数理解析研究所講究録
第713巻 1990年 53-66

長さ $l_R(I^*/I)$ の評価について

東京都立大　中村　幸男　(Yukio Nakamura)

1. 序文

Rを可換なNoether環で正標数pの体を含むものとするとき，RのイデアルIのtight closure I^*は次のように定義される；
$x \in R$に対し，$x \in I^* \iff \exists c \in R^\circ := R - \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)} \mathfrak{p}$ such that $cx^{p^e} \in (a^{p^e} \mid a \in I)R$ for all $e \gg 0$

Tight closure の概念は，最近，M.Hochster と C.Huneke [HH] によって導入され，正標数の環の解析に新しい展望を与えた。一例をあげると，すべてのイデアルIについて等式 $I = I^*$ が成立するとき，環RはF-regularであるということにすれば，この意味でのF-regularityはregularityの自然な拡張であって，normarityとCohen-Macaulay性を保証するのみでなく，直和因子に遺伝される。

従がって、正則環の直和因子であるような環が、Cohen-Macaulay であることの単純で明快な証明が得られる。また、I^* はRのイデアルであって $\overline{I} \supset I^* \supset I$ を満たすが、ここで n を I の生成元の個数とすると、$\overline{I^n} \subset I^*$ が成り立つので、F-regular な環内では、Briançon-Skoda の定理、

$$\overline{I^n} \subset I$$

が自然に成立する、などがそれである。（ここで $\overline{I}$ は I の整閉包を表わす）

Tight closure は、標数0の体上でも定義され、重要な応用をもつことが [HH] 内に予告されている。一方で、理論の基礎的な部分に、解決しておいた方がよいと思われる問題も多少残されているように思われる。

この講演では [HH] に触発されたそのような問題の1つとして、Rが極大イデアル m をもつ局所環の場合に、m-準素イデアル I に対して 関数 $l_R(I^*/I)$ が、どのような振舞いをするかを調べたい。包含関係 $\overline{I} \supset I^* \supset I$ より $l_R(\overline{I}/I) \geqq l_R(I^*/I)$ なので、長さ $l_R(\overline{I}/I)$ の評価がこの問題に対し、手がかりを与えることが予想されるし、また単に "m-準素イデアル" というだけでなく、"パラメーターイデアル" に限って $l_R(I^*/I)$ を調べることも、十分に興味深

いと思われる。

結果を述べる前に、次の定義を与えておく。

定義 (1.1). 極大イデアル $\mathfrak{m}$ をもつ局所環 R に対して、

$$t(R) := \sup\{\, l_R(I^*/I) \mid I \text{ は } R \text{ の } \mathfrak{m}\text{-準素イデアル} \,\}$$

$$i(R) := \sup\{\, l_R(\bar{I}/I) \mid I \text{ は } R \text{ の } \mathfrak{m}\text{-準素イデアル} \,\}$$

$$s(R) := \sup\{\, l_R(I^*/I) \mid I \text{ は } R \text{ のパラメーターイデアル} \,\}$$

とおく。

上の記号のもとに、我々の問題は、いかに $t(R)$ を評価するかであって、本講演の主結果は次のように述べることができる；

定理 (1.2). R は極大イデアル $\mathfrak{m}$ をもつ1次元 Noether 局所環で、正標数の体を含むものと仮定し、$N = \sqrt{(0)}$, $S = R/N$ とおき、$\bar{S}$ によって S の正規化を表わすことにする。このとき、等式

$$t(R) = i(R) = l_S(\bar{S}/S) + l_R(N)$$

が成立する。

この定理の証明は、第2節で与えるが、局所環の次元が2以上の場合には　$i(R) = \infty$　(cf. (3.1))

であるので、(1.2) における等式 $i(R)=t(R)$ は、一般にはもはや成立しない。また、$t(R)$ の有限性よりは少し弱い、$s(R)$ の有限性は、"環のtest ideal" の大きさによって定まると思われる。この点についてRが Gorenstein の場合に、次る節で少し触れてみたい。

