数理解析研究所講究録
第713巻 1990年 79-94

Artin-Schreier coverings of algebraic surfaces

阪大理　武田　好史 (Yoshifumi Takeda)

Kを標数$p>0$の体とし、Lをその拡大体とする。拡大L/KがGalois拡大でそのGalois群がp次巡回群に同型であるとき、L/KはArtin-Schreier拡大であるという。このときLはKの単純拡大$L=K(\xi)$でその関係式は$\xi^p-\xi=f$ $(f\in K)$と与えられることが知られている。Artin-Schreier拡大の興味ある事実として次のものがある。kを正標数pの代数的閉体としてk上のアフィン空間$\mathbb{A}^n_k=\mathrm{Spec}\,k[x_1,\ldots,x_n]$及びアフィン多様体$X=\mathrm{Spec}\,k[x_1,\ldots,x_n,\xi]/(\xi^p-\xi-f)$, $(f\in k[x_1,\ldots,x_n])$を考える。$\xi^p-\xi-f$が既約となるようにfをとれば、関数体の拡大$k(X)/k(\mathbb{A}^n)$はArtin-Schreier拡大であり、射影$\pi: X\to\mathbb{A}^n$はp次のエタールな有限射となる。すなわち、アフィン空間の基本群の自明でない元の関数体の拡大の1つの例がArtin-Schreier拡大である。

以下では、正標数pの代数的閉体kを基礎体とする。

Xをk上の非特異代数曲面とし、Yを正規代数曲面とする。

定義. YからXの上への有限射$\pi: Y \to X$がArtin-Schreier被覆(以下AS被覆と略称する)とは、関数体の拡大$k(Y)/k(X)$がArtin-Schreier拡大のときにいう。

AS被覆に関して次の問題が考えられる。

問題. $\pi: Y \to X$がAS被覆であるとき、Xのアフィン開被覆$\{U_\lambda\}$と元$a_\lambda, t_\lambda \in \mathcal{O}_X(U_\lambda)$が存在して、$\pi^{-1}(U_\lambda) = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(U_\lambda)[\xi_\lambda]/(\xi_\lambda{}^p - a_\lambda{}^{p-1}\xi_\lambda - t_\lambda)$と表せるか?

答え. $p=2$では正しいが、$p \geqq 3$では反例がある。

本稿では、$p \geqq 3$でも上の問題が肯定的であるようなAS被覆のクラスとして単純型AS被覆を定義し、その性質を調べ、さらに無限遠直線で分岐しているアフィン平面の一般のAS被覆を調べることを目標とする。

§1. 単純型Artin-Schreier被覆

ＡＳ被覆$\pi: Y \to X$に関して基本的な次の補題がある。

補題1.1. $\pi_* \mathcal{O}_Y$には$\mathrm{Gal}(k(Y)/k(X))$の作用からきまる次の自然なフィルトレーションがある：

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p-1} = \pi_* \mathcal{O}_Y$$

s.t. (1) 各$\mathcal{F}_i$は階数$i+1$の局所自由$\mathcal{O}_X$-加群である。

(2) $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0$は可逆層で、$\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ $(1 \leqq i \leqq p-1)$は階数1のトーションフリーな層である。

証明. まず局所的に考える。Xのアフィン開部分集合$U=\mathrm{Spec}R$をとり、$\pi^{-1}(U) = \mathrm{Spec}A \subset Y$とする。また$G=\mathrm{Gal}(k(Y)/k(X))$を群スキーム$G=\mathrm{Spec}\,k[z]$として表す。ここで$z^p=z$であり、Gの群構造は、余積$\Delta(z)=z\otimes 1+1\otimes z$，余単位元$\varepsilon(z)=0$で与えられているとする。$\pi^{-1}(U)$はG-安定であるからその余作用$\sigma: A \to A[z]$がある。$a \in A$に対して$\sigma(a)=\sigma_0(a)+\sigma_1(a)z+\cdots+\sigma_{p-1}(a)z^{p-1}$と書くとき、$(1\otimes\varepsilon)\sigma = id_A$及び$(\sigma\otimes 1)\sigma=(1\otimes\Delta)\sigma$が成立することから計算により、$\sigma_0=id_A$，$\sigma_i=(1/i!)\delta^i$ $(1\leqq i\leqq p-1)$が得られる。ここで$\delta=\sigma_1$である。AのR-部分加群F_i $(0\leqq i\leqq p-1)$を$F_i=\{a\in A \mid \delta^{i+1}(a)=0\}$で定義する。Gの

