

無限離散群の誘導表現  
- Intertwining Number Theorem とその応用 -

名古屋大学理学部 尾畑 伸明

§0. 序

Mackey が局所コンパクト群に対して開発した誘導表現の理論は、無限離散群の(ユニタリー)表現論においても重要であることに変わりはない。第一の基本問題は誘導表現の既約性の判定と誘導表現相互の同値関係の記述であるが、Mackey [7] 以来、いくつかの結果 ([1],[5],[10],[14], etc.) が得られている。しかしながら、それらは1次元表現からの誘導にしか適用できないか、或は有限次元表現からの誘導にも適用できるか同値性の判定という観点から見るとはなはだ不十分なものである。さらに最近では、無限離散群(特に wreath product と呼ばれる半直積群や無限対称群)に対して、無限次元表現からの誘導も興味深い研究対象として現れてきている ([2],[3])。一方、同値性の効果的な記述を与えるためには、ある一定範囲の表現をまとめて取り扱わなければならないが、この立場を初めて明確に打ち出したのは Saito [14] であろう。彼の研究は1次元表現からの誘導に限られていたが、最近 Hirai [2] はこの方向をやや一般化して wreath product の既約表現の構成・分類を論じている。

以上のような状況を踏まえて、誘導表現の族に対して既約性・同値性の判定を統一的に取り扱うことが本報告の目的である。我々の与える判定条件は、有限次元とは限らない一般の表現からの誘導表現に対しても有効であること、多くの具体的な応用を持っていることに注意して欲しい。

さて、本報告の内容を簡単に紹介しておこう。離散群  $G$  の部分群の既約表現の族  $\mathfrak{R}$  が与えられたとき、それらを誘導することによって  $G$  の表現の族  $\mathfrak{A}$  を得る。§1において我々は  $\mathfrak{R}$  に対して basic hypotheses と呼ぶ2つの条件を導入する。この条件は見かけに反して極めて本質的であり、多くの具体的問題に対して有効である。主結果は2つの定理から成る。まず、 $\mathfrak{R}$  に対する intertwining number theorem (定理 A) を述べ、それをを用いて  $\mathfrak{A}$  の表現に対する既約性・同値性の判定条件(定理 B)を導く。定理 A の証明は §2 で与える。続

いて §3 において, basic hypotheses の簡易化を論ずる (定理 C, D). それによって, 我々の結果が今までに得られている大部分の結果を包含していることが明らかになるであろう. 最後に, §4 で具体的な応用として自由群・自由積・ $SL(2, \mathbb{Z})$ ・無限対称群・半直積群の既約表現について触れる. 特に最後の例を見れば, basic hypotheses が様々な判定条件を統一的に導くための一般原理にとどまらず, 実際に有用であることが理解されよう.

謝辞. 本報告は文献 [2] の影響の下で書かれたものである. また, 平井武先生からは関連する様々な話題について貴重な示唆をいただいたことも併せて, ここに感謝したい.

### §1. 主結果 - Intertwining Number Theorem と既約性・同値性の判定条件

この報告を通して,  $G$  は (無限) 離散群とし, 考える表現はすべてユニタリー表現とする. 部分群  $H$  の  $g \in G$  による共役は  $H^g = g^{-1}Hg$  で定義される. また, 部分群  $H$  の表現  $(\pi, W)$  と言う代わりに  $(\pi; H) = (\pi, W; H)$  と書くのが便利である.  $(\pi, W; H)$  の  $g \in G$  による共役  $(\pi^g, W; H^g)$  を

$$\pi^g(g^{-1}hg) = \pi(h), \quad h \in H$$

で定義する.

2つの表現  $(\pi_1, W_1; H)$ ,  $(\pi_2, W_2; K)$  に対して, 空間  $\mathcal{J}(\pi_1, \pi_2; H, K) = \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2)$  を次の3条件をみたす有界作用素  $L \in B(W_1, W_2)$  の全体とする.

$$(J1) \quad L\pi_1(h) = \pi_2(h)L, \quad h \in H \cap K;$$

(J2) ある定数  $M > 0$  が存在して,

$$\sum_{h \in H \cap K \setminus H} \|L\pi_1(h)w\|_{W_2}^2 \leq M\|w\|_{W_1}^2, \quad w \in W_1;$$

(J3) ある定数  $M > 0$  が存在して,

$$\sum_{k \in K \cap H \setminus K} \|L^*\pi_2(k)v\|_{W_1}^2 \leq M\|v\|_{W_2}^2, \quad v \in W_2.$$

(J1) より  $\mathcal{J}(\pi_1, \pi_2; H, K) \subset \text{Hom}_{H \cap K}(\pi_1, \pi_2)$  が従うことに注意しておこう.

