数理解析研究所講究録
第 712 巻 1990 年 118-135

Fourier transforms for affine automorphism groups on Siegel domains

九大・理　井上順子 (Junko INOUE)

Dを等質Siegel領域(第2種)とし、そのaffine自己同型群を $G(D)$, $G(D)$の単位元の連結成分を $G(D)_0$ とする。$G(D)_0$は、Dのある点での固定部分群をKとする時、半直積 $G(D)_0 = K\cdot G$ に分解する。ここでGはDに単純推移的に作用する、完全可解($\mathbb{R}$上split solvable)群である。このGは、共役性を除いて一意に定まり、Dの岩沢群と呼ばれる(例えば[6], [10]参照)。

本稿では岩沢群Gを対象として、そのFourier変換、即ちGの既約ユニタリ表現が引きおこす $L^1(G)$ の表現を調べる。$ax+b$群の例(後述)でよく知られている様に、Gの既約ユニタリ表現 π に対し、そのFourier変換の像

$$\pi(\varphi) = \int_G \pi(g)\varphi(g)\,dg \qquad \left(\begin{array}{l} dg\text{ は }G\text{の左Haar測度} \\ \varphi \in L^1(G) \end{array}\right)$$

は必ずしもコンパクト作用素とは限らない。そこで、$\pi(\varphi)$ が

コンパクト作用素となる $\mathfrak{S}$ の特徴づけを問題として取りあげる。

1. 正規 j 代数（normal j-algebra）

等質 Siegel 領域の岩沢群の Lie 環は、Pyatetskii-Shapiro によって導入された'正規 j 代数'の概念で特徴づけられる。

定義 1. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R}$ 上の Lie 環、j を $\mathfrak{g}$ の 1 次変換、f_0 を $\mathfrak{g}$ 上の 1 次形式とする。組（$\mathfrak{g}$, j, f_0）が次の条件を満足する時、正規 j 代数といわれる.

(1) $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{R}$ 上完全可解（即ち $\mathfrak{g}$ のイデアルの減少列 $\{\mathfrak{g}_i\}$ で $\dim(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}) = 1$ をみたすものが存在する）。

(2) $j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は複素構造（$j^2 = -\mathrm{Id}$）.

(3) j は可積分条件をみたす、即ち $\mathfrak{g}^- = \{Y + \sqrt{-1}\, jY ; Y \in \mathfrak{g}\}$ は. $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Lie subalgebra.

(4) $f_0([Y, jY]) > 0 \qquad 0 \neq Y \in \mathfrak{g}$

(5) $f_0([\mathfrak{g}^-, \mathfrak{g}^-]) = \{0\}$

岩沢群の Lie 環には. 上の条件を満足する j, f_0 が存在するが、逆に正規 j 代数（$\mathfrak{g}$, j, f_0）に対し、$\mathfrak{g}$ を Lie 環にもつ連結かつ単連結な Lie 群は、適当な（第2種）Siegel 領域

上、単純推移的に作用するaffine自己同型群として実現される。(詳しくは、[6], [10] 参照。)

そこで、以後、正規j代数 $(\mathfrak{g}, j, f_0)$ (注. 単に $\mathfrak{g}$ と略記することがある。)から出発して、対応する群 $G = \exp \mathfrak{g}$ のユニタリ表現を調べる事にする。

2. $ax+b$ 群

始めに、例として $ax+b$ 群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ a, b \in \mathbb{R}, \ a > 0 \right\}$$

を取りあげよう。G の Lie 環

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し、1次変換 j を $jX = -Y$, $jY = X$ で、1次形式 f_0 を $f_0(X) = 0$, $f_0(Y) = -1$ で定めると、$(\mathfrak{g}, j, f_0)$ は正規j代数となる。

$G = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$ とみて G の各点 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を (b, a) と書き、G 上の測度 $d\mu$ を $d\mu(g) = d\mu((b,a)) = a^{-2}\, db\, da$ で定めると、$d\mu$ は G の左 Haar 測度である。(ここで db, da は Lebesgue 測度。)

さて、G の既約ユニタリ表現の同値類全体は、以下で定め

る２つの無限次元表現 π_+, π_- 及びユニタリ指標 χ_λ（$\lambda \in \mathbb{R}$ でパラメトライズされる）として実現される。

• π_+, π_-

表現空間を $L^2(\mathbb{R}_+^*, \frac{dt}{t})$（正の実数の乗法群上、Haar 測度 $\frac{dt}{t}$ に関する L^2－関数の空間）とし、$g=(b,a)$ の作用を

$$\pi_\pm((b,a))\xi(t) = e^{\pm\sqrt{-1}bt}\xi(at), \quad \xi=\xi(t) \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \frac{dt}{t})$$

