数理解析研究所講究録 24
第 713 巻 1990 年 24-32

Phantom Homologies

吉野雄二（名大・理）
(Yuji Yoshino)

以下は Hochster-Huneke [1] の第9章の紹介である。概ね原論文通りに紹介するので、分かりにくいところは [1] を参照してほしい。なお以下での定理の番号などは全て [1] のものである。

今までと同様、R は標数 $p>0$ の環で、整数 e に対して $q=p^e$ と書く。

英和辞典を引いてみると、

phantom = 幻、幽霊、お化け、幻影、錯覚、妄想、(形容詞的に) 見せかけの

ということがわかる。題名の phantom homology は多分この最後の意味で使われているものと思う。(すなわち、殆ど homology が見えない！) 正確に定義をすると、

定義. 有限生成自由 R-加群からなる鎖複体：

$$G.\ :\ \ldots \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow 0$$

が与えられたとする。i 番目の項における cycles、boundaries をそれぞれ Z_i、B_iと書くことにする。homology $H_i(G.)$ が phantom であるとは、$Z_i \subset (B_i)^*_{G_i}$ と定義される。$H_0(G.)$ 以外の全ての homologies が phantom であるとき、鎖複体 $G.$ は phantom homology を持つと言う。さらに、cycle $z \in Z_i$ について、その homology class $[z]$ が phantom であるとは、$z \in (B_i)^*_{G_i}$ となるときである。

R が weakly F-regular のときには、定義によって $G.$ が phantom homology を持つことは acyclic ということと同値である。(だから phantom なのだ。) 次の定理が成立する。

定理. $h: R \to S$ が環準同型で $h(R^\circ) \subset S^\circ$ をみたすと仮定する。$G.$ を R 上の有限生成自由加群の鎖複体、$G'.$ を S 上の有限生成自由加群の鎖複体とする。R 上の鎖複体としての準同型 $\phi: G. \to G'.$ があるとき、次が成立する。

$[z] \in H_i(G.)$ が phantom ならば $H_i(\phi)([z]) \in H_i(G'.)$ もまた phantom である。

特に、$H_i(G.)$ が phantom で、S が weakly F-regular ならば、$H_i(G.) \to H_i(G'.)$ は零写像である。(phantom homology はすぐ消える。)

証明: $z \in Z_i$ とする。定義によって、$c \in R^\circ$ があって、任意の $q \gg 1$ に対して $cz^q \in B_i^{[q]}$ となる。よって、$h(c)\phi(z)^q \in (B'_i)^{[q]}$ for $\forall q \gg 1$ となる。結局、$\phi(z) \in (B'_i)^*$ が出る。∎

記号. 以下では、次のような記号を使う。

(1) $G.$ は R 上の有限生成自由加群からなる長さ有限の鎖複体で、次のように書けているとする。

$$G. \ : \ 0 \longrightarrow G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_0 \longrightarrow 0$$

このとき、

$$\begin{aligned} n &= \text{the length of } G. \\ b_i &= rank(G_i) \\ r_i &= \sum_{t=i}^{n}(-1)^{t-i}b_t \end{aligned}$$

とおく。

(2) $\alpha : G \to G'$ が R-自由加群の間の準同型であるとき、次のように定義する。

$$\begin{aligned} rank(\alpha) &= max\{r| \ \wedge^r \alpha \neq 0\} \\ I_t(\alpha) &= \text{the ideal generated by } t\text{-minors of } \alpha \quad (t \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

定義. 鎖複体 $G.$ が rank 、depth 、height に関する標準的条件 (Standard Condition) を満たすとは、それぞれ次の条件が満たされる時を言う。

(SCrank) $\quad rank(\alpha_i) = r_i \quad (1 \leq i \leq n)$

(SCdepth) $\quad depth(I_{r_i}(\alpha_i)) \geq i \quad (1 \leq i \leq n)$

(SCheight) $\quad ht(I_{r_i}(\alpha_i)) \geq i \quad (1 \leq i \leq n)$

(但し、$ht(R) = depth(R) = \infty$ とする。)

Buchsbaum-Eisenbud による acyclicity criterion を思い出しておこう。

補題. $G.$ が acyclic であるための必要十分条件は $G.$ が $(SCrank)$ と $(SCdepth)$ を満たすことである。

また、次の定義をする。

定義. 鎖複体 $G.$ が phantom acyclicity crition $(phAC)$ を満たすとは、$G.^{red} = G. \otimes_R R_{red}$ が $(SCrank)$ と $(SCheight)$ を満足することと定義する。