Aへの作用が自明でないことから$\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}_{i-1}$がわかる。また$\mathcal{F}_i \subset A$であるから$\mathcal{F}_i$はトーションフリーであることがわかる。さらに、$\sigma$により$\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$は$(A+Az+\cdots+Az^i)/(A+Az+\cdots+Az^{i-1}) \cong A$の部分加群とみることができるから、$\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$もトーションフリーである。各$\mathcal{F}_i$を層化してはり合せてできたX上の連接層を$\mathcal{F}_i$とすると、$\pi_*\mathcal{O}_Y$のフィルトレーション$\mathcal{O}_X=\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p-1}=\pi_*\mathcal{O}_Y$が得られる。各$\mathcal{F}_i$の二重双対$\mathcal{F}_i^{\vee\vee}$を考えると、$\mathcal{O}_X=\mathcal{O}_X^{\vee\vee}=\mathcal{F}_0^{\vee\vee} \subset \mathcal{F}_1^{\vee\vee} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p-1}^{\vee\vee}=(\pi_*\mathcal{O}_Y)^{\vee\vee}$となる。一方YはCohen-Macaulayスキームであり、Xは正則であるからπは平坦射である。従って$\pi_*\mathcal{O}_Y$は局所自由な$\mathcal{O}_X$-加群となり$\pi_*\mathcal{O}_Y{}^{\vee\vee}=\pi_*\mathcal{O}_Y$がわかる。よって$\mathcal{F}_i^{\vee\vee}$は$\pi_*\mathcal{O}_Y$の部分層とみることができて、$\delta$は$\mathcal{F}_i^{\vee\vee}$に作用している。つまり$\delta^{i+1}$は$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee}, \pi_*\mathcal{O}_Y)$のX上の断面になっている。ここで$\mathcal{F}_i^{\vee\vee}$は局所自由$\mathcal{O}_X$-加群であるから$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee}, \pi_*\mathcal{O}_Y)$も局所自由$\mathcal{O}_X$-加群である。また$\mathcal{F}_i$はトーションフリーでXは正則であるから、$V = X - \mathrm{Supp}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee}/\mathcal{F}_i)$とすると$\mathrm{codim}\, V \geqq 2$となる。$\mathcal{F}_i$の定義により$\delta^{i+1}|_V=0$であるから、$\delta^{i+1}$はX上の$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee}, \pi_*\mathcal{O}_Y)$の断面として0、つまり$\delta^{i+1}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee})=0$である。従って$\mathcal{F}_i^{\vee\vee}=\mathcal{F}_i$となり$\mathcal{F}_i$は局所自由$\mathcal{O}_X$-加群であることがわかる。

最後に$\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0$が可逆層であることをみる。完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0 \longrightarrow 0$$

を考える。 各点 $P \in X$ に対して $\mathcal{F}_0 \otimes k(P)$ は $(\pi_* \mathcal{O}_Y) \otimes k(P)$ の単位元を含んでいるから $\mathcal{F}_0 \otimes k(P) \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes k(P)$ は単射である。従って $(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0) \otimes k(P)$ の階数は常に 1 となり、$\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0$ は可逆層であることがわかる。 （証明終り）

単純型ＡＳ被覆を次のように定義する。

<u>定義</u>. ＡＳ被覆 $\pi : Y \to X$ が単純型であるとは、補題1.1. のフィルトレーションで $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \cong (\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0)^{\otimes i}$ $(1 \leq i \leq p-1)$ が成り立つときにいう。

定義より、$p=2$ のときはＡＳ被覆はつねに単純型である。この単純型ＡＳ被覆については最初に述べた問題の答えは肯定的となる。 すなわち次の補題が成立する。

<u>補題</u> 1.2. 単純型ＡＳ被覆 $\pi : Y \to X$ に対して、X のアフィン開被覆 $\{U_\lambda\}$ と元 $s_\lambda, t_\lambda \in \mathcal{O}_X(U_\lambda)$ が存在して、

$$\pi^{-1}(U_\lambda) = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X(U_\lambda)[\xi_\lambda]/(\xi_\lambda^p - s_\lambda^{p-1}\xi_\lambda - t_\lambda)$$