（複号同順）

で定める。

• χ_λ （$\lambda \in \mathbb{R}$）

$$\chi_\lambda((b,a)) = a^{\sqrt{-1}\lambda}.$$

次に G の２つの無限次元表現 π_+, π_- に対して Fourier 変換 $\pi_\pm(\varphi) = \int_G \pi(g)\varphi(g)\,d\mu(g)$, $\varphi \in L^1(G, d\mu(g))$ を考えよう。π_+, π_- が共に CCR でない、即ち Fourier 変換の像 $\pi_\pm(\varphi)$ がコンパクト作用素とは限らない、という事実は、以前からよく知られており、実際 Khalil [7] は $\pi_\pm(\varphi)$ がコンパクト作用素となるための判定条件を次の形で与えた。

定理 2. （Khalil [7], Eymard et Terp [5]）G を $ax+b$ 群 π_+, π_- は前述の通りとする。$\varphi \in L^1(G)$ に対して、次の３つの主張は同値である。

(a) $\pi_+(\varphi)$ はコンパクト作用素

(b) $\pi_-(\varphi)$ はコンパクト作用素

(c) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(b, a)\, db = 0$ が殆ど全ての $a \in \mathbb{R}_+^*$ で成り立つ。

以下 一般の正規j代数 $\mathfrak{g}$ に対応するLie群 $G = \exp \mathfrak{g}$ に対して、Khalilの結果を拡張する事を目標とする。

3. 正規j代数の構造

ここで 正規j代数の基本的構造についてまとめておく。([6], [10], [12] 参照.)

定理 3. (Pyatetskii-Shapiro) $(\mathfrak{g}, j, f_0)$ を正規j代数とする。$\mathfrak{g}$ 上の対称双1次形式 ω を $\omega(X, Y) = f_0([X, jY])$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ で定義すると、定義1の(4)より ω は正定値である。$\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の ω に関する直交補空間を $\mathfrak{a}$ とすると $\mathfrak{a}$ は 可換な部分環で $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{h}$ への adjoint 作用は $\mathbb{R}$-diagonalizable. 即ち $\mathfrak{h}$ はルート空間に分解する。$\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対空間として.

$$\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}^*} \mathfrak{g}^{\alpha} \quad ; \quad \mathfrak{g}^{\alpha} = \{X \in \mathfrak{h} \,;\, [A, X] = \alpha(A)X \,,\, A \in \mathfrak{a}\}.$$

$\{\alpha_k\}_{1 \leq k \leq r}$ を $\{0\} \neq j(\mathfrak{g}^{\alpha_k}) \subset \mathfrak{a}$ をみたすルートとすると、$\dim \mathfrak{g}^{\alpha_k} = 1$, $r = \dim \mathfrak{a}$. (この r を $\mathfrak{g}$ の rank と呼ぶ)

適当に番号をつけかえれば、$\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$ となるルートは、高々次の形のものに限る。

$$\alpha_k, \quad \frac{\alpha_k}{2} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

$$\frac{\alpha_m+\alpha_k}{2}, \quad \frac{\alpha_m-\alpha_k}{2} \qquad (1 \leq k < m \leq n)$$

次に

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} + \sum_{1\leq k<m\leq n} \mathfrak{g}^{(\alpha_m-\alpha_k)/2}$$

$$\mathfrak{g}_{1/2} = \sum_{1\leq k\leq n} \mathfrak{g}^{\alpha_k/2}$$

$$\mathfrak{g}_1 = \sum_{1\leq k\leq n} \mathfrak{g}^{\alpha_k} + \sum_{1\leq k<m\leq n} \mathfrak{g}^{(\alpha_m-\alpha_k)/2}$$

とおくと、$\mathfrak{g}$ はベクトル空間として直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_0$ に分解し、以下が成り立つ。

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{i+k}.$$

(但し $i+k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ の時 $\mathfrak{g}_{i+k} = \{0\}$ とする。)

$$j\,\mathfrak{g}_{1/2} = \mathfrak{g}_{1/2} \qquad j\,\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1.$$

