

Graded CM modules とその完備化

吉野雄二 (名大・理)

(Yuji Yoshino)

本稿の内容は概ね私の本 [2] の第 15 章の紹介である。

以下では、 $R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$ は次数付き環でいつも CM であるとする。但し、 $R_0 = k$ は体であると仮定する。 $\mathfrak{m} = \sum_{n>0} R_n$ と置くと、 \mathfrak{m} は R の極大イデアルである。 \mathfrak{m} 進トポロジーによる R の完備化を \widehat{R} と書くことにする。また、 \widehat{R} 上の有限生成加群全体から成る圏を $\mathfrak{M}(\widehat{R})$ 、その充満部分圏で \widehat{R} 上の極大 CM 加群全体から成るものを $\mathfrak{C}(\widehat{R})$ とする。同じように、 R 上の有限生成次数付き加群とそれらとの間の次数が零の斉次準同型写像からなる圏を $\text{gr}\mathfrak{M}(R)$ 、次数付き極大 CM 加群全体からなる $\text{gr}\mathfrak{C}(R)$ の充満部分圏を $\text{gr}\mathfrak{C}(R)$ で表すことにする。 $X, Y \in \text{gr}\mathfrak{C}(R)$ について、 $\text{Hom}_R(X, Y)$ は自然に次数付き R -加群であり、その次数 0 の部分が圏 $\text{gr}\mathfrak{C}(R)$ における X から Y にいたる射の全体である。i.e. $\text{Hom}_{\text{gr}\mathfrak{C}(R)}(X, Y) = \text{Hom}_R(X, Y)_0$

本稿では特に $\mathfrak{C}(\widehat{R})$ と $\text{gr}\mathfrak{C}(R)$ の関係を調べることを目標とする。 $\mathfrak{C}(\widehat{R})$ が有限表現型であるとは、 $\mathfrak{C}(\widehat{R})$ に含まれる直既約な対象の同型類の個数が有限個しかない時を言うことにする。同様、(多少言葉の乱用であるが)、 $\text{gr}\mathfrak{C}(R)$ が有限表現型であるとは、 $\text{gr}\mathfrak{C}(R)$ に含まれる直既約な対象の同型類が次数のずれを除いて有限個しかない時を言うことにする。

\mathfrak{m} 進トポロジーによる完備化によって、つぎのような関手が定義できる。

$$\widehat{} : \text{gr}\mathfrak{M}(R) \rightarrow \mathfrak{M}(\widehat{R}), \quad \widehat{} : \text{gr}\mathfrak{C}(R) \rightarrow \mathfrak{C}(\widehat{R}); \quad X \mapsto \widehat{X}$$

まず次の事が成立することに注意しよう。

命題 1. もし $\mathfrak{C}(\widehat{R})$ が有限表現型であるならば、 $\text{gr}\mathfrak{C}(R)$ もまた有限表現型である。

この命題は次の補題から出る。

補題 2.

(2.1) $X \in \text{gr}\mathfrak{M}(R)$ が直既約ならば、 \widehat{X} は \widehat{R} -加群として直既約である。

(2.2) X と Y が $\text{gr}\mathfrak{M}(R)$ の直既約な加群で、 \widehat{R} -加群として \widehat{X} が \widehat{Y} と同型であるならば、次数付き R -加群として X は Y と同型である。

証明: 略。■

この命題から、 R 上の直既約な次数付き CM 加群の同型類の集合は、 \widehat{R} 上の直既約な CM 加群の同型類の集合の部分集合であることが分かるから、これによって、命題 1 の証明が終わる。

実は、命題 1 の逆もまた正しい。それを示すのが本稿の主目的である。このことは、すでに Auslander-Reiten [1] によって示されていることを注意して置く。(参照 [2])

いくつかの準備をしよう。

定義 3. \widehat{R} 上の有限生成加群 M が、次数付け可能 (gradable) とは、 R 上の有限生成斉次加群 X が存在して $M \simeq \widehat{X}$ (\widehat{R} -加群としての同型) となるときを言う。同様に次数付け可能加群の間の \widehat{R} -準同型 $f: M \rightarrow N$ が、次数付け可能準同型であるとは、 R 上の次数付き加群の間の斉次準同型写像 $g: X \rightarrow Y$ が存在して、圏 $\mathcal{C}(\widehat{R})$ の中で次の図式が可換となるときを言う。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\simeq} & \widehat{X} \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{\simeq} & \widehat{Y} \end{array}$$