と表せる。 さらにこのとき $\{s_\lambda\} \in H^0(X, \mathcal{L})$ となる。ただし $\mathcal{L} = (\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0)^{-1}$ である。

<u>証明.</u> X のアフィン開被覆 $\{U_\lambda\}$ を $\mathcal{L}|U_\lambda \cong \mathcal{O}_{U_\lambda}$ となるようにとる。元 $\xi_\lambda \in \mathcal{F}_1(U_\lambda)$ をその $\mathcal{L}^{-1}(U_\lambda)$ への像が $\mathcal{L}^{-1}|U_\lambda$ の生成元となるようにとる。このとき元 $s_\lambda \in \mathcal{O}_X(U_\lambda)$ が存在して $\sigma(\xi_\lambda) = \xi_\lambda + s_\lambda Z$ となる。ここで σ と Z は補題1.1の証明と同じものである。$\sigma(\xi_\lambda^p) = (\xi_\lambda + s_\lambda Z)^p = \xi_\lambda^p + s_\lambda^p Z$ であるから $\xi_\lambda^p \in \mathcal{F}_1(U_\lambda)$ となり、従って元 $s_\lambda', t_\lambda \in \mathcal{O}_X(U_\lambda)$ が存在して $\xi_\lambda^p = s_\lambda' \xi_\lambda + t_\lambda$ とできる。一方 $\pi: Y \to X$ が単純型であるという仮定により $\pi_* \mathcal{O}_Y|U_\lambda = \mathcal{O}_{U_\lambda} + \mathcal{O}_{U_\lambda}\xi_\lambda + \cdots + \mathcal{O}_{U_\lambda}\xi_\lambda^{p-1}$ となるから、$\pi^{-1}(U_\lambda) = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X(U_\lambda)[\xi_\lambda]/(\xi_\lambda^p - s_\lambda'\xi_\lambda - t_\lambda)$ であることがわかる。さらに $\sigma(\xi_\lambda^p) = \xi_\lambda^p + s_\lambda^p Z = \sigma(s_\lambda'\xi_\lambda + t_\lambda) = s_\lambda'(\xi_\lambda + s_\lambda Z) + t_\lambda$ であったから、$s_\lambda^p = s_\lambda' s_\lambda$ すなわち $s_\lambda' = s_\lambda^{p-1}$ がわかる。$\{\alpha_{\lambda\mu}\}$ を $\mathcal{L}$ の変換関数とすると、コサイクル $\{b_{\lambda\mu}\} \in H^1(X, \mathcal{L})$ が存在して、$U_\lambda \cap U_\mu$ 上 $\xi_\mu = \alpha_{\lambda\mu}\xi_\lambda + b_{\lambda\mu}$ となる。従って $\sigma(\xi_\mu) = \xi_\mu + s_\mu Z = \sigma(\alpha_{\lambda\mu}\xi_\lambda + b_{\lambda\mu}) = \alpha_{\lambda\mu}(\xi_\lambda + s_\lambda Z) + b_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda\mu}\xi_\lambda + \alpha_{\lambda\mu}s_\lambda Z + b_{\lambda\mu}$ これから $s_\mu = \alpha_{\lambda\mu}s_\lambda$ が得られる。

（証明終り）

<u>定義</u> 補題1.2の記号の下で、$\{s_\lambda\} \in H^0(X, \mathcal{L})$ に対応する非負因子を B と書き、π の分岐因子と呼ぶ。

単純型AS被覆については、そのいくつかの不変量を B

を用いて表すことができる。 たとえば次の補題は随伴公式及びRiemann-Rochの定理により容易に示される。

補題 1.3. $\pi: Y \to X$ を単純型AS被覆、Bをその分岐因子とすると次の公式が成りたつ：

(1) $K_Y = \pi^*(K_X + (p-1)B)$,

(2) $\chi(\mathcal{O}_Y) = p\left\{\chi(\mathcal{O}_X) + \frac{p-1}{4}(K_X, B) + \frac{(p-1)(2p-1)}{12}(B^2)\right\}$.