4. coadjoint orbit と G のユニタリ双対

正規j代数 $\mathfrak{g}$ は 完全可解Lie環だから、対応する群 G は exponential群 (exponential写像が $\mathfrak{g} \to G$ の微分同型である群) であり、G のユニタリ双対 $\hat{G}$ は、orbit method によりパラメトライズされる。即ち、$\mathfrak{g}$ の双対ベクトル空間 $\mathfrak{g}^*$ 上

G の coadjoint 作用による軌道空間を $\mathfrak{g}^*/G$ とすると、Kirillov-Bernat 写像 $\Theta : \mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$ と呼ばれる全単射が定められる。

正規 j 代数 $(\mathfrak{g}, j, f_0)$ の場合、$\mathfrak{g}^*$ は open coadjoint orbit を持つ。この open orbit について知られている基本的な事実を述べよう。まず、直和分解：$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_0$ に於て $\mathfrak{g}_1$ はイデアルであり、$G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$（部分環 $\mathfrak{g}_0$ に対応する部分群）が $\mathfrak{g}_1^*$ 上に coadjoint 表現の制限で作用することに注意する。$\mathfrak{g}$ の分解に沿って、$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_{1/2}^* \oplus \mathfrak{g}_0^*$ と分解しておく。

命題 4. [8], [13]. $\mathfrak{g}$ を $\mathrm{rank} = r$ の正規 j 代数とする。この時、$\mathfrak{g}^*$ は 2^r 個の open coadjoint orbit を持ち、その和集合は $\mathfrak{g}^*$ で稠密である。各 open orbit は次の形でかける。代表元 $f \in \Omega$ をとり、$f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1}$（$\mathfrak{g}_1$ への制限）とする。そして上で注意した $\mathfrak{g}^*$ の分解に従って $\mathfrak{g}_i^* \subset \mathfrak{g}^*$ $(i = 1, \frac{1}{2}, 0)$ とみなすと

$$\Omega = G_0 \cdot f_1 + \mathfrak{g}_{1/2}^* + \mathfrak{g}_0^* .$$

注意 (1) $ax+b$ 群の例に於て、$\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}Y$, $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}X$. $\{X, Y\}$ の双対基底を $\{X^*, Y^*\}$ とすると、G の coadjoint orbit は

$$\Omega_+ = \{ \ell \in \mathfrak{g}^* ; \ \ell(Y) > 0 \}$$

$$\Omega_- = \{ l \in \mathfrak{g}^* ;\ l(Y) < 0 \}$$

$$\lambda X^* \quad (\text{各} \lambda \in \mathbb{R} \text{ に対する一点})$$

である。Kirillov-Bernat 写像により、Ω_+, Ω_-, λX^* はそれぞれ前に構成した π_+, π_-, χ_λ の同値類に対応する。

(2) $ax+b$ 群の２つの表現 π_+, π_- は、二乗可積分表現であるが、一般の正規ｊ代数の場合も、$G=\exp\mathfrak{g}$ の二乗可積分表現全体は、open orbit に対応する既約表現の同値類全体と一致している（例えば [11] 参照）。

本稿では open orbit に対応する既約表現に対し、その Fourier 変換がコンパクト作用素となる関数の特徴づけを与える。

5. コンパクト作用素に変換される関数の特徴づけ

正規ｊ代数 $\mathfrak{g}$ に対し、$G=\exp\mathfrak{g}$, dg を G の左 Haar 測度とする。始めに分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_0$ の可換イデアル $\mathfrak{g}_1$ に対して、$G_1=\exp\mathfrak{g}_1$ - パートの Euclidean Fourier transform を定義しておく。

定義 5. $\varphi \in L^1(G)$, dX を $\mathfrak{g}_1$ 上の Lebesgue 測度とする。G_1 上の Euclidean Fourier transform $\mathcal{F}_1\varphi$ を $l \in \mathfrak{g}_1^*$ 及び（殆ど

至る所の）$g \in G$ に対し

$$\mathcal{F}_1\varphi(l)(g) = \int_{\mathfrak{g}_1} e^{\sqrt{-1}\, l(X)}\, \varphi((\exp X)g)\, dX$$

