dot{}_{G_1}$) で表すと、

$$\Omega_G(\pi) = G\cdot f = T\cdot(G_1 \dot{}_{G_1} f_1 + \mathfrak{g}_1^{\perp}) = T\cdot(A \dot{}_G G_1 \dot{}_{G_1} f_1)。$$

これより商空間 $p(\mathfrak{g},\mathfrak{k})(\Omega_G(\pi))/K$ は $p(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{k}_1)(\Omega_{G_1}(\pi_1))/K_1$ と同一視され T の作用は $\mathfrak{a}$ 上での値を変えるから、$\nu_K{}^{\pi_1}$ は $\nu_K{}^{\pi}$ と見做せ、軌道とアファイン部分空間 $p(\mathfrak{k},\mathfrak{a})^{-1}(f|_{\mathfrak{a}}) = (f|_{\mathfrak{k}}) + \mathfrak{a}^{\perp} \subset \mathfrak{k}^*$ との交わりを考えて、$n_{\pi_1}(\rho)$ が $n_\pi(\sigma)$ に等しいことがわかる。

$f \in \Omega_G(\pi)$ を適当に選ぶと $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}^f$ となる場合。 $\mathfrak{k}$ における $\mathfrak{a}$ の可換子環

を $\mathfrak{k}_0$ とすれば $\dim \mathfrak{k}/\mathfrak{k}_0 = \dim(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{z}) = \dim \mathfrak{z} = 1$ (cf. [2],[13])。 定理1は $\pi\,|_{K_0}$, $K_0 = \exp \mathfrak{k}_0$, に対しては成立することに注意しておこう。

求める既約分解を

$$\pi\,|_K \simeq \int_{\hat{K}}^{\oplus} m^*(\sigma)\sigma\, d\nu^*(\sigma) \tag{2}$$

とすれば、両辺を K_0 に制限して $\pi\,|_{\ 0}$ に対する既約分解

$$\pi\,|_{K_0} \simeq \int_{\hat{K}}^{\oplus} m^*(\sigma)(\sigma\,|_{K_0})\, d\nu^*(\sigma) \tag{3}$$

を得るはずである。 定理0を考慮すれば、これより測度 ν^* は $\nu_K{}^{\pi}$ と同値であることがわかる。 更に定理0の（ii）の場合が生じるのは $\Omega_K(\sigma)$ がアファイン部分空間 $(f\,|_{\mathfrak{k}}) + \mathfrak{a}^{\perp} \subset \mathfrak{k}^*$ に含まれるときのみ故、公式（3）において殆ど至るところ定理0の（i）の場合が生じる。 こうして重複度 $m^*(\sigma)$ に関する主張も得られ、結局公式（2）は我々の求めるものに他ならない。

以上見てきたことより測度に関する主張は一般的に確立され、又 $\mathfrak{k}$ が余既約、即ち $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ への $\mathfrak{k}$-作用が既約であるときは $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a}$ 又は $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{k}$ 故定理1は成立する。 そこで以下 Lipsman [8] の推論を借用して重複度公式を示そう。

まず最初に $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 = 1$ となる $\mathfrak{g}$ のあるイデアル $\mathfrak{g}_0$ に関し $\Omega_G(\pi)$ が飽和であると仮定して結果を導こう。 $f \in \Omega_G(\pi)$, $f_0 = p(f)$, $p = p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ とし、$G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ の軌道 $G_0\cdot f_0$ に対応する既約ユニタリ表現を π_0 で表す。 従って $\pi \simeq \mathrm{ind}_{G_0}^{G}\pi_0$。 $\mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{g}_0$ と仮定してるので $G = KG_0$。 そこで $K_0 = K\cap G_0 = \exp \mathfrak{k}_0$ とおきもう一度 Mackey の部分群定理を使い、更に帰納法の仮定を用いれば

$$\begin{aligned}\pi\,|_K &\simeq \mathrm{ind}_{K_0}^{K}(\pi_0\,|_{K_0}) \simeq \mathrm{ind}_{K_0}^{K}\int_{\hat{K}_0}^{\oplus} n_{\pi_0}(\rho)\rho\, d\nu_{K_0}{}^{\pi_0}(\rho)\\ &\simeq \int_{\hat{K}_0}^{\oplus} n_{\pi_0}(\rho)\mathrm{ind}_{K_0}^{K}\rho\, d\nu_{K_0}{}^{\pi_0}(\rho)。\end{aligned} \tag{4}$$

定理0より $\sigma = \mathrm{ind}_{K_0}^{K}\rho$ は既約であるか又は $\mathrm{ind}_{K_0}^{K}\rho \simeq \int_{R}^{\oplus}\sigma_t\, dt$。 第2の場合（4）における σ_t の重複度が $n_\pi(\sigma_t)$ に等しいことは容易にわかる。 第1の型の $\sigma \in \hat{K}$ に対し重複度を計算しよう。 $\nu_K{}^{\pi}$ の台に属する $\sigma \in \hat{K}$ に対し $m(\sigma)$ で $G_0\cdot f \cap p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))$ に含まれる K_0-軌道の個数を表すと、$G\cdot f = K\cdot G_0\cdot f$ より $n_\pi(\sigma)$ は $m(\sigma)$ に他ならない。

