数理解析研究所講究録
第713巻 1990年 108-113

General Néron Desingularizationの簡易化

高知大理 小駒 哲司 (Tetsushi Ogoma)

次の命題が成立する時、GNDが成り立つと言う。

(GND) 環の間の regular hom. $A \longrightarrow A'$ と、有限生成 A-algebra B で A-hom $B \longrightarrow A'$ をもつものが与えられれば, 有限生成 smooth A-algebra D で B-hom $D \longrightarrow A'$ をもつものが存在する。

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & \exists D \arrow[d, dashed] \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & A' \end{tikzcd}$$

ここで, $A \longrightarrow A'$ が regular hom であるとは. flat hom であって. 任意の $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ について fibre $A' \otimes_A k(\mathfrak{q})$ が $k(\mathfrak{q}) = A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ 上 geometrically regular となることである。これと同値な条件は, 任意の $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A'$ について, $A \longrightarrow A'_{\mathfrak{P}}$ が formally smooth となることが知られている。[1].

なお, GND が成立することと, A'がA上 finite type smooth algebra の inductive limit として書けることが

同値になることは、ちょっと考えればわかる。

名前の由来は、A, A' が discrete valuation ring の場合 Néron により証明されたことによると思われるが、一般の場合にできれば、Artin の近似定理など応用対象も広い。歴史的な記述は[2]に詳しいのでここでは述べない。ただ一つだけ指摘しておきたいことは、Popescu が GND ができたとして証明も発表されているが[4,5] 記述は不明確なところが少なくなく、更に少くとも標数正の場合には大きな論理的欠陥があったことである。

昨年の夏の名古屋での集中講義では、Popescu のアイデアを整理し分かり易い形で示し、更に正標数の場合もできることを講演者のアイデアを加えた形で話した。[3] 証明には noether induction を使うのであるが、この場合最初の段階として A' が artin local の場合に証明する必要がある。

これについて[4]で Popescu は、「trans finite な議論により、A' は $A(X_1,.,X_s)[Y]/(f(Y))$ の形の inductive limit で書ける。但し $f(Y)$ は $A(X_1,.,X_s)$ 上の monic separable polynomial」という一言で済ましている。（今の場合、A は A' の極大イデアル $\mathfrak{n}$ により、$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}\cap A$ を極大イデアルとする局所環と仮定しておいてよい。）体の分離拡大 $A/\mathfrak{m} \longrightarrow A'/\mathfrak{m}A'$ を inductive limit の形で表わし それ

をもち上げよということと思われるが、もち上げ方は一意的ではないので inductive system にするには更に詳細な議論が必要である。

なお、実際使うのは、inductive limit の形ではなく GND の形そのままなので、A' が artin local の場合に GND の形で明確な証明を与えておこうというのが、今回の話の主旨である。

さて、先にも述べたが、$(A', \mathfrak{n})$ が artin local の場合の GND について、$\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ で A を localize することにより、$(A, \mathfrak{m})$ local と仮定してよい。このとき、
$A/\mathfrak{m} \longrightarrow A'/\mathfrak{m}A'$ は体の拡大で geometrically regular すなわち separable extension である。

よって、$k = A/\mathfrak{m}$ 上有限生成な拡大体 $L \subseteq A'/\mathfrak{n}$ について、
$L = k(x_1, \ldots, x_n)[Z]/(f(Z))$ と表わせる。但し $x_1, \ldots, x_n$ は k 上超越的な元、$f(Z)$ は $k(x_1, \ldots, x_n)$ 上の monic irreducible separable polynomial である。

変数 $X_1, \ldots, X_n$ を取り、$x_1, \ldots, x_n$ に写す写像
$A(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow k(x_1, \ldots, x_n)$ を考え、$F(Z) \in A(X_1, \ldots, X_n)[Z]$ を monic であるような、$f(Z)$ の一つの代表元とし、
$D_L = A(X_1, \ldots, X_n)[Z]/(F(Z))$ とおく。D_L は A 上 smooth な

algebra であるから、可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[d] & & A' \arrow[d] \\ D_L \arrow[r] & L \arrow[r] & A/\mathfrak{m} \end{tikzcd}$$

より、$D_L \longrightarrow A'$ へもち上げられる。
D_L を lift $D_L \longrightarrow A'$ もこめて
L の A 上の smooth lift と呼ぶ。

補題. $D_L \longrightarrow A'$ は injective.

