数理解析研究所講究録
第713巻 1990年 67-78

On singularities arising from the minimal section of ruled surfaces.

(Gorenstein性とFrobenius写像の関係)

専修大学北海道短大 日高文夫 (Fumio Hidaka)
筑波大学 数学系 泊昌孝 (Masataka Tomari)

§1 Notations

本稿では以下のものを固定する。

k : 代数的閉体, $\mathrm{ch}(k) = p \geqq 0$.

A : 非特異射影曲線, genus $g \geqq 2$ $/k$.

$\mathcal{L}$: line bundle $/A$, $\deg \mathcal{L} > 0$.

$$(\xi) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow 0 .$$

この extension は extension class $\xi \in H^1(A, \mathcal{L})$ で定まっているものとする。

$X := \mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n \geqq 0} S^n(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} A$ $\mathcal{E}$ による $\mathbb{P}^1$-bundle.

exact sequence (ξ) は X / A に section を定める

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\subset"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ & A \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

これを再び A とおくことにすると

$\mathcal{O}_X(A) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{L}^{-1}$ となる。

deg $\mathcal{L}>0$ であったので A は X 内で contraction をもつ.

$$\begin{tikzcd} A \subset X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & W \ni w \\ A \end{tikzcd}$$

即ち, φ は proper, W は normal variety, $\varphi(A)=\{w\}$ (一点)

$X \setminus A \xrightarrow{\sim} W \setminus w$.

本稿ではここで登場した特異点 (W, w) の Gorenstein 性について考えることとする. 詳しい証明については [HT] 参照の事.

§2 Facts

$\xi=0$ のとき, 即ち $\mathcal{E}=\mathcal{O}_A\oplus\mathcal{L}^{-1}$ と分解するとき, W は自然に $\operatorname{Spec}\bigoplus_{n\geq 0}\Gamma(A,\mathcal{L}^n)$ の projective closure であるが.

<u>Fact</u> 1 [H] $\xi\neq 0$ のとき

1) $ch(k)=0 \Rightarrow W$ は non-algebraic.

(このとき w のまわりに affine 近傍が存在しない)

2) $ch(k)=p>0 \Rightarrow W$ は projective.

$\xi=0$ のときの (W, w) の Gorenstein 性については

<u>Fact</u> 2 [GW]

(W, w) : Gorenstein $\Longleftrightarrow \exists a>0$ s.t. $K_A \simeq \mathcal{L}^a$

ここで K_A は A の canonical sheaf.

§3 $\xi \neq 0$ の case について.

まず $\xi \in H^1(A, \mathcal{L})$ であることより $0 < \deg \mathcal{L} \leqq 2g-2$ である.

前節の Fact 2 に関連して $\xi \neq 0$ でも次がいえる.

<u>Lemma</u> 3 (W, w): Gorenstein $\Longrightarrow \exists a>0$ s.t $K_A \simeq \mathcal{L}^a$.

proof) (W, w) が Gorenstein とすると w のまわりに十分小さな近傍 W^0 をとり $\omega_{W^0} \cong \mathcal{O}_{W^0}$ と出来る。 $X^0 := \varphi^{-1}(W^0)$ とすると

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \xrightarrow{\varphi} & W^0 \\ \cup & & \Psi \\ A & \longrightarrow & w \end{array}, \quad X^0 \setminus A \xrightarrow{\sim} W^0 \setminus w \text{ より}$$

$$\omega_{X^0} \cong \mathcal{O}_{X^0}(mA).$$

X^0 上での adjunction formula により

$$K_A \simeq (\omega_{X^0} \otimes \mathcal{O}(A)) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{L}^{-(m+1)} \qquad \text{q.e.d.}$$

したがって，以下 $\mathcal{L}$ について次を仮定する。

(仮定)： $\exists a>0$ s.t $K_A \simeq \mathcal{L}^a$

Fact 2 に関連して我々の得た結果は

<u>Theorem</u> 4 [HT] $\xi \neq 0$ のとき

1) $ch(k)=0$ のとき (W, w): Gorenstein $\Longleftrightarrow \mathcal{L} \simeq K_A$

2) $ch(k)=p>0$ のとき (W, w): Gorenstein $\Longrightarrow p \mid a-1$

1) の略証) $\Longleftarrow$) $K_X \simeq \pi^*(K_A \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2A \sim -2A$ となり (W, w) の Gorenstein 性を得る. //