必要なら f を取り替えて $f\,|_{\mathfrak{k}} \in \Omega_K(\sigma)$ の状況で考える。 もし $p(\lambda) \in \Gamma(\pi_0, \sigma)$ なるすべての $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に対し $p^{-1}(p(\lambda)) \subset K\cdot\lambda$ ならば、$m(\sigma)$ は公式（4）において $\sigma \simeq \mathrm{ind}_{K_0}^{K}\rho$ となる $n_{\pi_0}(\rho)$ の和に等しい。 又もし $p^{-1}(f_0) \not\subset K\cdot f$ なら明らかに $n_\pi(\sigma) = \infty$。 他方 $\sigma \simeq \mathrm{ind}_{K_0}^{K}\rho$ として、

$$\dim G\cdot f_0 \cap p(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)^{-1}(\Omega_{K_0}(\rho)) = \dim G\cdot f_0 - \dim K_0\cdot f + \dim \Omega_{K_0}(\rho),$$

$$\dim \Gamma(\pi_0, \rho) = \dim G_0\cdot f_0 - \dim K_0\cdot f_0 + \dim \Omega_{K_0}(\rho)。$$

しかるに我々の仮定より

$$\dim K_0\cdot f = \dim K_0\cdot f_0, \quad \dim G\cdot f_0 = \dim G_0\cdot f_0 + 1。$$

従って

$$\dim \Gamma(\pi_0, \rho) < \dim G\cdot f_0 \cap p(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)^{-1}(\Omega_{K_0}(\rho))。 \tag{5}$$

$\mathfrak{k} = RX + \mathfrak{k}_0$ とする。 不等式（5）は、任意の $s \in R$ に対し f を $k(s)\cdot f$, $k(s) = \exp sX$, で置き換えても成立する。 一方

$$G\cdot f_0 \cap p(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)^{-1}(\Omega_{K_0}(\rho)) = \bigcup_{s\in R}(k(s)\cdot\Omega_{G_0}(\pi_0) \cap p(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)^{-1}(\Omega_{K_0}(\rho)))。$$

以上より

$$k(s)\cdot\Omega_{G_0}(\pi_0)\cap p(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{k}_0)^{-1}(\Omega_{K_0}(\rho))\neq\phi$$

即ち

$$\Omega_{G_0}(\pi_0)\cap p(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{k}_0)^{-1}(k(s)\cdot\Omega_{K_0}(\rho))\neq\phi$$

となる $s\in R$ の集合はルベーグ測度に関し無視できず、$\pi|_K$ における σ の重複度は ∞ となり主張が得られる。

最後に $\Omega_G(\pi)$ は余次元1のどんなイデアルに関しても非飽和であると仮定しよう。$\mathfrak{k}$ を含む $\mathfrak{g}$ の余既約な部分リー環 $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$ を取り、$p=p(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, $H=\exp\mathfrak{h}$ とおく。我々に残っているのは、公式

$$\pi|_K=(\pi|_H)|_K\simeq\int_{\hat{H}}^{\oplus}n_\pi(\rho)\rho|_K d\nu_H{}^\pi(\rho)$$
$$\simeq\int_{\hat{H}}^{\oplus}n_\pi(\rho)d\nu_H{}^\pi(\rho)\int_{\hat{K}}^{\oplus}n_\rho(\sigma)\sigma d\nu_K{}^\rho(\sigma)$$

において、$\dim K\cdot f<\dim\Gamma(\pi,\sigma)$, $f\in\Gamma(\pi,\sigma)$, なるとき σ の重複度 $m(\sigma)=\infty$ を示すことである。 ここでは $\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=2$ の場合を調べる。 $\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=1$ の場合もまったく同様に扱われる。

$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{h}$ の余基底で写像 $R^2\times H\ni((s,t),h)\mapsto g(s,t)h\in G$, $g(s,t)=\exp(sX_1)\exp(tX_2)$, が G 上への微分同相写像となるものを取る。 $f\in\Gamma(\pi,\sigma)$, $f_{s,t}=g(s,t)\cdot f$, $f^0_{s,t}=p(f_{s,t})$ とおく。 従って $p(\Omega_G(\pi))=\cup_{(s,t)\in R^2}H\cdot f^0_{s,t}$。$\Omega_G(\pi)$ は余次元1のイデアル $\mathfrak{g}_0=\{X\in\mathfrak{g};[X,\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{h}\}$ に関し非飽和故、$\lambda\in p(\Omega_G(\pi))$ に対し2つの H-不変な可能性が考えられる： $p^{-1}(\lambda)\cap\Omega_G(\pi)=\{\lambda\}$ であるか $p^{-1}(\lambda)\cap\Omega_G(\pi)=p^{-1}(\lambda)$。 $f^0_{s,t}$ が第1 (resp. 第2) の条件を満たす $(s,t)\in R^2$ の集合を E (resp. F) とする。 E は R^2 の開集合である。