本節の最終目標は次の定理を示すことにある。

定理9.8. 次の二つの条件を考える。

(1) G は $(phAC)$ を満たす。

(2) 任意の $e(\geq 0)$ について、$F^eG.$ は phantom homology をもつ。

このとき、(2) ⇒ (1) が常に成立する。もし、R が CM 環の準同型像で locally equidimensional のときには、(1) ⇒ (2) も成立する。

定義と記号. $\phi : R \to R$ を環準同型とする。(ただし、以下では殆どの場合、ϕ は Frobenius 写像のべき、または、恒等写像のどちらかである。)

$\Phi^n(R) = {}_1R_{\phi^n}$ と置く。すなわち、左 R-加群としては普通の R の作用で、右 R-加群としては ϕ^n を通して見たものである。左 R-加群 M に対して、$\Phi^n(M) = \Phi^n(R) \otimes_R M$ と置いてこれを左 R-加群と見なす。自然な写像 $M \to \Phi^n(M)$; $x \mapsto 1 \otimes x$ は ϕ^n-linear である (i.e. $x \mapsto \xi$ ならば $cx \mapsto \phi^n(c)\xi$) 、しかし、R-linear ではないことに注意しよう。

$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_i\}$ を R の元の列であるとする。この時、整数 t に対して、$\mathbf{x}^t = \{x_1^t, \dots, x_i^t\}$ と書く。$K.(\mathbf{x}^t; M)$ をこの列についての Koszul complex とする。自然な写像:

$$K.(\mathbf{x}^t; M) \to \Phi^n(R) \otimes_R K.(\mathbf{x}^t; M) = K.(\phi(\mathbf{x})^t; \Phi^n(M))$$

によって、ϕ^n-linear な写像:

$$\rho. : H.(\mathbf{x}^t; M) \to H.(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(M))$$

が導かれる。

R の元 c に対して、$c\Phi^n$ kills $H_j(\mathbf{x}^t; R)$ とは、次の合成射が 0 の時を言う。

$$H_j(\mathbf{x}^t; M) \xrightarrow{\rho_j} H_j(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(M)) \xrightarrow{c} H_j(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(M))$$

もっと一般に、R 上の鎖複体 $G.$ について、ϕ^n-linear な写像 $\rho. : H.(G.) \to \Phi^n(G.) = \Phi^n(R) \otimes_R G.$ が導かれる。このときにも、$c\Phi^n$ kills $H_j(G.)$ ということを写像の合成:

$$H_j(\mathbf{x}^t; G.) \xrightarrow{\rho_j} H_j(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(G.)) \xrightarrow{c} H_j(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(G.)$$

が 0 であることと定義する。

定義. イデアル $I \subset R$、R-加群 M と $c \in R$ について、$(\phi, c) - depth_I(M)$ を次によって定義する。

$$\begin{aligned} &(\phi, c) - depth_I(M) \geq n \\ &\iff 1 \leq \forall i \leq n,\ \exists \{x_1, \dots, x_i\} \subset I \text{ such that } c\Phi \text{ kills } H_j(\mathbf{x}^t; M) \text{ for } \forall j \geq 1,\ \forall t \geq 1 \end{aligned}$$

例.

(1) $\phi = 1$ 、$c = 1$ のとき、$(\phi, c) - depth_I(M) = depth_I(M)$ である。

(2) $\phi = 1$ 、$c \in R$ のとき、

$$\begin{aligned} (\phi, c) - depth_I(M) \geq n &\iff cH_j(\mathbf{x}^t; M) = 0\ (\forall j \geq 1,\ \forall t \geq 1) \\ &\implies depth_{I_c}(M_c) \geq n \end{aligned}$$

である。
(3) $\phi = F^e$、$c = 1$ のとき、$depth_I(R) \geq n$ または $depth_{IR_{red}}(R_{red}) \geq n$ ならば、$(F^e, 1) - depth_I(M) \geq n$ $(\forall e \gg 0)$ である。

定義.
(1) $\boxdot : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を次で定義する。

$$\boxdot 0 = 1, \quad \boxdot n = \boxdot(n-1) + \sum_{t=0}^{n-1} \boxdot t + n + 1$$