注意 4. K_R を次数付き環 R の次数付き正準加群 (graded canonical module) とする。完備局所環 \widehat{R} の正準加群 $K_{\widehat{R}}$ は、 K_R の完備化 \widehat{K}_R に同型であることは容易に分かる。特に、 $K_{\widehat{R}}$ は次数付け可能な \widehat{R} -加群である。任意の有限生成次数付き R -加群 X に対して、次数付き加群としての双対 $\text{Hom}_R(X, K_R)$ を X' と書くことにする。同様に、 \widehat{R} -加群 M の双対 $\text{Hom}_{\widehat{R}}(M, \widehat{R})$ を同じ記号 M' で表す。上で注意したことによって、もし $M \simeq \widehat{X}$ のときには、 $M' \simeq \widehat{X}'$ が成立する。特に、次数付け可能な \widehat{R} -加群の正準加群による双対はまた次数付け可能であることが分かる。

R による双対についても同様のことが成立する。すなわち、次数付け可能な \widehat{R} -加群 M に対して、 $\text{Hom}_{\widehat{R}}(M, \widehat{R})$ はまた次数付け可能である。

また明らかなることであるが、次数付け可能な加群の直和因子はまた次数付け可能である。(\widehat{R} -加群の圏においては直既約分解の一意性が成立する事を使って補題 2 から従う。)

次数付き環 R が孤立特異点をもつとは、任意の relevant な斉次素イデアル \mathfrak{p} について、次数付き局所化 $R_{(\mathfrak{p})}$ が正則であると定義される。この時、 R 上の次数付き CM 加群 M は皆局所自由であることを注意しておこう。すなわち、 \mathfrak{p} が relevant な斉次素イデアルである時、 $M_{(\mathfrak{p})}$ は $R_{(\mathfrak{p})}$ 上で自由である。次数付き環 R が孤立特異点をもつならば、 \widehat{R} もまた (通常の意味で) 孤立特異点を持つことは明かであろう。

補題 5. 次数付き環 R は孤立特異点を持つと仮定する。任意の $\text{gr}\mathcal{C}(R)$ の対象 X, Y と、整数 $n > 0$ について、次のような自然な同型がある。

$$\text{Ext}_R^n(X, Y) \simeq \text{Ext}_{\widehat{R}}^n(\widehat{X}, \widehat{Y})$$

証明: R が孤立特異点をもつことから、 $\text{Ext}_R^n(X, Y)$ が長さ有限な R -加群になる。これから、補題は明かである。■

補題 6. R は孤立特異点を持つと仮定する。また、 M は次数付け可能な直既約 CM \widehat{R} -加群であるとする。(6.1) もし M が自由加群でなければ、 M で終わる AR 列:

$$0 \longrightarrow \tau(M) \xrightarrow{q} E \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

において、 $\tau(M)$ と E は次数付け可能な加群であり、 p と q は次数付け可能な準同型である。
 (6.2) もし M が \widehat{R} の正準加群と同型でなければ、 M から始まる AR 列:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{q} G \xrightarrow{p} \tau^{-1}(M) \longrightarrow 0$$

において、 $\tau^{-1}(M)$ と G は次数付け可能な加群であり、 p と q は次数付け可能な準同型である。

証明: 双対性によって (6.1) のみを証明すれば十分である。AR 理論の一般論によって、 $\tau(M) = (\text{syz}^d \text{tr}(M))'$ であることを注意して置く。 X を R 上の次数付き CM 加群で、 $\widehat{X} \simeq M$ となるものとする。 $\tau_{gr}(X)$ で次数付き R 加群として上記の operation をとったものとする。すなわち、 $\tau_{gr}(X) = (\text{syz}^d \text{tr}(X))'$ で、すべての operation は $\text{gr}\mathcal{C}(R)$ の中でとる。 $\tau(\widehat{X}) \simeq \tau(M)$ である。

更に、 M で終わる AR 列とは、 $\text{Ext}_{\widehat{R}}^1(M, \tau(M))$ の中の右 $\text{End}_{\widehat{R}}(M)$ -加群としての socle に対応する列であることを思いだしておく。補題5によって、 $\text{Ext}_{\widehat{R}}^1(X, \tau_{gr}(X))$ の socle の元 (それは斉次である) に対応する完全列:

$$0 \longrightarrow \tau_{gr}(X) \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

が存在して、その完備化が M で終わる AR 列になることが分かる。特に、その AR 列に現れる加群、準同型射はすべて次数付け可能である。■

命題7. 次数付き環 R は孤立特異点を持つと仮定する。 M と N を直既約 CM \widehat{R} -加群とし、 $\mathcal{C}(\widehat{R})$ における既約写像 $M \rightarrow N$ が存在したとする。