以下、Rは極大イデアル $\mathfrak{m}$ をもつ Noether 局所環で、正標数 p の体を含むものとする。

末尾になりましたが、この研究の遂行にあたり、後藤四郎先生と渡辺敬一先生とから、多大の助言を頂いたことを記して、感謝の言葉にかえさせて頂きます。

2. 定理 (1.2) の証明

この節では $\dim R = 1$ と仮定し、(1.2) のごとく $N=\sqrt{(0)}$ $S = R/N$ とおき、$\overline{S}$ によって S の正規化を表わす。

まず環が、被約の場合から考えることにする。

<u>命題 (2.1).</u> $t(S) = i(S) = l_S(\overline{S}/S)$

証明) 前節で述べたように、不等式 $t(R) \leqq i(R)$ は常

に成立している。

始めに、$i(S) \leqq l_S(\bar{S}/S)$ を示そう。

S の極大イデアルを $\mathfrak{M}$ とおき、J を $\mathfrak{M}$-準素イデアルとする、X を S 上の不定元として、$T = S[X]_{\mathfrak{M}\cdot S[X]}$ とおくと、

$$\bar{J}\cdot T \subseteqq \overline{J\cdot T} \quad \text{であって} \quad \bar{T} = T \otimes_S \bar{S}$$

であるから、

$$l_T(\overline{J\cdot T}/J\cdot T) \geqq l_T(\bar{J}\cdot T/J\cdot T) = l_S(\bar{J}/J) \quad \text{と} \quad l_T(\bar{T}/T) = l_S(\bar{S}/S)$$

を得る。

このことから、$i(S) \leqq l_S(\bar{S}/S)$ を示すためには、$i(T) \leqq l_T(\bar{T}/T)$ を示せば十分だから、

一般性を失わずに、剰余体 $S/\mathfrak{M}$ は無限体と仮定してよい。

よって、$b \in J$ を等式 $\bar{J} = \overline{bS}$ が成立するように選ぶことができる。

このとき b は S-正則であるから

$$bS \subset \bar{J} = \overline{bS} = b\bar{S} \cap S$$

従がって、

$$l_S(\bar{J}/J) \leqq l_S(\overline{bS}/bS) \leqq l_S(b\cdot\bar{S}/bS) = l_S(\bar{S}/S)$$

が示される。

次に $l_S(\bar{S}/S) \leqq t(S)$ を示そう。

もし、$l_S(\bar{S}/S) = \infty$ なら、$\bar{S}$ は S-加群として有限生成でないので、$\bar{S}$ の元の列 $a_1, a_2, \ldots$ をとって、

$S_n = S[a_1, \cdots, a_n]$ とするとき

$S_n \subsetneqq S_{n+1} \quad (n \geqq 1)$ であるようにとれる。

ここで，$\mathfrak{a}_n := [S : S_n]$ とおいて，$b_n \in \mathfrak{a}_n$ を S-正則元としてとれば，

$$\overline{b_n S} = b_n \overline{S} \cap S \supset b_n S_n \supset b_n S$$

従がって，

$$l_S\left(\overline{b_n S}/b_n S\right) \geqq l_S\left(b_n S_n / b_n S\right) = l_S\left(S_n / S\right) \geqq n$$

一方，$(b_n S)^* = \overline{(b_n S)}$ [HH; Corollary 5.8]

であるから，$t(R) \geqq n$．故に $t(R) = \infty$ を得て，命題の等式は無限大で成立する。

$l_S(\overline{S}/S) < \infty$ を仮定し，$b \in [S : \overline{S}]$ を S-正則にとると，$(bS)^* = \overline{(bS)} = b\overline{S} \cap S = b \cdot \overline{S}$

であるから，$l_S\left((bS)^*/bS\right) = l_S\left(b \cdot \overline{S}/b \cdot S\right) = l_S\left(\overline{S}/S\right)$