(2) $q, n \in \mathbb{N}$ について、

$$q < n >= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

と置く。

注意. 前のように、$\phi : R \to R$、$c \in R$ とするとき、鎖複体 $G.$ に対して、写像 $c\Phi^n : G. \to \Phi^n(G.)$ は $x \mapsto c \otimes x$ によって定義される。
$\phi = F^e$ で $q = p^e$ のとき定義によって、

$$(c\Phi)^n = c^{q<n>}\Phi^n$$

である。

以上のような記号のもとで次の定理が成立する。

定理 (Free Acyclicity Theorem 9.13). $\phi : R \to R$ は前のように $\phi = 1$ または $\phi = F^e$ としておく。R 上の鎖複体 $G.$ に対して、$I_i = I_{r_i}(\alpha_i)$ と書く。もし、$G.$ が $(SCrank)$ を満たし、更に、$(\phi, c) - depth_{I_i}(R) \geq i$ $(1 \leq i \leq n)$ を満足するならば、任意の t $(0 \leq t \leq n-1)$ に対して、$(c\Phi)^{\boxdot t}$ kills $H_{n-t}(G.)$ である。

証明: $n = length(G.)$ についての帰納法で証明する。$n = 0$ のときには自明である。$n = 1$ のとき、$G.$ を $0 \to G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_0 \to 0$ と書いておく。$(\phi, c) - depth_{I_1}(R) \geq 1$ より、$x \in I$ があって $c\Phi$ kills $H_1(x; R)$ となる。$rank(G_1) = rank(\alpha_1) \leq rank(G_0)$ であるから、

$$H_1(G.) = \mathrm{Ker}(\alpha_1) \subset (0 :_{G_1} I_1) \subset \oplus H_1(x; R)$$

である。よって、$c\Phi$ kills $H_1(G.)$ となる。
以下 $n \geq 2$ とする。鎖複体

$$G''. : 0 \longrightarrow G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_1 \longrightarrow 0$$

には帰納法の仮定が使えることに注意する。したがって、

$(*)$ $(c\Phi)^{\boxdot t}$ kills $H_{n-t}(G.)$ for $0 \leq \forall t \leq n-2$

特に、$H_1(G.)$ 以外のホモロジーについては定理は OK である。したがって、$(c\Phi)^{\boxdot(n-1)}$ kills $H_1(G.)$ となることのみ証明すればよい。反例があるとして局所化して考えれば良いので、初めから $(R, \mathfrak{m})$ は局所環として良い。次の事は容易に分かる。

(**) If $I_n = R$, then $H_n(G.) = 0$ and $(c\Phi)^{\boxdot t}$ kills $H_{n-t-1}(G.)$ for all $0 \le t \le n-2$.

実際、$G.' = (0 \to G_{n-1}/\alpha_n(G_n) \to G_{n-2} \to \cdots \to G_0 \to 0)$ と置いて、この $G'.$ に帰納法の仮定を使えば良い。

いま、$(\phi, c) - depth_{I_n}(R) \ge n$ より、

$$\exists\{x_1, \ldots, x_n\} \subset I_n \text{ such that } c\Phi \text{ kills } H_j(\mathbf{x}^t; R) \text{ for } \forall t, j \ge 1$$

となる。さて、任意に $z \in Z_1(G.)$ を一つ取って固定して置く。

$$(c\Phi)^{\boxdot(n-1)}([z]) = 0 \quad in \quad H_1(\Phi^{\boxdot(n-1)}(G.))$$

を言えば良い。$(G.)_{x_i}$ に (**) を適用して、$\exists\nu \ge 1$ such that

$$x_i^\nu (c\Phi)^{\boxdot(n-2)}(z) \in B_1(\Phi^{\boxdot(n-2)}(G.)) \quad (1 \le i \le n)$$

が言えるので、x_i の替わりに x_i^ν を考えて最初から $\nu = 1$ として良い。そこで、次のような写像が定義できる。

$$\begin{gathered} H_0(\mathbf{x}; R) = R/\mathbf{x}R \longrightarrow M := \Phi^{\boxdot(n-2)}(G_1)/B_1(\Phi^{\boxdot(n-2)}(G.)) \\ 1 \mapsto z' := (c\Phi)^{\boxdot(n-2)}(z) \end{gathered}$$