∵) A の長さ $l(A)$ についての帰納法による。
$l(A)=1$ の場合は明らか。
$l(A)>1$ とする。$\varepsilon \in \mathfrak{m}$ で $A\varepsilon \simeq A/\mathfrak{m}$ となるものが存在する。
$D_L/\varepsilon D_L \longrightarrow A'/\varepsilon A'$ は、L の $A/\varepsilon A$ 上の smooth lift であるから、帰納法の仮定より単射。一方、$\varepsilon A \longrightarrow \varepsilon A'$ は、$\varepsilon A' \neq 0$ より単射で、$\varepsilon D_L \simeq L$ を経由する。さて、$\varepsilon D_L \longrightarrow \varepsilon A'$ は D_L-module hom で、$\varepsilon A \simeq A/\mathfrak{m} = k$ の部分で単射であるから $\varepsilon D_L \simeq L$ の部分でも単射となる。

命題. artin local ring $(A', \mathfrak{m})$ と local regular hom $A \longrightarrow A'$ が与えられている。このとき、有限生成 A-algebra B と A-hom $B \longrightarrow A'$ について、次の性質をもつ $k = A/\mathfrak{m}$ 上有限生成な体 $K\ (\subset A/\mathfrak{m})$ が存在する。

*) k 上有限生成な体 L で、$K \subseteq L \subseteq A/\mathfrak{m}$ なるものに

ついて、$B \longrightarrow A'$ は L の smooth lift D_L を経由する。

証明）. $l(A)$ についての帰納法で示す。

$l(A)=1$ のときは. $A \rightarrow A'$ は体の拡大であるから、B の A' への像 $\overline{B}$ の商体を K とすればよい。

$l(A)>1$ とする。$\varepsilon A \simeq A/\mathfrak{m}$ となる $\varepsilon \in \mathfrak{m}$ を一つとる。$A/\varepsilon A \longrightarrow A'/\varepsilon A'$ についての帰納法の仮定より、*) を満たす k 上有限生成な体 K_1 ($\subseteq A/\mathfrak{m}$) が存在する。

一方、B の A' への像 $\overline{B}$ について、$\varepsilon A' \cap \overline{B}$ は. $\overline{B}$ のイデアルであってかつ体 $A/\mathfrak{m}$ の部分 B-加群となっているから. k 上の有限生成拡大体 K_2 ($\subset A/\mathfrak{m}$) があって.
$\varepsilon A' \cap \overline{B} \subseteq K_2 \varepsilon$ となる。

今、合成体 $K = K_1 \vee K_2$ を考えれば、これが求めるものである。

実際、k 上有限生成体 L で $K \leq L \leq A/\mathfrak{m}$ なるものをとれば，L の A 上の smooth lift $D_L \longrightarrow A'$ について.
$D_L/\varepsilon D_L \longrightarrow A'/\varepsilon A'$ は L の $A/\varepsilon A$ 上の smooth lift となるから. $K_1 \subset K \subset L$ より $B/\varepsilon B \longrightarrow A'/\varepsilon A'$ の像は. $D_L/\varepsilon D_L$ に含まれる。一方、$K_2 \subseteq K \subseteq L$ より. $\overline{B} \cap \varepsilon A' \subseteq L\varepsilon = D_L \varepsilon$.
よって $\overline{B} \subset D_L$ となり. 命題が証明された。

References.

[1]. André, M., Homologie des algèbre commutatives, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[2] 西村純一, 近似定理. 第9回可換環論シンポジウム報告集 (1988) 252-263

[3] Ogoma, T., General Néron Desingularization based on the idea of. Popescu.

[4]. Popescu, D., General Néron Desingularization, Nagoya Math. J. 100 (1985) 97-126.

[5] Popescu. D., General Néron Desingularization and Approximation, Nagoya Math. J. 104 (1986) 85-115.