で定める。

注意 任意の $g_1 = \exp Y \in G_1$ に対し、$\mathcal{F}_1\varphi(l)(g_1 g) = e^{\sqrt{-1}\, l(Y)}\, \mathcal{F}_1\varphi(l)(g)$，（$l \in \mathfrak{g}_1^*$，$g \in G$）であるから、$d_r\dot{g}$ を $G_1\backslash G$ の左 Haar 測度，Δ_G を G の modular 関数とすると各 $l \in \mathfrak{g}_1^*$ に対し

$$|\mathcal{F}_1\varphi(l)(g)\Delta_G(g)| \in L^1(G_1\backslash G,\, d_r\dot{g})$$

と見做せる。

以上の準備の下で次の判定条件が得られる。

定理 6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_0$ を正規𝔧代数、$G = \exp \mathfrak{g}$，dg を G の左 Haar 測度とする。Ω を open coadjoint orbit とし、これに対応する G の表現を $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ とする。また一般の $l \in \mathfrak{g}^*$ に対し、orbit $G\cdot l$ に対応する既約表現を π_l で表す。そして open orbit Ω の境界を $\partial\Omega$ と記す。（即ち $\partial\Omega = cl(\Omega) \setminus \Omega$，ここで $cl(\Omega)$ は Ω の閉包。）この時，$\varphi \in L^1(G)$ に対して，次の3つの条件は同値である。

1. $\pi(\varphi)$ は $\mathcal{H}_\pi$ のコンパクト作用素である.
2. 任意の $l \in \partial\Omega$ に対し、$\mathcal{F}_1\varphi(l_1)(g) = 0$. ここで $l_1 = l|_{\mathfrak{g}_1}$.
3. 任意の $l \in \partial\Omega$ に対し. $\pi_l(\varphi) = 0$

注意7 (1)　$ax+b$ 群の例では　2つの open orbit $\Omega_\pm$ に於て $\partial\Omega_+ = \partial\Omega_-$ である。従って定理6の条件1,2の同値から Khalil の結果が出る。

(2)　一般の局所コンパクト群 G に対し、Arsac は G の C^* 環のスペクトルの言葉を用いて、Fourier 変換のコンパクト性に関する結果を得ている。ここで、簡単のため、可分なI型の局所コンパクト群に対してその結果をまとめると次の通り.

定理 8.　(Arsac [1])　G を可分なI型局所コンパクト群，$\pi \in \hat{G}$ とする。$\hat{G}$ には Fell 位相 [4, 18.1] を入れ、$\{\pi\}$ の閉包を $\overline{\{\pi\}}$ で表す。(即ち $\sigma \in \overline{\{\pi\}} \Longleftrightarrow \sigma$ is weakly contained in $\{\pi\}$)　この時、$\varphi \in L^1(G)$ に対し、$\pi(\varphi)$ がコンパクト作用素であるための必要十分条件は. すべての $\sigma \in (\overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\})$ に対し　$\sigma(\varphi) = 0$　を満たす事である.

さて　G を exponential 群とすれば、前述した様に Kirillov -

Bernat 写像 $\Theta : \mathfrak{g}^*/G \longrightarrow \hat{G}$ は全単射である。更に、$\mathfrak{g}^*/G$ に商空間としての位相を入れ、$\hat{G}$ に Fell 位相を入れると、Θ は連続である事が知られている [9]. 従って、coadjoint orbit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}^*/G$ に対して、その境界（商空間 $\mathfrak{g}^*/G$ の位相で）を $\partial\mathcal{O}$ で表すと $\Theta(\partial\mathcal{O}) \subset \overline{\{\Theta(\mathcal{O})\}} \setminus \Theta(\mathcal{O})$ であり、定理 6 の条件 1 に Arsac の結果を用いて条件 3 が出る。

しかし、一般にこの逆、即ち Θ^{-1} が連続かどうかは まだ未解決の問題である。

<u>例</u>（2次の Siegel 上半平面）

6 次元の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\text{-span}\{X_1, X_2, W, Z, Y_1, Y_2\}$ を、自明でない括弧積

$$[X_1, W] = -\tfrac{1}{2}W,\quad [X_1, Z] = \tfrac{1}{2}Z \qquad [X_1, Y_1] = Y_1$$

$$[X_2, W] = \tfrac{1}{2}W,\quad [X_2, Z] = \tfrac{1}{2}Z \qquad [X_2, Y_2] = Y_2$$

$$[W, Z] = Y_2 \qquad [W, Y_1] = Z$$

として定義する。$\mathfrak{g}$ 上の一次変換 j を $jX_k = -Y_k$, $jW = -Z$, $jZ = W$, $jY_k = X_k$ $(k = 1, 2)$ で定め、一次形式 f_0 を、$f_0(Y_1) = f_0(Y_2) = -1$, $f_0(W) = f_0(Z) = f_0(X_1) = f_0(X_2) = 0$ で定めると、$(\mathfrak{g}, j, f_0)$ は正規 j 代数である。（これは 2次の Siegel 上半平面に対応するものである。） $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0$（定理 3）、$\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}\text{-span}\{Y_1, Y_2, Z\}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}\text{-span}\{X_1, X_2, W\}$ に分解し