すると、次のような R-linear map f_0, f_1 が誘導される。

$$\begin{array}{ccccccccc} K_2 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & H_0(\mathbf{x}; R) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_0}\downarrow & & {\scriptstyle (c\Phi)^{\boxdot(n-2)}(z)}\downarrow & & \\ \Phi^{\boxdot(n-2)}(G_3) & \longrightarrow & \Phi^{\boxdot(n-2)}(G_2) & \longrightarrow & \Phi^{\boxdot(n-2)}(G_1) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

但し, $K. = K.(\mathbf{x}; R)$ である。(*) によって、$(c\Phi)^{\boxdot(n-2)}$ kills $H_2(G.)$ であるから、$\phi^{\boxdot(n-2)}$-linear map $K_2 \to K_1 \xrightarrow{f_1} \Phi^{\boxdot(n-2)}(G_2) \xrightarrow{(c\Phi)^{\boxdot(n-2)}} \Phi^{2\boxdot(n-2)}(G_2)$ は、その像が $\Phi^{2\boxdot(n-2)}(G.)$ の boundary に入る。したがって、写像：

$$\Phi^{\boxdot(n-2)}(K_2) \longrightarrow \Phi^{\boxdot(n-2)}(K_1) \xrightarrow{\Phi^{\boxdot(n-2)}(f_1)} \Phi^{2\boxdot(n-2)}(G_2) \xrightarrow{c^{q'<\boxdot(n-2)>}} \Phi^{2\boxdot(n-2)}(G_2)$$

は R-linear map であって、その像が boundary に含まれることが分かる。よって、次の図式を可換にするような R-linear map f_2 が存在することが分かる。

$$\begin{tikzcd}
\Phi^{\boxdot(n-2)}(K_2) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & \Phi^{\boxdot(n-2)}(K_1) \arrow[r] \arrow[d, "c^{q'<\boxdot(n-2)>}\Phi^{\boxdot(n-2)}(f_1)"'] & \Phi^{\boxdot(n-2)}(K_0) \arrow[d, "c^{q'<\boxdot(n-2)>}\Phi^{\boxdot(n-2)}(f_0)"'] \\
\Phi^{2\boxdot(n-2)}(G_3) \arrow[r] & \Phi^{2\boxdot(n-2)}(G_2) \arrow[r] & \Phi^{2\boxdot(n-2)}(G_1)
\end{tikzcd}$$

このような操作を続けていって最終的に次のような R-linear maps からなる可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Phi^{l}(K_n) \arrow[r] \arrow[d] & \Phi^{l}(K_{n-1})\cdots \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \Phi^{l}(K_0) \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & H_0(\phi^{l}(\mathbf{x});\Phi^{l}(R)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \Phi^{l'}(G_n)\cdots \arrow[r] & \Phi^{l'}(G_1) \arrow[r] & \Phi^{l'}(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで、$l=\boxdot(n-2)+\boxdot(n-3)+\ldots+\boxdot2+\boxdot1+\boxdot0$, $l'=l+\boxdot(n-2)=\boxdot(n-1)-n$ である。また、この図式の右端の縦の写像によって、$1\mapsto(c\Phi)^{l'}(z)$ である。$\Phi^{l}(K.)=K.(\phi^{l}(\mathbf{x});\Phi^{l}(R))$ であることに注意しておく。$(\quad)'=R$-dual と書いて、上の鎖複体の双対を考える。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Phi^{l}(K_0)' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Phi^{l}(K_{n-1})' \arrow[r] & \Phi^{l}(K_n)' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Phi^{l'}(G_1)' \arrow[r] \arrow[u, "f_0'"] & \cdots \arrow[r] & \Phi^{l'}(G_n)' \arrow[r] \arrow[u, "f_{n-1}'"] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

$\Phi^{l}(K.')\simeq K.(\mathbf{x}^{t};R)$ for some t であることと、$c\Phi$ kills $H.(\Phi^{l}(K.))$ であることから、上とまったく同じ議論によって、鎖複体の準同型 $(c\Phi)^{n}f.':\Phi^{l'+n}G'.\to\Phi^{l+n}K'.$ には chain homotopy $\{h_i\}$ が存在することが分かる。これの R-dual を取って、

$$(c\Phi)^{l'+n}(z)=0 \quad \in H_1(\Phi^{l'+n}G.)$$

であることが分かる。ここで、$l'+n=\boxdot(n-1)$ だから、$(c\Phi)^{\boxdot(n-1)}$ kills $H_1(G.)$ である。∎