さて、我々の目的は  $G$  の部分群の既約表現のある族  $\mathfrak{R}$  が与えられたとき、それらを誘導して得られる  $G$  の表現の族

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \{ \text{Ind}_H^G \pi; (\pi; H) \in \mathfrak{R} \}$$

に対して既約性及び同値性の判定法を確立することにある。そのために我々は  $\mathfrak{R}$  に対して次の2条件を考える:

(BH1)  $\mathfrak{R}$  は  $G$  による共役に関して閉じている。即ち、任意の  $(\pi; H) \in \mathfrak{R}$  と  $g \in G$  に対して  $(\pi^g; H^g) \in \mathfrak{R}$  である;

(BH2)  $(\pi_1; H) \in \mathfrak{R}$  と  $(\pi_2; K) \in \mathfrak{R}$  において  $H \neq K$  ならば、 $\mathcal{I}(\pi_1, \pi_2; H, K) = \{0\}$ 。

定義. 上の2条件 (BH1), (BH2) を basic hypotheses という。

定理 A.  $\mathfrak{R}$  が basic hypotheses をみたしているとする。このとき、任意の2つの表現  $(\pi_1; H) \in \mathfrak{R}$  と  $(\pi_2; K) \in \mathfrak{R}$  に対して、

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi_1, \text{Ind}_K^G \pi_2) = \#\{g \in K \setminus G/H; H = K^g, \pi_1 \simeq \pi_2^g\}.$$

証明は §2 で与える。  $\mathfrak{R}$  が与えられたとき、そこに現れる部分群を  $\mathfrak{R}$  の underlying subgroup という。また、 $G$  の部分群  $H$  に対して、その normalizer を  $N(H) = N_G(H) = \{g \in G; H = H^g\}$  で表す。

定理 B (既約性・同値性の判定条件).  $\mathfrak{R}$  が basic hypotheses をみたしているとする。このとき、

- (1)  $\tilde{\mathfrak{R}}$  の2つの表現は互いに同値または disjoint である。
- (2) 2つの表現  $(\pi_1; H) \in \mathfrak{R}$ ,  $(\pi_2; K) \in \mathfrak{R}$  に対して  $\text{Ind}_H^G \pi_1 \simeq \text{Ind}_K^G \pi_2$  となる必要十分条件はある  $g \in G$  によって  $H = K^g$  かつ  $\pi_1 \simeq \pi_2^g$  となることである。
- (3)  $(\pi; H) \in \mathfrak{R}$  に対して、

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi, \text{Ind}_H^G \pi) = \#\{g \in N(H)/H; \pi \simeq \pi^g\}.$$

(4) 特に,  $\mathfrak{R}$  のすべての underlying subgroup  $H$  が条件  $N(H) = H$  をみたせば,  $\mathfrak{R}$  は既約表現のみから成る.

(証明) (1)  $(\pi_1; H) \in \mathfrak{R}$  と  $(\pi_2; K) \in \mathfrak{R}$  に対して,  $\text{Ind}_H^G \pi_1$  と  $\text{Ind}_K^G \pi_2$  が disjoint でないと仮定する. このとき  $\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi_1, \text{Ind}_K^G \pi_2) > 0$  となるから, 定理 A により,  $H = K^g$  かつ  $\pi_1 \simeq \pi_2^g$  をみたす  $g \in G$  が存在する. したがって,  $\text{Ind}_H^G \pi_1 \simeq \text{Ind}_K^G \pi_2$ .

(2) 十分性は明らかである. 逆に,  $\text{Ind}_H^G \pi_1 \simeq \text{Ind}_K^G \pi_2$  が成り立てば, 特にそれらは disjoint でないので (1) の議論によって  $H = K^g$  かつ  $\pi_1 \simeq \pi_2^g$  をみたす  $g \in G$  が存在する.