従がって，$l_S\left(\overline{S}/S\right) \leqq t(S)$

以上により $t(S) = i(S) = l_S(\overline{S}/S)$ が示された。

<u>補題(2.2)</u> $t(R) \geqq t(S)$

証明) I を R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルで $I \supset N$ となるものとし，$J = I/N$ とおくと，$J^* = I^*/N$ である [HH; Proposition 4.1]

従がって、 $l_S\left(J^*/J\right) = l_R\left(I^*/I\right) \leqq t(R)$

故に $t(S) \leqq t(R)$

補題 (2.3) $l_R(N)=\infty$ ならば $t(R)=\infty$

証明) $t(R)<\infty$ を仮定して、 $\dim_R N = 0$ を示そう。

今、$a\in\mathfrak{m}$ を $\dim R/aR = 0$、自然数 n に対し $I_n = a^n R$

とおく。すると $I_n^* = (I_n+N)^*$ であるから、

$$l_R\left(I_n^*/I_n\right) = l_R\left((I_n+N)^*/I_n+N\right) + l_R\left(I_n+N/I_n\right)$$

よって $\sup_{n\geqq 1} l_R\left(I_n+N/N\right) \leqq t(R) < \infty$

一方、 $I_n+N/N \cong N/I_n\cap N$ であって、a^n が S − 正則で

あることから、 $I_n\cap N = I_n N$

従がって、 $\sup l_R\left(N/a^n N\right) < \infty$ より $\dim_R N \neq 1$

定理 (1.2) の証明

(2.1), (2.2) 及び (2.3) とにより、 $l_S\left(\bar{S}/S\right)<\infty$, $l_R(N)<\infty$

と仮定して、定理の等式を示せば十分である。

そこで、R の $\mathfrak{m}$ − 準素イデアル I に対し $J = I+N/N$ とお

く。このとき; $(I+N)^* = I^*$ であって $\left(I+N/N\right)^* = I^*/N$

であるから

$$l_R\left(I^*/I\right) = l_R\left((I+N)^*/I\right)$$

$$= l_R\left((I+N)^*/I+N\right) + l_R\left(I+N/N\right)$$
$$= l_S\left(J^*/J\right) + l_R\left(N/I\cap N\right)$$
$$\leqq t(S) + l_R(N)$$
$$= l_S\left(\bar{S}/S\right) + l_R(N)$$

故に、 $t(R) \leqq l_S(\bar{S}/S) + l_R(N)$ を得るが、

上で、tight closure を整閉包におきかえることによって、

$$i(R) \leqq l_S\left(\bar{S}/S\right) + l_R(N)$$

が得られる。

一方、 $l_S(\bar{S}/S) < \infty$ と $l_R(N) < \infty$ の仮定より、

$a \in M$ を $\dim R/aR = 0$, かつ $a\bar{S} \subset S$ であり、 $aN = (0)$ であるように選べる。 このとき $aR \cap N = (0)$ となっている。

そこで、 $I = aR$ とすれば $J = aS$ であり a は S-正則であるから、 $l_S(J^*/J) = l_S(\bar{S}/S)$ がいえる。

また、 $l_R(N) = l_R(N/I\cap N)$ となっているから、

$$l_R\left(I^*/I\right) = l_S\left(J^*/J\right) + l_R\left(N/I\cap N\right)$$
$$= l_S\left(\bar{S}/S\right) + l_R(N)$$

故に、 $t(R) \geqq l_S(\bar{S}/S) + l_R(N)$

となって、定理(1.2)の等式が得られた。

$t(R)$ の計算を実行することは、原理的には容易である。但し、1次元の局所整域で $l_R(\bar{R}/R) = \infty$ のもの[永田; Apendix