⇒) $\mathrm{Pic}\,X = \mathbb{Z}[A] \oplus \pi^* \mathrm{Pic}\,A$ なる記述で X 上の divisor D が $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_A \simeq \mathcal{O}_A \iff \exists d$ s.t. $D \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$ なる事がわかる。(ただし (W, w) Gorenstein とすると $\varphi^* \omega_W \sim d(A + \pi^*(\mathcal{L}))$ とかける。

X 上の exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A(-A) \longrightarrow \mathcal{O}_{2A} \longrightarrow \mathcal{O}_A \to 0$$

より

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_{2A}^* \longrightarrow \mathcal{O}_A^* \longrightarrow 1$$

を得るので次の diagram を得る

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^1(A, \mathcal{L}) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}\,2A & \longrightarrow & \mathrm{Pic}\,A \\ & & & \nwarrow & & \nearrow \\ & & A + \pi^*(\mathcal{L}) & \in & \mathrm{Pic}\,X & \end{array}$$

$A + \pi^*(\mathcal{L})|_A = 0$ より $A + \pi^*(\mathcal{L})|_{2A}$ は $H^1(A, \mathcal{L})$ の元から来ているが

$$A + \pi^*(\mathcal{L})|_{2A} = \mathrm{Im}(-\xi)$$

が証明出来る。(ただし

$$\varphi^* \omega_W|_{2A} = \mathrm{Im}(-d\xi)$$

となり $\mathrm{ch}(k) = 0$ より $d = 0$ でなければならない。

$\therefore \quad \varphi^* \omega_W \simeq \mathcal{O}_X$

$\therefore \quad K_X \simeq \mathcal{O}(mA)$ for some m

$\simeq \mathcal{O}(-(a+1)A)$ by adjunction formula

$\simeq \mathcal{O}(-2A)$ $K_X \cong \pi^*(K_A \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2A$ による

$\therefore \quad a = 1$ //

$\pi : X \to A$ の fibre を f とかくことにする。 2) の証明のために

<u>Fact</u> 5 [H] X 上の effective divisor D が $D \cap A = \phi$ とすると

① $ch(k) = 0 \Longrightarrow D = 0$

② $ch(k) = p > 0 \Longrightarrow p \mid (D.f)$

証 2) W は projective Gorenstein variety であるから $\omega_W \simeq \mathcal{O}_W(D_1 - D_2)$ とおける。 ここで D_1, D_2 は effective divisor で $D_i \not\ni w$ ととることができる。 $X \setminus A \overset{\psi}{\simeq} W \setminus w$ であるから $\psi^{-1}(D_i) \simeq D_i$ であるので

$$K_X \simeq \mathcal{O}_X(D_1 - D_2 + mA) \qquad D_i \cap A = \phi$$

ここで $A \subset X$ で adjunction formula をみると

$$K_X \simeq \mathcal{O}_X(D_1 - D_2 - (a+1)A) \text{ となる。}$$

$$\therefore\ -2 = K_X . f = pe_1 - pe_2 - a - 1 \quad (\because \text{Fact 5 の②})$$

$$\therefore\ a - 1 = p(e_1 - e_2)$$

//

§4 $ch(k) = p > 0$, $\xi \neq 0$ の case について

$ch(k) = p > 0$ の場合の $(W.w)$ の Gorenstein 性の必要十分条件は次の結果である。

<u>Proposition 6</u>　$ch(k)=p>0$, $\xi \neq 0$ とする.

(W, ω) : Gorenstein

$\Updownarrow$

① $K_A \simeq \mathcal{L}^a$ for some a

② $a-1 = p^m q$　$(p, q)=1$ とおける.