(7.1) もし N が自由加群でなく、かつ、 N が次数付け可能であるならば、 M も次数付け可能である。

(7.1)' もし M が \widehat{R} の正準加群と同型でなく、かつ、 M が次数付け可能であるならば、 N も次数付け可能である。

(7.2) もし M が自由加群でなく、かつ、 M が次数付け可能ならば、 N もまた次数付け可能である。

(7.2)' もし N が \widehat{R} の正準加群と同型でなく、かつ、 N が次数付け可能ならば、 M もまた次数付け可能である。

証明: (7.1): N は自由加群ではないので、(6.1) によって、次数付け可能加群からなる AR 列:

$$0 \longrightarrow \tau(N) \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

が存在する。AR 列の一般論によれば、 M は E の直和因子でなくてはならない。特に、 M もまた次数付け可能である。

(7.1)' は上と同様にして (6.2) より出る。

(7.2): もし $N \simeq \widehat{R}$ ならば、証明する事はなにもないので、 N は自由でない加群と仮定してよい。このとき、 N で終わる AR 列:

$$0 \longrightarrow \tau(N) \longrightarrow E \oplus M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

が存在する。ここで、中央の項に M があるのは、 M から N に既約写像が存在するからである。上の AR 列によって、 $\tau(N)$ から M にも既約写像が存在することに注意しよう。 M は自由でない加群で、かつ、次数付け可能であるのだから、補題 6 によって、次数付け可能な加群からなる AR 列:

$$0 \longrightarrow \tau(M) \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

がある。 M に入る既約写像の存在から、 $\tau(N)$ は L の直和因子でなければならない。特に、 $\tau(N)$ は次数付け可能加群である。 $\tau(N)$ は \hat{R} の正準加群とは同型ではないので、 $N \simeq \tau^{-1}(\tau(N))$ もまた次数付け可能であることが分かる。

(7.2)' は上と双対的な議論によって出る。■

この命題の特殊な場合として次の事が分かる。

系 8. 次数付き CM 環 R は以前のように孤立特異点しか持たないと仮定する。更に、完備局所環 \hat{R} は Gorenstein でないとする。 M, N を直既約 CM \hat{R} -加群とし、 $\mathcal{C}(\hat{R})$ における既約写像 $M \rightarrow N$ が存在したとする。このとき、 M, N の一方が次数付け可能であるならば他方も次数付け可能である。

証明: Gorenstein でないことから、 $K_{\hat{R}}$ と \hat{R} は同型でない。従って、命題を適用すれば良い。■

記号. 圏 $\mathcal{C}(\hat{R})$ の AR quiver を Γ と書くことにする。更に、 Γ° は、 Γ の部分グラフで、次数付け可能な直既約 CM 加群の同型類に対応するすべての点を頂点として持ち、 Γ における矢をそれらの頂点に制限したものとす。

系 8 によって次の事が示される。

系 9. R は孤立特異点を持つと仮定する。もし \hat{R} が Gorenstein 環でなければ、 Γ° は Γ のいくつかの (グラフとしての) 連結成分の和である。

実はこのことは \hat{R} が Gorenstein のときにも正しい。そのことを示すために、つぎの命題が必要である。

命題 10. \hat{R} は Gorenstein 環であると仮定する。必ずしも CM でない次数付け可能な \hat{R} -加群 M と、非負整数 n が与えられたとする。この時、 \hat{R} 上の次数付け可能 CM 加群 L が必ず存在して、 $\mathcal{C}(\hat{R})$ 上の関手としての全射:

$$\mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\quad, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\hat{R}}^n(\quad, M)$$

がある。

証明: $t = \mathrm{depth}(M)$ についての帰納法によって証明する。まず、 $t = \dim(\hat{R})$ と仮定する。すなわち、 M は \hat{R} 上の次数付け可能な CM 加群である。 $n = 0$ のときは、 $L = M$ とおけばよい。 \hat{R} は Gorenstein 環であるから、 M を \hat{R} 上の自由加群 F の中に埋め込んで、その余核 N を再び次数付け可能な CM 加群とすることが可能である。

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

\hat{R} が Gorenstein であることから、 $\mathcal{C}(\hat{R})$ 上の関手として、 $\mathrm{Ext}_{\hat{R}}^i(\quad, \hat{R}) = 0$ ($i \geq 1$) であるから、上の完全列によって、次のような $\mathcal{C}(\hat{R})$ 上の関手の完全列及び同型が得られる。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\quad, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\quad, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\quad, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\hat{R}}^1(\quad, M) \longrightarrow 0$$

$$\text{Ext}_{\hat{R}}^n(\quad, M) \simeq \text{Ext}_{\hat{R}}^{n-1}(\quad, N) \quad (n \geq 2)$$

N に対する帰納法の仮定と上の完全列より、 $n = 1$ のときには命題は正しいことが分かる。また、 $n \geq 2$ のときには、上で得られた同型によって、 $n - 1$ の場合に帰着することが分かる。