単純型AS被覆としてどのような曲面が構成できるかというのは興味ある問題の1つである。 これに関して次の結果がある。

定理 1.4. $\pi: Y \to X$ を単純型AS被覆、Bをその分岐因子とする。 Yが非特異曲面であり、Bが既約で豊富な因子であるとき、(X,Y)は次のように分類される。

(1) $p \geqq 5$ のとき、Yは常に極小な一般型代数曲面である。

(2) $p = 3$ のとき、(i) $X = \mathbb{P}^2$, Y：次数3の del Pezzo 曲面；

(ii) $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, Y：極小な K3 曲面；

(iii) X：相対的に極小な線織曲面,

Y：$\kappa = 1$ の極小な楕円曲面；

(iv) (i),(ii),(iii) 以外のとき、Yは極小な一般

型代数曲面である。

(3) $p=2$ のとき、(i) $X=\mathbb{P}^2$, $Y=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$;

(ii) $X=\mathbb{P}^2$, Y: 次数2のdel Pezzo曲面;

(iii) X: 相対的に極小な線織曲面,

Y: 線織曲面;

(iv) X: del Pezzo曲面, Y: 極小なK3曲面;

(v) X: 線織曲面, Y: $\kappa=1$ の極小な楕円曲面;

(vi) (i)〜(v) 以外のとき、Y は極小な一般型代数曲面である。

証明略（[1] 参照）。

§2. $\mathbb{A}^2$ の Artin-Schreier 被覆

代数曲面 $\mathcal{X}$ から $\mathbb{A}^2_k$ の上へのエタールな有限射 $\varphi: \mathcal{X}\to\mathbb{A}^2_k$ で関数体の拡大 $k(\mathcal{X})/k(\mathbb{A}^2)$ が p 次の Galois 拡大になっているものを考える。 (s,t) を $\mathbb{A}^2$ の座標とすると、多項式 $f(s,t)\in k[s,t]$ が存在して $\mathcal{X}=\mathrm{Spec}\ k[s,t,\xi]/(\xi^p-\xi-f)$ と書けることが知られている。 $\mathbb{A}^2_k\subset\mathbb{P}^2_k$ と見て、$\mathbb{P}^2$ の $k(\mathcal{X})$ での正規化 π:

$\tilde{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^2$をとると、これはAS被覆となる。　この被覆は一般には単純型とは限らない。　この節では単純型でない場合も含めた考察を行ない、$\tilde{\mathcal{X}}$の特異点の極小な解消$\rho: \mathcal{Y} \to \tilde{\mathcal{X}}$を取り$\mathcal{Y}$の数値的不変量等を調べる。　以下では$\mathcal{X}$に対して上記の多項式$f(s,t)$は次数がもっとも小さくなるものを取るとする。$\mathbb{P}^2$の斉次座標$(X,Y,Z)$を$s=X/Z$, $t=Y/Z$となるようにとり、$\mathbb{P}^2$のアフィン開被覆$U_X=\{X\neq 0\}$, $U_Y=\{Y\neq 0\}$, $U_Z=\{Z\neq 0\}$とおく。また無限遠直線$\mathbb{P}^2-U_X$をLと書くことにする。　Gorenstein スキーム$\bar{\mathcal{X}}$と、有限射$\psi: \bar{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^2$を次のように定義する：

$$\psi^{-1}(U_Z) = \mathrm{Spec}\, k[s,t,\xi]/(\xi^p - \xi - f) = \mathcal{X},$$

$$\psi^{-1}(U_Y) = \mathrm{Spec}\, k[x,z,\eta]/(\eta^p - z^{m(p-1)}\eta - z^e \tilde{f}(x,1,z)),$$

$$\psi^{-1}(U_X) = \mathrm{Spec}\, k[u,v,\zeta]/(\zeta^p - v^{m(p-1)}\zeta - v^e \tilde{f}(1,u,v)),$$

ここで $\eta = (Z/Y)^m \xi$, $\zeta = (Z/X)^m \xi$, $x = X/Y$, $z = Z/Y$, $u = Y/X$, $v = Z/X$, $d = \deg f(s,t)$, $\tilde{f}(X,Y,Z) = Z^d f(X/Z, Y/Z)$, $d + e = mp$ ($e, m \in \mathbb{Z}$, $0 \leqq e < p$)である。