③ $\exists$ divisor $D \subset X$ s.t. $|D| \cap A = \phi$ and

$$D \sim p^m (A + \pi^*(\mathcal{L}))$$

proof) $\Uparrow$)

$$
\begin{aligned}
K_X &\simeq \pi^*(K_A \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2A \\
&\sim \pi^*(\mathcal{L}^{p^m q}) - 2A \\
&= q\{p^m(A+\pi^*(\mathcal{L}))\} - (p^m q + 2)A \\
&\sim qD - (a+1)A
\end{aligned}
$$

//

$\Downarrow$) ① は lemma 3, ② は Theorem 4 の 2) で既に示した。

③について. (W, ω) は projective Gorenstein variety である

ので　$\omega_W \simeq \mathcal{O}_W(D)$ とおける. ここで $\omega \notin D$ ととる

ことが出来る。 $\varphi^{-1}(D) \simeq D$ であるから

$$K_X \simeq D - (a+1)A \qquad \text{(adjunction formula による)}$$

一方

$$
\begin{aligned}
K_X &\sim \pi^*(K_A \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2A \\
&\sim \pi^*(\mathcal{L}^{a-1}) - 2A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore D &\sim \pi^*(\mathcal{L}^{a-1}) + (a-1)A \\
&= q\{p^m(A+\pi^*(\mathcal{L}))\}
\end{aligned}
$$

ここで A 上の Frobenius mapping を Frob とかくと

$$\mathrm{Frob}^N : H^1(A, \mathcal{L}) \longrightarrow H^1(A, \mathcal{L}^{p^N})$$

がきまる。 $\deg \mathcal{L} > 0$ より十分大きな N をとれば

$\mathrm{Frob}^N(\xi) = 0$ である。この N に対し、 X_N を次の fibre product で定める；

$$\begin{tikzcd} X_N \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{Frob}^N"'] & A \end{tikzcd}.$$

すると $X_N = \mathbb{P}((\mathrm{Frob}^N)^*(\mathcal{E}))$ であるが

$$(\mathrm{Frob}^N(\xi)) : 0 \to \mathcal{O}_A \to (\mathrm{Frob}^N)^*(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{L}^{-p^N} \to 0$$

は split するので X_N 上に2つの disjoint section A_0, A_∞ が存在する。 A_0 を negative section とすると

$$g(A_0) = A \subset X \quad である。$$

一方 $D_N := g(A_\infty)_{red}$ と定めると Fact 5 により $(D_N \cdot f) = p^{N'}$ となる。ここで一般には $N \geqq N'$.

$(p, g) = 1$ より

$$\beta p^{N'} + \gamma(a-1) = p^m$$

なる (β, γ) がとれるから

$$\beta D_N + \gamma D$$

が求める divisor である。 //

<u>Corollary</u> 7 $ch(k) = p > 0$, $\xi \neq 0$,

$K_A \sim \mathcal{L}^a$, $a - 1 = p^m q$ $(p, q) = 1$ とする.

If $\mathrm{Frob}^m(\xi) = 0$ in $H^1(A, \mathcal{L}^{p^m})$

$\Downarrow$ (W, w) : Gorenstein.

proof) Proposition 6 の証明と同様に $X_m = \mathbb{P}((\mathrm{Frob}^m)^*(\mathcal{E}))$ 内に 2つの disjoint section があるが, その positive section A_∞ を用い $D = g(A_\infty)_{red}$ とおけば Prop. 6 の ③ を満す. //

§5 Examples

Corollary 7 を用いると様々な新しい4次元の Gorenstein singularity の例を作ることが出来る。

<u>Example</u> 1 $ch(k) = p = 3$, $g(A) = 3$, $a = 4$ の例.

A 上の一点 P が $4P \sim K_A$ と仮定する。

このとき $\mathcal{L} := \mathcal{O}_A(P)$ とおくと

$$\mathrm{Frob} : H^1(A, \mathcal{L}) \longrightarrow H^1(A, \mathcal{L}^3)$$

$\dim H^1(A, \mathcal{L}) = 2$, $\dim H^1(A, \mathcal{L}^3) = 1$ であるから

$0 \neq \xi \in \mathrm{Ker\ Frob}$ ととれば Cor. 7 により (W, w) は Gorenstein となる。

さらに具体的に例を構成する。

Example 2 ($p=3$, $g=3$, $a=4$)

weighted projective space $\mathbb{P}(1,3,4) = \mathrm{Proj}\, k[x,y,z]$

内の deg 12 の方程式

$$f = -z^3 + x^{12} + y^4 + x^5yz$$

によって定まる projective curve を $A = \mathrm{Proj}\, k[x,y,z]/f$

とおく。 この A は non-singular で $g(A)=3$.