$(s,t)\in E$ に対し $H\cdot f^0_{s,t}\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))\neq\phi$ ならば

$$\dim K\cdot f^0_{s,t}<\dim(\cup_{(s,t)\in E}H\cdot f^0_{s,t})\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))。\quad(6)$$

もし $\dim K\cdot f^0_{s,t}<\dim H\cdot f^0_{s,t}\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))$ となる $(s,t)\in E$ が存在すれば $H\cdot f^0_{s,t}$ に対応する $\rho\in\hat{H}$ に対し $n_\rho(\sigma)$ は ∞ である。 もしそうでないなら (6) より $H\cdot f^0_{s,t}\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))\neq\phi$ となる $(s,t)\in E$ の集合はルベーグ測度に関し無視できない。 これで望む結果が得られた。

次に $(\cup_{(s,t)\in E}H\cdot f^0_{s,t})\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))=\phi$ と仮定しよう。 容易にわかるように

$$\dim p(\Omega_G(\pi))\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))=\dim\Gamma(\pi,\sigma)-2$$
$$=\dim\Omega_G(\pi)-\dim K\cdot f_{s,t}+\dim\Omega_K(\sigma)-2。\quad(7)$$

他方

$$\dim H\cdot f^0_{s,t}\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))=\dim H\cdot f^0_{s,t}-\dim K\cdot f^0_{s,t}+\dim\Omega_K(\sigma),\ \cdots\quad(8)$$

$$\dim K\cdot f_{s,t}\leqq\dim K\cdot f^0_{s,t}+2。\quad(9)$$

$\dim H\cdot f^0_{s,t}=\dim\Omega_G(\pi)-4$ 故、(7), (8), (9) を用いて

$$\dim H\cdot f^0_{s,t}\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))$$
$$\leqq\dim\Omega_G(\pi)-4-(\dim K\cdot f_{s,t}-2)+\dim\Omega_K(\sigma)$$
$$=\dim\Omega_G(\pi)-\dim K\cdot f_{s,t}+\dim\Omega_K(\sigma)-2$$
$$=\dim p(\Omega_G(\pi))\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))。\quad(10)$$

(10) で等式が成立するのは (9) で等式が成立するときであり、このとき

$$\dim K\cdot f^{o}_{s,t} = \dim K\cdot f_{s,t} - 2 < \dim H\cdot f^{o}_{s,t}\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))$$

となり軌道 $H\cdot f^{o}_{s,t}$ に対応する $\rho \in \hat{H}$ に対し $n_\rho(\sigma) = \infty$。 もし (10) においてどこでも等式が成り立たないならば、関係式

$$p(\Omega_G(\pi))\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma)) = \bigcup_{(s,t)\in F} H\cdot f^{o}_{s,t}\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma))$$

より $H\cdot f^{o}_{s,t}\cap p(\mathfrak{h},\mathfrak{k})^{-1}(\Omega_K(\sigma)) \neq \phi$ なる $(s,t) \in R^2$ の集合はルベーグ測度に関し無視できない。 従って $m(\sigma) = \infty$ となる。

Bibliographie

[1] L.Auslander and C.C.Moore, Unitary representations of solvable Lie groups, Mem. Amer. Soc. No 62, 1966.

[2] P.Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.

[3] L.Corwin and F.P.Greenleaf, Spectrum and multiplicities for restrictions of unitary representations in nilpotent Lie groups, Pacific J. Math., 135(1988) 233-267.

[4] H.Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, à paraître.

[5] G.Grélaud, Désintégration des représentations induites des groupes de Lie résolubles exponentiels, Thèse de 3e cycle, Univ. de Poitiers, 1973.

[6] A.A.Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Uspekhi Mat. Nauk, 17(1962), 57-110.

[7] R.Lipsman, Orbital parameters for induced and restricted representations, à paraître dans Trans. Amer. Math..

[8] R.Lipsman, Restricting representations of completely solvable Lie groups, à paraître.

[9] G.W.Mackey, Induced representations of locally compact groups II: the Frobenius Reciprocity Theorem. Annals of Math., 58(1953), 193-221.

[10] G.W.Mackey, The Theory of Unitary Group Representations, Chicago Lectures in Math., 1976.

[11] S.R.Quint, Decomposition of induced representations of solvable exponential Lie groups, Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1973.

[12] O.Takenouchi, Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), Math. J. Okayama Univ., 7(1957), 151-161.

[13] M.Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 3(1970), 353-384.