Example 3] が存在するので、$t(R)$ の値は有限とは限らないことに注意しておく。なお、$t(R)<\infty$ の例としては

例 (2.4). $k[[X,Y]]$ は正標数の体上の2変数巾級数環とし、$R = k[[X,Y]]/XY\cdot(X,Y)$ とすると $t(R)=3$、
実際、$N=(x\cdot y)R$ であるから $l_R(N)=1$、一方 $R/N \cong k[[X,Y]]/(X)\cap(Y)$ であるから、$l_{\bar{R}}(\bar{R}/R)=2$、従がって (1.2) より $t(R)=3$ となる。

3. $\dim R \geqq 2$ の場合について

$\dim R \geqq 2$ ならば、$i(R)=\infty$ である。

命題 (3.1) $d=\dim R \geqq 2$ の局所環 R のパラメーター系を $a_1,\cdots,a_d$ とする。このとき、自然数 n に対して $I_n=(a_1^n,\cdots,a_d^n)R$ とおくと

$$l_R\left(\overline{I_n}/I_n\right) \geqq \binom{d+n-1}{d-1}-d$$

従がって、$i(R)=\infty$

証明) $I=I_1$ として $\overline{I_n} \supset I^n \supset I_n$ であり、$\mathfrak{M}$ を R の極大イデアルとすれば、

$$\begin{aligned}
l_R(\overline{I_n}/I_n) &\geq l_R(I^n/I_n) \\
&\geqq l_R(I^n/\mathfrak{m}I^n+I_n) \\
&= l_R(I^n/\mathfrak{m}I^n) - l_R(\mathfrak{m}I^n+I_n/\mathfrak{m}I^n) \\
&= l_R(I^n/\mathfrak{m}I^n) - l_R(I_n/\mathfrak{m}I^n\cap I_n) \\
&\geqq l_R(I^n/\mathfrak{m}I^n) - l_R(I_n/\mathfrak{m}I_n)
\end{aligned}$$

パラメーター系は解析的に独立であるから

$$l_R(I^n/\mathfrak{m}I^n) = \binom{d+n-1}{d-1}$$

故に

$$l_R(\overline{I_n}/I_n) \geq \binom{d+n-1}{d-1} - d$$

この (3.1) より、$\dim R \geqq 2$ のときは、$i(R)$ は $t(R)$ の有限性に何も寄与しないことがわかる。実際, [HH; Proposition 4.4] によると、R が F-regular であることと $t(R)=0$ とは同値であるが、$\dim R \geqq 2$ なら、この場合にも $i(R)=\infty$ となっている。

$\dim R \geqq 2$ で $0 < t(R) < \infty$ となる例を1つあげておく。

<u>例 (3.2).</u> 正標数をもつ体 k 上の巾級数環 $P = k[[X_1, \cdots, X_n]]$ $(n \geqq 3)$ に対して

$$R = P/(X_1)\cap(X_2,\cdots,X_n)$$

とおくと、$t(R) = 1$ である。

証明） $\underline{R}$ の元 X_i の R での像を x_i とし、R の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする。 R の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対し，剰余環 $A = R/x_1R$ は正則環なので、 $(IA)^* = IA$． [HH; Theorem 4.4]

従がって，
$$I \subset I^* \subset I + x_1R$$
を得る。

故に，
$$I^*/I \subset I+x_1R/I \cong x_1R/I \cap x_1R \cong x_1R/x_1\cdot[I : x_1]$$

ここで，$[0 : x_1] = (x_2, \cdots, x_n)R$ であり，

剰余環 $S = R/(x_2, \cdots, x_d)R$ ，S のイデアル $J = [I : x_1]\cdot S$ とおけば
$$x_1R/x_1[I : x_1] \cong R/[I : x_1] + (x_2, \cdots, x_d) \cong S/JS$$

$\dim S/JS = 0$ で S の極大イデアルは単項生成なので S/JS は Artin Gorenstein 局所環である。

一方，R の正規化は，$\overline{R} = k[[X_1]] \times k[[X_2, \cdots, X_d]]$ となり，$[R : \overline{R}] = \mathfrak{m}$ である。