<u>注意</u>2.1.　$\bar{\mathcal{X}}$は一般には正規ではないが$\psi_* \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}$にはフィルトレーション $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p-1} = \psi_* \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}$が存在する。ここで各$\mathcal{F}_i$は$U_Z, U_Y, U_X$上それぞれ$\{1, \xi, \cdots \xi^i\}$, $\{1, \eta, \cdots \eta^i\}$, $\{1, \zeta, \cdots \zeta^i\}$で生成されていて、$\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-im)$となる。

<u>注意</u>2.2.　$\tilde{X}$はXの正規化である。従って、Xが正規のとき$\pi:\tilde{X}\to\mathbb{P}^2$は単純型AS被覆である。

<u>注意</u>2.3.　$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = p - \frac{3}{4}p(p-1)m + \frac{1}{12}p(p-1)(2p-1)m^2$。

I. <u>$\deg f \equiv 0 \pmod p$ の場合</u>

多項式$f(s,t)$とその斉次化$\hat{f}(X,Y,Z)$について次の仮定を考える。

仮定A: $\deg f(s,t) \equiv 0 \pmod p$ でかつ、各$P\in L$に対して
$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\hat{f}, \frac{\partial}{\partial Y}\hat{f}, \frac{\partial}{\partial Z}\hat{f}\right)(P) \neq (0,0,0)。$$

仮定Aを満たす多項式fによりXが$\operatorname{Spec} k[s,t,\xi]/(\xi^p-\xi-f)$と書けているとき、$\varphi: X\to\mathbb{A}^2$は仮定Aを満たすという。ヤコビアン判定法により次の命題が得られる:

<u>命題</u>2.4.　$\varphi: X\to\mathbb{A}^2$は仮定Aを満たし,$(p,m)\neq(2,1)$であるとする。このとき$X$は非特異である。とくに$X$は正規であり、$X=\tilde{X}=Y$が成り立ち、$\pi\circ\varphi: Y\to\mathbb{P}^2$は単純型AS被覆である。

系 2.5、　命題と同じ仮定の下で

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) = p - \frac{3}{4}p(p-1)m + \frac{1}{12}p(p-1)(2p-1)m^2 \text{。}$$

II、$\deg f \equiv p-1 \pmod{p}$ の場合

このとき $e=1$ となる。ヤコビアン判定法及び Serre の判定法により次が従う：

補題 2.6、　$\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{A}^2$ が $\deg f \equiv p-1 \pmod{p}$ であるような多項式 f により表されているとき、$\mathcal{X}$ は正規である。さらに各 $P \in \mathbb{P}^2$ に対して次が成立する：

$$\varphi^{-1}(P) \text{ が特異点} \Longleftrightarrow P \in \{\hat{f}(X,Y,Z)=0\} \cap L \text{。}$$

注意 2.2 より $\mathcal{X} = \hat{\mathcal{X}}$ となり、$\pi : \hat{\mathcal{X}} \to \mathbb{P}^2$ は単純型 A S 被覆である。多項式 $f(x,t)$ についての次の仮定を考える。

仮定 B：　$\deg f \not\equiv 0 \pmod{p}$ でありかつ、曲線 $\{\hat{f}(X,Y,Z)=0\}$ は既約曲線で L と正規交叉する。

命題 2.7、　$\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{A}^2$ は仮定 B をみたし、$\deg f \equiv p-1 \pmod{p}$ であるとする。このとき $\hat{\mathcal{X}}$ は特異点として丁度 d 個

のA_{p-1}型有理二重点のみをもつ。

<u>証明</u>、 前の補題より $\tilde{X}=\hat{X}$ となりまた $\mathrm{Sing}(\tilde{X})$ は $\{f=0\}\cap L$ 上にある。 $P\in\{f=0\}\cap L$ をとる。 このとき $P=(x=0, z=0)\in U_Y$ として一般性を失わない。 f は仮定Bをみたすから、$\pi^{-1}(P)$ の近傍では $\tilde{X}$ は $\eta^p - z^{m(p-1)}\eta = zx+$(高次の項) により定義されている。 この式より $\pi^{-1}(P)$ は A_{p-1} 型有理二重点であることがわかる。 (証明終り)

<u>系</u>2.8. 命題と同じ仮定の下で

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = p - \frac{3}{4}p(p-1)m + \frac{1}{12}p(p-1)(2p-1)m^2.$$

<u>証明</u>、 $\tilde{X}$ は有理特異点のみをもつことから $\chi(\mathcal{O}_Y)=\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ がわかる。 $\tilde{X}=\hat{X}$ であったから注意2.3より結果を得る。