$\mathfrak{g}^*$ は4個の open coadjoint orbit Ω_i $(i=1,2,3,4)$ を持つ。これらは $\mathfrak{g}^*$ 上の多項式 P_1, P_2 :

$$P_1(\ell) = \ell(Y_1)\ell(Y_2) - \frac{1}{2}\ell(Z)^2$$

$$P_2(\ell) = \ell(Y_2) \qquad\qquad \ell \in \mathfrak{g}^*$$

の零点を除いた集合の連結成分である。

$$\Omega_1 = \{ \ell \in \mathfrak{g}^* ;\ P_1(\ell) > 0,\ P_2(\ell) > 0 \}$$

$$\Omega_2 = \{ \ell \in \mathfrak{g}^* ;\ P_1(\ell) < 0,\ P_2(\ell) > 0 \}$$

$$\Omega_3 = \{ \ell \in \mathfrak{g}^* ;\ P_1(\ell) > 0,\ P_2(\ell) < 0 \}$$

$$\Omega_4 = \{ \ell \in \mathfrak{g}^* ;\ P_1(\ell) < 0,\ P_2(\ell) < 0 \}.$$

$p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}_1^*$ を $\mathfrak{g}_1$ 上への制限で定義される射影とし、$\{Y_1^*, Y_2^*, Z^*\}$ を $\{Y_1, Y_2, Z\}$ に対する $\mathfrak{g}_1^*$ の双対基底とする。この時

$$p(\partial\Omega_1) = \{ \ell \in \mathfrak{g}_1^* ;\ P_1(\ell) = 0,\ P_2(\ell) \geqq 0 \}$$

即ち $\gamma S_+(\theta) = \gamma\left((Y_1^* + Y_2^*) + \cos\theta (Y_1^* - Y_2^*) + \sqrt{2}\sin\theta Z^*\right)$

$\gamma \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ で定められる cone.

$p(\partial\Omega_2) = p(\partial\Omega_1) \cup Y_2^\perp$ 但し $Y_2^\perp = \{ \ell \in \mathfrak{g}_1^* ;\ \ell(Y_2) = 0 \}$.

$$p(\partial\Omega_3) = \{ \ell \in \mathfrak{g}_1^* ;\ P_1(\ell) = 0,\ P_2(\ell) \leqq 0 \}$$

即ち $\gamma S_-(\theta) = \gamma\left(-(Y_1^* + Y_2^*) + \cos\theta (Y_1^* - Y_2^*) + \sqrt{2}\sin\theta Z^*\right)$

$\gamma \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ で定められる cone.

$p(\partial\Omega_4) = p(\partial\Omega_3) \cup Y_2^\perp$.

Ω_i に対応する G の既約表現を π_i $(i=1,2,3,4)$ として

$$\mathcal{J}(\pi_i) = \{\varphi \in L^1(G) ;\ \pi_i(\varphi) \text{ はコンパクト作用素}\}$$

とすると、定理6から

$$\mathcal{J}(\pi_1) \supsetneqq \mathcal{J}(\pi_2),\quad \mathcal{J}(\pi_3) \supsetneqq \mathcal{J}(\pi_4)$$

が成り立つ。

定理6の証明の方針。

注意7.(2)で既に説明した様に条件1から条件3が出る事は分っているから、条件2と条件3が同値である事、及び条件2から条件1が出る事を示せば、定理は証明できる。ここでは、その証明の方針のみを述べておくことにする。

始めに Kirillov-Bernat 対応に基づいた、既約表現の構成法を簡単にまとめておこう。

G を exponential Lie 群、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。coadjoint orbit Ω に対し、代表元 $f \in \Omega$ を任意にとる。この時、以下の条件(1), (2) (3) をみたす部分環 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_f$ が存在する。