$R = k[x,y,z]/f$ とおくと、

$R/Rx \cong k[y,z]/y^4 - z^3$ domain であるから

$V_+(x) = P \in A$ 一点を定め、

$$\omega_A \simeq \mathcal{O}_A(4P) \text{ である。}$$

ここで $\mathcal{L} := \mathcal{O}_A(P)$ とおく。

Example 1 に従って $H^1(A, \mathcal{L})$ 上の Frobenius action を具体的に記述する。

座標 x を用いて

$$R = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(A, \mathcal{O}(nP))\, x^n$$

とかけるから

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^1(A, \mathcal{O}(nP))\, x^n \simeq H^2_{R_+}(R)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(R/(x^{3t}, y^t)\right)[6t]$$

ここでこの limit は

$$\begin{array}{ccc} (R/(x^{3t},\ y^{t}))[6t] & \longrightarrow & (R/(x^{3(t+1)},\ y^{(t+1)}))[6(t+1)] \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \alpha & \longmapsto & x^3y\cdot\alpha \end{array}$$

によって定まる。 R は Cohen Macauley であるのでこれは injective system となっている。また次元の比較により

$$\bigoplus_{n\geqq -1}\left(\left(R/(x^6,y^2)\right)[12]\right)_n \cong \bigoplus_{n\geqq -1} H^1(A,\ \mathcal{O}_A(nP))\,x^n$$

が示される。そこで具体的に cohomology の基底を記述する。

n	$R_n = H^0(\mathcal{O}_A(nP))\,x^n$	$((R/(x^6,y^2))[12])_n = H^1(\mathcal{O}_A(nP))\,x^n$
0	1	$xyz^2,\quad x^4z^2,\quad x^5yz$
1	x	$x^2yz^2,\quad x^5z^2$
2	x^2	x^3yz^2
3	$x^3,\ y$	x^4yz^2
4	$x^4,\ xy,\ z$	x^5yz^2

ここで $\zeta = x^2yz^2,\quad \zeta' = x^5z^2 \in H^1(A,\mathcal{L})x$

とおく。

Frobenius action は

$$\begin{tikzcd} \left(\left(R/(x^6, y^2)\right)[12]\right)_1 \arrow[r, "F^*"] \arrow[dr, "\mathrm{Frob}"'] & \left(\left(R/(x^{18}, y^6)\right)[36]\right)_3 \\ & \left(\left(R/(x^6, y^2)\right)[12]\right)_3 \arrow[u, "\cdot x^{12}y^4"'] \end{tikzcd}$$

「例えば ζ については

$(x^2yz^2)^3$ を $R/(x^{18}, y^6)[36]$ の内で

$z^3 = x^{12} + y^4 + x^5yz$ を用いて展開すると

$F^*(\zeta) = x^{16}y^5z^2$

$\therefore \mathrm{Frob}(\zeta) = x^4yz^2 \neq 0$ 」

「同様に ζ' について計算すると

$F^*(\zeta') = 0$

$\therefore \mathrm{Frob}(\zeta') = 0$ 」

したがって $\xi = \zeta'$ ととれば Cor. 7 により (W, ω) は Gorenstein となる，ところが．

<u>Proposition</u> 8.

$\xi = \zeta$ のとき (W, ω) は Gorenstein.

証明には [TW] の injective criteria を用いる。

以上の様に (W, w) の Gorenstein 性については Frobenius mapping のみでは把握が出来ないものの 例の構成には有用である。

References

[GW] S. Goto, K-i. Watanabe, On graded rings I. J. Math. Soc. Japan, 30 (1978) 179 – 213

[H] F. Hidaka, Normal surface singularities associated to ruled surfaces. Proc. of Symp. "Commutative Rings" No.7 (1985) 145 – 159

[HT] F. Hidaka, M. Tomari, On singularities arising from the contraction of the minimal section of a ruled surface. Manuscripta Math. 65 (1989) 329 – 347

[TW] M. Tomari, K-i. Watanabe, Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with star-shaped resolution. Publ. RIMS Kyoto Univ. 25 no 5 (1989)

(日高 記)