III. <u>$\deg f \not\equiv 0, p-1 \pmod p$ の場合</u>

このとき必然的に $p\geqq 3$ となり、$2\leqq e\leqq p-1$ となる。 ヤコビアン判定法及びSerreの判定法により、$\tilde{X}$ は正規ではなく、$\pi:\tilde{X}\to\mathbb{P}^2$ は単純型でないAS被覆となる。 そこで次の $\mathbb{P}^2$ 上の完全列を考える:

$$0 \longrightarrow \psi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0 \quad 。$$

このとき $\mathrm{Supp}\,\mathcal{H} = L$ である。一方、注意2.1のフィルトレーションより $H^1(\mathbb{P}^2, \psi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ が容易に示される。従って $H^0(L, \mathcal{H}) = 0$ となり、$\mathcal{H}$ はトーションフリー層、よりくわしくL上の局所自由 $\mathcal{O}_L$－加群であることがわかる。以下では、$\varphi: X \to \mathbb{A}^2$ は仮定Bをみたし、かつ $\deg f \not\equiv 0, p-1 \pmod p$ であると仮定して $\mathcal{H}$ を決定する。

まず、$P \in L - \{\tilde{f}=0\}$ なる点をとる。$P \in U_Y$ であるとして一般性を失わない。このとき $\tilde{X}$ は $\psi^{-1}(P)$ の近くで $\eta^p - z^{m(p-1)}\eta - z^e \tilde{f}(x,1,z) = 0$ により定義されている。$F = \tilde{f}(x,1,z) + z^{m(p-1)-e}\eta$ とおくと、$\eta^p = z^e F$, $F(P) \neq 0$ となる。p と e は互いに素であるから整数 a と b が存在して $ap + be = 1$ とできる。ここで $-e < a < 0$ としてよい。$\tau = \eta^b z^a$ とおくと、$\tau \in k(\tilde{X})$ であり、$\tau^e = \eta F^{-a}$, $\tau^p = z F^b$ となる。従って、$(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_P = (\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_P[\tau]$ となり、$\tilde{X}$ は $\pi^{-1}(P)$ で非特異であることがわかる。また $n = -\alpha p + \beta e$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$ に対して $\tau^n = z^{-\alpha}\eta^\beta F^{-\alpha b - \beta a}$ である。このことに注意すると容易に $\mathcal{H}_P = \bigoplus_{\alpha,\beta} \mathcal{O}_{L,P}\, z^{-\alpha}\eta^\beta$ であることが確められる。但し、α と β は $-\alpha p + \beta e > 0$, $0 < \alpha < e$, $0 < \beta < p$ なる整数全体を渉る。

次に、$L \cap \{\tilde{f}=0\}$ 上での $\mathcal{H}$ を調べる。$L \cap \{\tilde{f}=0\} \subset U_X$ として一般性を失わない。$Q \in L \cap \{\tilde{f}=0\}$ をとる。$\psi^{-1}(Q)$ の近くで

$\tilde{X}$ は $\zeta^p - v^{m(p-1)}\zeta - v^e\tilde{f}(1,u,v) = 0$ によって定義されている。$G = \tilde{f}(1,u,v) + v^{m(p-1)-e}\zeta$ とすると $\zeta^p = v^e G$ でさらに f は仮定Bを満たすから Q は G の1位の零点となる。従って Q の上にある特異点をみるには $\zeta^p = v^e u$ で定義された曲面の正規化を考えればよい。$T^p = v$, $S = \zeta/T^e$ とおく。このとき $S^p = u$ となる。$h = p-e$ として $k[[S,T]]$ 上の導分 $D = T\frac{\partial}{\partial T} + hS\frac{\partial}{\partial S}$ 及びその不変環 $k[[S,T]]^D = \{g \in k[[S,T]] \mid D(g) = 0\}$ を考える。$k[[S,T]]^D$ は正規環である。よりくわしく多項式環についての次の補題がある。

補題 2.8. $A = k[T,S] \cap k(T^p, S^p, S/T^h)$, $D = T\frac{\partial}{\partial T} + hS\frac{\partial}{\partial S}$ とおく。このとき次が成り立つ。