$t < \dim(\hat{R})$ と仮定してみよう。このときには、 M の次数付け可能な \hat{R} -加群としての free cover を考える。

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ここで、 F は自由 R -加群であり、 N は次数付け可能な \hat{R} -加群である。この完全列によって、 $\text{depth}(N) = \text{depth}(M) + 1$ であるから、 N 及び F には帰納法の仮定が使えることに注意しよう。上と同様、 $\mathfrak{C}(\hat{R})$ 上の関手として、 $\text{Ext}_{\hat{R}}^i(\quad, \hat{R}) = 0$ ($i \geq 1$) であるから、この完全列によって、

$$\text{Ext}_{\hat{R}}^n(\quad, M) \simeq \text{Ext}_{\hat{R}}^{n+1}(\quad, N) \quad (n \geq 1)$$

が得られる。 N に対する帰納法の仮定によって、 $n \geq 1$ のときには、命題が正しいことが分かる。問題は、 $n = 0$ のときである。このときには、上の完全列により、次のような完全列が得られる。

$$\text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, F) \longrightarrow \text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, M) \longrightarrow \text{Ext}_{\hat{R}}^1(\quad, N) \longrightarrow 0$$

帰納法の仮定によって、次数付け可能な CM 加群 L' があって、 $\mathfrak{C}(\hat{R})$ 上の関手としての全射： $\text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, L') \rightarrow \text{Ext}_{\hat{R}}^1(\quad, N)$ が存在するように出来る。 $\mathfrak{C}(\hat{R})$ 上アーベル群の圏に値を持つ加法的反変関手の圏において、 $\text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, L')$ が projective であることから、関手の間の自然変換として上の全射は、 $\text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, L') \rightarrow \text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, M)$ に持ち上がる。そこで、 $L = L' \oplus F$ とおけば、関手としての全射： $\text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, L) \rightarrow \text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, M)$ が構成できる。■

命題 10 を $n = 0$ の場合に適用して次の系が得られる。

系 11. \hat{R} は Gorenstein 環であると仮定する。必ずしも CM でない次数付け可能な \hat{R} -加群 M については、その CM approximation がやはり次数付け可能 CM 加群として取ることが出来る。

これを使えば Gorenstein のときにも系 9 が成立することを示すことができる。

命題 12. \hat{R} は孤立特異点を持つと仮定する。このとき Γ° は Γ のいくつかの連結成分の和である。

証明: \hat{R} が Gorenstein 環でないときにはすでに証明したので、 \hat{R} は Gorenstein 環であると仮定してよい。このとき、 $[\hat{R}]$ 以外の Γ° の頂点については、命題 7 によって、 Γ° 以外の頂点とは矢で結ばれていない。 Γ において $[\hat{R}]$ と矢で結ばれる頂点がすべて Γ° に属することを言えばよい。

命題 10 によって、次数付け可能な CM \hat{R} -加群 L が存在して、更に、 $\mathfrak{C}(\hat{R})$ 上の関手としての全射：

$$\text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, L) \longrightarrow \text{Hom}_{\hat{R}}(\quad, \mathfrak{m})$$

があるようにできる。このことから、次の事が分かる。

もし直規約な CM \hat{R} -加群 M から \hat{R} に既約写像が存在するならば、 M は L の直和因子である。特に、このとき M は次数付け可能な加群である。

従って、 Γ° おいて \hat{R} に対応する頂点 $[\hat{R}]$ にはいる矢はすべて Γ° の頂点から出る事が分かる。

双対的に、 $[\hat{R}]$ から出る矢もすべて Γ° の頂点に至ることが証明できる。■

この定理と Brauer-Thrall 1 型定理によって最終的に次の定理が導かれる。

定理 13. $R_0 = k$ は完全体であると仮定する。もし、 $\text{gr}\mathcal{C}(R)$ が有限表現型であるならば、 $\mathcal{C}(\widehat{R})$ もまた有限表現型である。更に、この時には、全ての \widehat{R} 上の CM 加群は次数付け可能である。

証明: もし Γ° が有限グラフならば、Brauer-Thrall 1 型定理によって $\Gamma = \Gamma^\circ$ でなくてはならない。■

REFERENCES

1. M. Auslander and I. Reiten, *Cohen-Macaulay modules for graded Cohen-Macaulay rings and their completion*, Commutative Algebra (Berkeley, CA, 1987) Math. Sci. Res. Inst. Publ., 15, Springer, New York-Berlin, 1989, 21-31.
2. Yuji Yoshino, "Cohen-Macaulay modules on Cohen-Macaulay rings," to be published from Cambridge University Press (Lecture Notes of London Math. Soc. 1990).