補題 9.14(A). R が CM 環の準同型像であるような locally equidimensional な環であるとする。このとき、$\exists c\in R^{\circ}$ and $\exists e'\geq 0$ such that

$$(F^{e},c)-depth_{I}(R)\geq ht(I) \quad for\ \ \forall I\subset R,\ \forall e\geq e'$$

証明: Spec(R) は連結であると仮定して構わない。($R\simeq R_1\times R_2$ ならば成分毎に考えよ。) $R=S/Q$ と書く。但し、S は CM 環で、Q は S のイデアルでその極小素イデアルの高さは全部0であるように取

る。このとき、$c_1 \in S - \cup\{P \in Min(Q)\}$ があって、$c_1 Q^{[q']} = 0$ for some $q' = p^{e'}$ とできる。$K_j(\mathbf{x}^t; R)$ の任意の cycle z を取る。これの $K'.(\mathbf{x}^t; S)$ への持ち上げを一つ取ってそれを z' とする。Koszul complex の一部分；

$$\begin{array}{ccc} K_j(\mathbf{x}^t; S) & \xrightarrow{\beta} & K_{j-1}(\mathbf{x}^t; S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_j(\mathbf{x}^t; R) & \xrightarrow{\alpha} & K_{j-1}(\mathbf{x}^t; R) \end{array}$$

を考える。$\beta(z') \in QK_{j-1}(\mathbf{x}^t; S)$ であるから、$e \geq e'$ のときには、

$$(F^e\beta)(c_1 z'^{[q]}) \in c_1 Q^{[q]} K_{j-1}(\mathbf{x}^t; S) = 0$$

$F^e K.(\mathbf{x}^t; S)$ は acyclic なので、$c_1 z'^{[q]} \in B_j(F^e K.(\mathbf{x}^t; S))$ となり、$cz^{[q]} \in B_j(F^e K.(\mathbf{x}^t; R))$ が出る。これは、cF^e kills $H_j(\mathbf{x}^t; R)$ を意味する。∎

さて、R が CM 環の準同型像であるような locally equidimensional な環の時に、定理 9.8 (1) ⇒ (2) の証明をしよう。

そのために、鎖複体 $G.$ は $(phAC)$ を満足すると仮定する。このときに、任意の $e \geq 0$ に対して $F^e G.$ が phantom homology を持つことを証明したい。十分大きな $e \gg 0$ について、これを証明すれば十分である。$F^e G.$ もまた $(phAC)$ を満たすから、次の事を証明すれば良い。

もし $G.$ が $(SCrank)$ と $(SCheight)$ を満たせば、$G.$ は phantom homology を持つ。

前の補題によって、$\exists c \in R^{\circ}$、$\exists e' \geq 0$ such that

$$(F^{e'}, c) - depth_{I_i}(R) \geq ht(I_i) \geq i$$

となる。すると、$e \gg 0$ のとき、$F^e G.$ に Free Acyclicity Theorem 9.13 が適用できて、$(c\Phi^{e'})^{\boxdot t} = c^{q'<\boxdot t>} F^{e' \boxdot t}$ kills $H_{n-t}(F^e G.)$ $(0 \leq t \leq n-1)$ となる。結局、つぎの殆ど自明な事実から $H_{n-t}(F^e G.)$ が phantom になることが分かる。

一般に、$d \in R^{\circ}$ と $e_1 \geq 0$ に対して、もし dF^{e_1} kills $H_i(F^e G.)$ for all $e \gg 0$ ならば、$H_i(G.)$ は phantom である。∎

さて、次に定理 9.8 のもう一方向の証明をしよう。

そのために、$F^e G.$ は任意の $e \geq 1$ について、phantom homology を持つものと仮定する。$G.^{red}$ が $(SCrank)$ と $(SCheight)$ を満たすことを証明しなくてはならない。$G.$ に $Q = (R^{\circ})^{-1}R$ をテンサーして、Q が weak F-regular であることから、$F^e G. \otimes Q$ は acyclic になる。このことから、$G.^{red}$ が $(SCrank)$ を満たすことを見るのは容易である。問題は $(SCheight)$ である。これを示すためには、$(R, \mathfrak{m})$ は完備被約局所環として構わない。(R の代わりに $\widehat{R}_{red}$ を考える。) 更に、鎖複体 $G.$ は minimal として良いことに注意しよう。すなわち、$I_i \subset \mathfrak{m}$ for all i と仮定して良い。