(3) 定理 A によって,

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi, \text{Ind}_H^G \pi) &= \#\{g \in H \backslash G/H; H = H^g, \pi \simeq \pi^g\} \\ &= \#\{g \in H \backslash N(H)/H; \pi \simeq \pi^g\} \\ &= \#\{g \in N(H)/H; \pi \simeq \pi^g\}. \end{aligned}$$

(4) (3) により明らかである. (証明終)

## §2. 定理 A の証明

$G$  の部分群  $H$  の表現  $(\pi, W)$  に対して, 誘導表現  $U = \text{Ind}_H^G \pi$  は Hilbert 空間

$$\mathfrak{H} = \left\{ f : G \rightarrow W; \begin{array}{l} \text{(i)} \quad f(gh) = \pi(h)^{-1} f(g); \\ \text{(ii)} \quad \sum_{g \in G/H} \|f(g)\|_W^2 < +\infty \end{array} \right\}$$

上に

$$(U(g_1)f)(g_2) = f(g_1^{-1}g_2), \quad g_1, g_2 \in G$$

として実現される. さて2つの表現  $(\pi_1, W_1; H)$ ,  $(\pi_2, W_2; K)$  からの誘導表現を  $(U_1 = \text{Ind}_H^G \pi_1, \mathfrak{H}_1)$ ,  $(U_2 = \text{Ind}_K^G \pi_2, \mathfrak{H}_2)$  とおく. ここで, Mackey [7] に従って, intertwining operator  $A \in \text{Hom}_G(U_1, U_2)$  の行列成分を導入しよう. 固定された  $y \in G$  と  $w \in W_1$  に対して,  $f_{y,w} \in \mathfrak{H}_1$  を

$$f_{y,w}(g) = \begin{cases} \pi_1(y^{-1}g)^{-1}w, & \text{for } g \in yH; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

によって定義する。さて、 $A \in \text{Hom}_G(U_1, U_2)$  と  $x, y \in G$  に対して、 $A_{x,y} \in B(W_1, W_2)$  が

$$A_{x,y}(w) = Af_{y,w}(x), \quad w \in W_1$$

によって定まる。これを intertwining operator  $A$  の行列成分という。行列成分は次の3つの性質をみたすことが判る:

$$(21) \quad A_{g_x k, g_y h} = \pi_2(k)^{-1} A_{x,y} \pi_1(h), \quad x, y \in G, \quad h \in H, \quad k \in K;$$

(22) ある定数  $M > 0$  が存在して、

$$\sum_{x \in G/K} \|A_{x,y}(w)\|_{W_2}^2 \leq M \|w\|_{W_1}^2, \quad w \in W_1, \quad y \in G;$$

(23) ある定数  $M > 0$  が存在して、

$$\sum_{y \in G/H} \|A_{x,y}^*(v)\|_{W_1}^2 \leq M \|v\|_{W_2}^2, \quad v \in W_2, \quad x \in G.$$

ところで、上記3つの性質をみたす写像  $a : G \times G \rightarrow B(W_1, W_2)$  の全体は線型空間になるが、これを  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\pi_1, \pi_2)$  で表す。一方、 $A \in \text{Hom}_G(U_1, U_2)$  の行列成分は写像  $G \times G \rightarrow B(W_1, W_2)$  を引き起こしていると思なせるから、線型写像  $\text{Hom}_G(U_1, U_2) \rightarrow \mathfrak{A}$  が定義される。この写像は単射ではあるが、一般には全射ではない。しかしながら、次の事実が証明される。

補題 1 (Mackey [7, Lemma A]).  $\dim \text{Hom}_G(U_1, U_2) = \dim \mathfrak{A}$ .

(証明) 概略を述べる。  $\text{Hom}_G(U_1, U_2) \rightarrow \mathfrak{A}$  の単射性から  $\dim \text{Hom}_G(U_1, U_2) \leq \dim \mathfrak{A}$  が従う。よって  $\dim \text{Hom}_G(U_1, U_2) = \infty$  のときは、主張は正しい。そこで、 $\dim \text{Hom}_G(U_1, U_2) < \infty$  の場合について証明の概略を述べておこう。与えられた  $a \in \mathfrak{A}$  に対して、operator  $A_0$  を

$$A_0 f(g) = \sum_{y \in G/H} a_{g,y} f(y), \quad g \in G, f \in \mathfrak{H}_{10}$$