このとき、R のイデアル I に対して $\mathfrak{m}\cdot I^* \subset I$ が成り立つ。 実際， $\mathfrak{m}$ は $\overline{R}$ のイデアルでもあり，$\overline{R}$ は正則環なので，
$$\mathfrak{m} I^* = \mathfrak{m} I^* \cdot \overline{R} \subset \mathfrak{m} (I\overline{R})^* = \mathfrak{m}\cdot I\overline{R} = \mathfrak{m} I \subset I.$$
ここで2番目の包含は [HH; lemma 4.11] による。

故に，
$$I^*/I \subset \mathrm{Socle}(S/JS)$$
従がって，
$$\ell_R(I^*/I) \leq \dim \mathrm{Socle}(S/JS) = 1$$

これより、 $t(R) \leqq 1$ を得るが、 Rは normal でないので F-regular でない。 [HH; Corollary 5.10]
故に、 $t(R) = 1$.

<u>例(3.3).</u> 正標数をもつ体 k 上の2変数巾級数環 $S = k[[X,Y]]$ に対し、 $R = k + (X^2, XY, Y^2)$ とおくと、 $S = \overline{R}$ で Rは2次元 Buchsbaum 環となる。この例では、 $s(R) = 4$, $t(R) = \infty$ である。 [中村; §2]
また、 $s(R) < \infty$, $\dim R \geqq 2$ の Cohen-Macaulay 環は normal である。 [中村; §2]

$s(R)$の有限性は、test ideal の大きさで定まると思われる。より詳しくは [中村; §4] で述べることにし、ここでは次の(3.5)を記すにとどめたい。
定義が必要である。

<u>定義(3.4)</u> $c \in R^\circ$ が Rの test element であるとは、すべてのRのイデアル I と、元 $x \in I^*$ とに対して、 $cx^{p^e} \in (a^{p^e} \mid a \in I)R$ が任意の $e \geqq 1$ に対して成立することという。
Rの test element 全体で生成されたイデアルを、Rの test ideal という。

$\mathfrak{a}$をRのtest idealとすると，すべてのRのイデアルIに対して，$\mathfrak{a}I^* \subset I$である。

定理(3.5). Rは正標数の体を含み，極大イデアル$\mathfrak{m}$をもつGorenstein局所環であって，Rのtest idealは$\mathfrak{m}$-準素イデアルになっていると仮定する。

このとき，$s(R) < \infty$である。

証明) $I = (a_1, \cdots, a_d)R$をRのパラメーターイデアルとし，$E = E_R(R/\mathfrak{m})$を$R/\mathfrak{m}$のinjective hullとする。

RはGorensteinなので

$$E = \varinjlim_n R/(a_1^n, \cdots, a_d^n)R \qquad [G; \text{Proposition } 4.14]$$

となる。

$\mathfrak{a}$をRのtest idealとして，$f : R/I \longrightarrow E$を自然な射とすると，fは単射で，$\mathfrak{a} \cdot (I^*/I) = (0)$であるから，

$$I^*/I \subset [0 \underset{E}{:} \mathfrak{a}] \cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, E)$$

となる。また，$l_R(\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, E)) = l_R(R/\mathfrak{a})$

であるから，$l_R(I^*/I) \leqq l_R(R/\mathfrak{a})$

すなわち，$s(R) < \infty$を得る。

(3.5)は逆も正しい。すなわち，Gorenstein局所環Rにお

いて、$s(R) < \infty$ であれば test ideal は、極大イデアルの巾を含む。この命題の証明とその応用とは [中村；§4] で述べることにしたい。

参考文献

[HH]: M. Hochster and C. Huneke, Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem I, preprint.

[G]: A. Grothendieck, Local cohomology, Lecture notes in Math. No. 41, Springer-Verlag, Heidelberg, 1967.

[中村]: Y. Nakamura, 長さ $l_R(I^*/I)$ の評価について — II, 第11回可換環論シンポジウム報告集, 1989.

[永田]: M. Nagata, Local rings, Interscience, New York, 1972.