(1) $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = \{0\}$

(2) $\mathfrak{h}$ は(1)をみたす部分環の中で最大の次元を持つ。(この様な $\mathfrak{h}$ を f における real polarization という。)

(3) affine 空間 $\mathfrak{h}^{\perp} + f$ は Ω に含まれる。ここで $\mathfrak{h}^{\perp} = \{l \in \mathfrak{g}^* ;\ l|_{\mathfrak{h}} = 0\}$。((3) を Pukanszky condition という。)

$\pi = \pi(f, \mathfrak{b})$ を、$B = \exp \mathfrak{b}$ のユニタリ指標 $\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1} f(X)}$ $(X \in \mathfrak{b})$ から誘導された、G のユニタリ表現としよう。この時、π は既約で、その同値類は 代表元 f 及び polarization $\mathfrak{b}$ の選び方に依らない。従って対応 $f \mapsto \pi(f, \mathfrak{b})$ から写像 Θ: $\mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$ が引きおこされるが、これが前述の Kirillov–Bernat 写像である。

定理6 の証明に移ろう。以後、記号は定理6で述べた通りとする。まず、前述の方法に従って、$l \in \mathfrak{g}^*$ に於て $G \cdot l$ に対応する表現 π_l を構成する。ここで Pukanszky condition をみたす real polarization $\mathfrak{b}_l$ は $\mathfrak{g}_1$ を含む様にとれる。そこで π_l を $\mathrm{ind}_{B_l}^G \chi_l$ $(B_l = \exp \mathfrak{b}_l)$ として、G 上の関数 ξ で

$$\xi(bg) = \chi_l(b) \left(\Delta_{B_l}(b) / \Delta_G(b) \right)^{\frac{1}{2}} \xi(g) \qquad b \in B_l,\ g \in G$$

(ここで Δ_{B_l}, Δ_G はそれぞれ B_l, G の modular 関数) をみたすものから成る、ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\pi_l}$ 上に 右移動で実現する [2, Ch V]。この時、$G_1 \subset B_l$ だから $g_1 \in G_1$ の作用は

$$(\pi_l(g_1)\xi)(x) = \chi_l(x g_1 x^{-1}) \xi(x), \quad \xi \in \mathcal{H}_{\pi_l} \quad x \in G$$

であることに注意する。

$G_1 \backslash G$ の global section s をとって、$G = \mathfrak{g}_1 \times (G_1 \backslash G)$ と同一視

し、$G_1\backslash G$ 上の右Haar測度 $d\dot{g}$ を $\Delta_G^{-1}(g)dg = dX\,d\dot{g}$ （但し $g=(\exp X)s(\dot{g})$，$X\in\mathfrak{g}_1$，$\dot{g}\in G_1\backslash G$，$dX$ は $\mathfrak{g}_1$ 上のLebesgue測度）を満足する様にとっておく．

この時、$\varphi\in L^1(G)$ に対して、$\pi_\ell(\varphi)$ は（殆ど全ての $x\in G$ で）

$$(\pi_\ell(\varphi)\xi)(x) = \int_{G_1\backslash G} \mathcal{F}_1\varphi\,(x^{-1}\cdot \ell_1)(s(\dot{g}))(\pi_\ell(s(\dot{g}))\xi)(x)\Delta_G(s(\dot{g}))\,d\dot{g}$$

である事に注意すれば、条件２から条件３が出る事が分る。

次に条件３を仮定しよう．$\ell\in\partial\Omega$ に対し、G_1 のユニタリ指標 $\chi_\ell(\exp X) = e^{\sqrt{-1}\ell(X)}$ （$X\in\mathfrak{g}_1$）からの誘導表現 $\tau=\mathrm{ind}_{G_1}^G\chi_\ell$ を考える．τ はaffine空間 $\mathfrak{g}_1^\perp+\ell$ と交わるcoadjoint orbitに対応する既約表現の直積分に分解する。（例えば［３］参照）一方、命題４から $\Omega+\mathfrak{g}_1^\perp=\Omega$．従って $\partial\Omega+\mathfrak{g}_1^\perp=\partial\Omega$ であり、τ の既約分解に現れる既約表現は全て $\partial\Omega$ に含まれるものである．故に仮定から $\tau(\varphi)=0$．