定理の主張に対する反例が存在すると仮定する。すると、$\exists d\ (1 \le d \le n)$ such that $ht(I_d) < d$ となる。I_d の minimal prime で局所化して $ht(I_d) = dim(R)$ としておく。よって $dim(R) < d$ であり、I_d は $\mathfrak{m}$-primary ideal である。このとき矛盾が導かれることを示そう。

$dim(R) = 0$ の場合。このとき R は体で、特に F-regular なので $G.$ は acyclic 、よって split exact である。$\forall I_i = 0$ であるから矛盾。

$dim(R) = 1$ の時。この時には、test element $c \in R^\circ$ を取ることが出来た。$H_d(F^eG.)$ は phantom であったから次が成立する。

(*) $$cH_d(F^eG.) = 0 \quad (\forall e \ge 0)$$

鎖複体を次のように書いておく。

$$\begin{array}{ccccc} G_d & \xrightarrow{\alpha_d} & G_{d-1} & \xrightarrow{\alpha_{d-1}} & G_{d-2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F^eG_d & \xrightarrow{\beta_d} & F^eG_{d-1} & \xrightarrow{\beta_{d-1}} & F^eG_{d-2} \end{array}$$

$x \in G_d$ を G_d の自由基底の一部になるように取る。$x^q \in F^eG_d$ もまた自由基底の一部であることに注意しよう。$\alpha_d(x) \in \mathfrak{m}G_{d-1}$ より、$e \gg 0$ のときに $\beta_d(x^q) \in c^2F^eG_{d-1}$ である。よって、$y \in F^eG_{d-1}$ を取って、$\beta_d(x^q) = c^2y$ と書くことが出来る。$0 = \beta_{d-1}\beta_d(x^q) = c^2\beta_{d-1}(y)$ であるから、$\beta_{d-1}(y) = 0$ である。(*) によれば、$cy \in Im(\beta_d)$ だから、$cy = \beta_d(w)$ を満たす $w \in F^eG_d$ がある。すると、$\beta_d(x^q) = c^2y = \beta_d(cw)$ だから、$x^q - cw \in Z_d(F^eG.) \subset \mathfrak{m}F^eG.$ となり、これより $x^q \in \mathfrak{m}F^eG.$ となってしまう。これは x を自由基底の一部に取ったことに矛盾する。

最後に $dim(R) \ge 2$ の場合を考える。$d > dim(R) = ht(I_d) \ge 2$ であったことを思いだしておこう。前の場合と同じように test element $c \in R^\circ$ を取っておく。更に $a \in \mathfrak{m} \cap R^\circ$ を $dim(R/(a,c)R) = dim(R) - 2$ となるように取る。そして $R' = R/aR$ と置いて、この上の鎖複体;

$$G.' :\ 0 \longrightarrow R' \otimes G_n \longrightarrow \dots \longrightarrow R' \otimes G_2 \longrightarrow R' \otimes G_1 \longrightarrow 0$$

を考える。このとき、任意の $e \ge 0$ について、$F^eG.'$ もまた phantom homology を持つことが分かる。実際、完全列 : $0 \to F^eG. \xrightarrow{a} F^eG. \to R' \otimes F^eG. \to 0$ より次もまた完全である。

$$H_i(F^eG.) \longrightarrow H_i(R' \otimes F^eG.) \longrightarrow H_{i-1}(F^eG.)$$

定義によって、c は $F^eG'.$ の homology を消すので、$i \ge 2$ のとき $c^2H_i(R' \otimes F^eG.) = 0$ となることが分かる。0 番目の所以外では、$R' \otimes F^eG.$ と $F^eG'.$ は(次数を一つずらせて)同じなので、$c^2H_i(F^eG'.) = 0\ \forall e \ge 0,\ \forall i \ge 1$ であることが出る。これより $F^eG'.$ もまた phantom homology を持つことがわかった。

さてそうすると、G'., R' には帰納法の仮定が使えて、

$$ht(I_{r_d}(\alpha'_d)) \geq d-1$$

一方で、$I_{r_d}(\alpha'_d) = (I_d + cR)/cR$で、$I_d$が $\mathfrak{m}$-primary であることから、$ht(I_{r_d}(\alpha'_d)) = dim(R') = dim(R) - 1$ となる。結局 $dim(R) \geq d$ が出て、最初の取り方に矛盾する。∎

REFERENCE

1. Melvine Hochster and Craig Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*, preprint (1989).