(i) $A = k[T,S]^D$ でさらに Spec A は $(S=0, T=0)$ に孤立特異点をもつ。

(ii) $\{S^\alpha T^\beta \mid \beta + h\alpha \equiv 0 \pmod{p}\}$ は A の k-基底となる。

(iii) Spec A の孤立特異点は有理特異点である。

証明略 (Miyanishi-Russell, Purely inseparable coverings of exponent one of the affine plane, J. Pure Appl. Algebra 28 (1983), 279-317 参照)。

この補題を完備化した環に適用する。 $u, v, \zeta \in k[[S,T]]^D$ で、$k((u,v,\zeta)) = k((S^p, T^p, S/T^n))$ であるから、補題 2.8.(2) より $\{T^{-\alpha p+\beta e}S^\beta \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Z},\ \beta>0,\ -\alpha p+\beta e>0\}$ は $k[[S,T]]^D$ の k-基底である。 従って $k[[S,T]]^D/k[[S^p, T^p, T^e S]]$ の k-基底として $\{T^{-\alpha p+\beta e}S^{\beta+np} \mid \alpha,\beta,n \in \mathbb{Z},\ n>0,\ 0<\alpha<e,\ 0<\beta<p,\ -\alpha p+\beta e>0\}$ がとれる。 これは $\{T^{-\alpha p+\beta e}S^\beta \mid \alpha,\beta\in\mathbb{Z}, 0<\alpha<e,\ 0<\beta<p,\ -\alpha p+\beta e>0\}$ が $k[[S,T]]^D/k[[S^p, T^p, T^e S]]$ の $k[[S^p]]$-基底であることを示している。 $T^{-\alpha p+\beta e}S^\beta = v^{-\alpha}\zeta^\beta$ であることに注意すると、$\mathcal{H}_Q = \bigoplus_{\alpha,\beta}\mathcal{O}_{L,Q}v^{-\alpha}\zeta^\beta$ であることがわかる。 ここで α と β は $0<\alpha<e,\ 0<\beta<p,\ -\alpha p+\beta e>0$ となる整数全体を渉る。 一方、$\mathcal{H}|_{L^0} = \bigoplus_{\alpha,\beta}\mathcal{O}_{L^0}z^{-\alpha}\eta^\beta$ であることをすでにみた。 ここで α と β は上と同じもので、$L^0 = L - \{Q\in L \mid \pi^{-1}(Q)$ は特異点$\}$ である。 $z^{-\alpha}\eta^\beta = v^{-\alpha}\zeta^\beta u^{\alpha-\beta m}$ であることに注意すると、$\mathcal{H}$ の $U_X \cap U_Y$ 上の変換関数は $\{u^{\alpha-\beta m}\}$ であることがわかる。 よって次の結果を得る。

<u>定理</u> 2.9. $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{A}^2$ は仮定 B を満たし、$e \neq 1$ とする。 L 上の局所自由 $\mathcal{O}_L$-加群 $\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha,\beta}\mathcal{O}_L(\alpha-\beta m)$ を考える。 ここで α と β は $0<\alpha<e,\ 0<\beta<p,\ -\alpha p+\beta e>0$ なる整数全体を渉る。 このとき $\mathbb{P}^2$ 上の次の列は完全列である。

$$0 \longrightarrow \psi_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0 .$$

系 2.10. 定理と同じ仮定、同じ記号の下で次が成立する。

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) = p - \frac{3}{4}p(p-1)m + \frac{1}{12}p(p-1)(2p-1)m^2 + \Sigma_{\alpha,\beta}(\alpha - \beta m + 1)$$ 。

証明は補題2.8.(3)より$\mathcal{X}$は有理特異点しかもたないことからすぐにわかる。

以上、無限遠直線で分岐するA^2上のＡＳ被覆$\mathcal{X}$について、$\mathcal{X}$が仮定Ａ又は仮定Ｂをみたす場合に、その非特異完備化$\mathcal{Y}$のEuler数$\chi(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$を求める公式を与えたが、同じ仮定の下で、$\mathcal{Y}$の標準因子$K_{\mathcal{Y}}$も記述することができる。([2]参照)

文献

[1] Y. Takeda, Artin-Schreier coverings of algebraic surfaces, J. Math. Soc. Japan 41 (1989) 415-435.

[2] Y. Takeda, Etale Galois coverings of degree p of the affine plane, to appear in J. algebra.