今 τ を $L^2(G_1\backslash G, d\dot{g})$ に右移動を経由して実現すると、任意の $v\in L^2(G_1\backslash G, d\dot{g})$ に対し、殆ど全ての $\dot{x}\in G_1\backslash G$ に於て

$$\begin{aligned}(\tau(\varphi)v)(\dot{x}) &= \int_{G_1\backslash G} \mathcal{F}_1\varphi\,(\dot{x}^{-1}\cdot \ell_1)(s(\dot{g}))(\tau(s(\dot{g}))v)(\dot{x})\Delta_G(s(\dot{g}))\,d\dot{g}\\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ．これから条件２が導かれる．

最後に、条件2から条件1を示す方針を述べる。まず、Ω が open orbit である事から、$f\in\Omega$ に於ける real polarization $\mathfrak{b}_f$ で Pukanszky condition をみたすものは $\mathfrak{g}_1\subset\mathfrak{b}_f\subset\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_{1/2}$ をみたす様にとれることが分る。$\mathfrak{n}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_{1/2}$, $N=\exp\mathfrak{n}$ とおくと、$G=NG_0$ である。ここで $\sigma=\mathrm{ind}_{B_f}^N\chi_f$, σ の表現空間を $\mathcal{H}_\sigma$ とすれば、π は、N の表現 σ からの誘導表現 $\mathrm{ind}_N^G\sigma$ として実現できる。G_0 の右 Haar 測度 dg_0 をとり、dg_0 に関して、G_0 上 $\mathcal{H}_\sigma$ − 値の L^2 − 関数の空間：$L^2(G_0,\mathcal{H}_\sigma,dg_0)$ に右からの作用で π を実現しよう．

さて、G 上の関数 β で、$\beta=\beta_N\cdot\beta_0\in C_c(N)\otimes C_c(G_0)$（コンパクト台をもつ連続関数の積）であるもの、及び $\varkappa\in C_c(G_0)$ を任意にとる。一般に $\pi(\beta)$ はコンパクト作用素ではないが、$\varkappa$ による積と合成して得られる作用素 $\varkappa\cdot\pi(\varphi)$，即ち、$(\varkappa\cdot\pi(\varphi)\xi)(x_0)=\varkappa(x_0)(\pi(\varphi)\xi)(x_0)$，$\xi\in L^2(G_0,\mathcal{H}_\sigma,dg_0)$，は、コンパクト作用素である事が分る。

条件2をみたす φ の Fourier 変換 $\pi(\varphi)$ に対して、上の β と $\varkappa$ を適当にとれば、（作用素 norm に関して）$\pi(\varphi)$ に収束するコンパクト作用素の列：$\{\varkappa_i\cdot\pi(\beta_k)\}_{i,k}$ を作る事ができる。

References

1. G. Arsac, Opérateurs compacts dans l'espace d'une représentation, C. R. Acad. Sc. Paris, 286 (1978), 687-689.

2. P. Bernat et al., "Représentations des Groupes de Lie Résolubles," Dunod, Paris, 1972.

3. I. K. Busyatskaya, Representations of exponential Lie groups, Functional Anal. Appl. 7 (1973), 151-152.

4. J. Dixmier, "C^*-Algebras," North-Holland, 1982.

5. P. Eymard et M. Terp, La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe des ax+b d'un corps local, Lecture Notes in Math. 739, Springer, 1979, 207-248.

6. S. Kaneyuki, "Homogeneous Bounded Domains and Siegel Domains," Lecture Notes in Math. 241, Springer, 1971.

7. I. Khalil, Sur l'analyse harmonique du groupe affine de la droite, Studia Mathematica 51 (1974), 140-166.

8. T. Nomura, Harmonic analysis on a nilpotent Lie group and representations of a solvable Lie group on $\bar{\partial}_b$ cohomology spaces, Japan. J. Math. 13 (1987), 277-332

9. L. Pukanszky, On unitary representations of exponential groups, J. Funct. Anal. 2 (1968), 73-113.

10. I. I. Pyatetskii-Shapiro, "Automorphic Functions and the Geometry of Classical Groups," Gordon and Breach, New York, 1969.

11. J. Rosenberg, Square-integrable factor representations of locally compact groups, Trans. Amer. Math. Soc. 237 (1978), 1-33.

12. H. Rossi, "Lectures on Representations of Groups of

Holomorphic Transformations of Siegel Domains," Lecture-note, Brandeis University, 1972.

13. H. Rossi et M. Vergne, Équations de Cauchy-Riemann tangentielles associées à un domaine de Siegel, Ann. Sci. École Norm. Sup. 9 (1976), 31-80.