により定義する. 定義域  $\mathfrak{H}_{10}$  は例えば,  $f \in \mathfrak{H}_1$  で  $\text{supp } f/H$  が有限集合となるものの全体としておく. このとき容易に判るが,  $A_0$  は2つの表現  $(U_1, \mathfrak{H}_1), (U_2, \mathfrak{H}_2)$  を intertwine する, 即ち,

$$U_2(g)A_0 \subset A_0U_1(g), \quad g \in G.$$

さらに  $A_0$  は, その性質を保ったまま閉作用素  $A$  に拡張できる. 次に  $A$  の極分解を  $A = WT$  とすると,  $W \in \text{Hom}_G(U_1, U_2)$  かつ  $T$  は  $(U_1, \mathfrak{H}_1)$  とそれ自身を intertwine する非負自己共役作用素となる. したがって,  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して  $W(1+T)^{-n} \in \text{Hom}_G(U_1, U_2)$ . ところで仮定より,  $\{W(1+T)^{-n}\}_{n=0}^\infty$  の生成する線型空間は有限次元である. よって射影作用素  $P \in B(\mathfrak{H}_1)$  を  $P = W^*W$  として  $\{P(1+T)^{-n}, (1-P)(1+T)^{-m}\}_{n,m=0}^\infty$  の生成する線型空間は有限次元であるが, これは  $B(\mathfrak{H}_1)$  の有限次元可換  $C^*$ -subalgebra となる. 特に,  $(1+T)^{-1}$  のスペクトルは有限個ですべて固有値であり,  $T \in B(\mathfrak{H}_1)$ . 即ち,  $A = WT \in \text{Hom}_G(U_1, U_2)$  となる. この  $A$  の行列成分が, 初めに与えられた  $a \in \mathfrak{A}$  に一致するのは見やすい. 結局,  $\dim \text{Hom}_G(U_1, U_2) < \infty$  のときは, 写像  $\text{Hom}_G(U_1, U_2) \rightarrow \mathfrak{A}$  は同型になることが示された. (証明終)

補題 2.  $\Delta = \{(g, g); g \in G\} \subset G \times G$  とおくと, 対応  $\Delta(g_1, g_2)(K \times H) \rightarrow Kg_1^{-1}g_2H$  は  $\Delta \backslash (G \times G) / (K \times H)$  から  $K \backslash G / H$  の上への全単射を与える.

証明は簡単である. 条件 (A1) によって  $a \in \mathfrak{A}$  は  $\Delta \backslash (G \times G) / (K \times H)$  の代表系で自由に値を与えると,  $G \times G$  上で一意的に定まる. したがって, 補題 2 に注意しつつ

$$\mathfrak{A}(KgH) = \{a \in \mathfrak{A}; a_{x,y} = 0 \text{ if } x^{-1}y \notin KgH\}$$

とおけば,

$$\text{補題 3. } \dim \mathfrak{A} = \sum_{g \in K \backslash G / H} \dim \mathfrak{A}(KgH).$$

ところで,  $\mathfrak{A}$  の定義より各  $a \in \mathfrak{A}(KgH)$  に対して,  $a_{e,g} \in B(W_1, W_2)$  であるが, さらに次が成り立つ.

補題 4. 対応  $a \rightarrow a_{e,g}$  は  $\mathfrak{A}(KgH)$  から  $\mathcal{I}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g)$  の上への線型同型写像である.

(証明) 1.  $a_{e,g} \in \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g)$  を示そう. そのためには, (J1) – (J3) を確かめればよい.  $h \in H \cap K^g$  とする.  $ghg^{-1} \in K$  と (A1) に注意して,

$$\begin{aligned} a_{e,g}\pi_1(h) &= a_{e,gh} = a_{e,ghg^{-1}g} \\ &= a_{(ghg^{-1})^{-1},g} = \pi_2(ghg^{-1})a_{e,g} = \pi_2^g(h)a_{e,g} \end{aligned}$$

を得る. よって, (J1) が成り立つ. 次に, (J2) を示すために,  $w \in W_1$  をとる. 性質 (A1) によって,

$$\sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|a_{e,g}\pi_1(h)w\|_{W_2}^2 = \sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|a_{e,gh}(w)\|_{W_2}^2 = \sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|a_{h^{-1}g^{-1},e}(w)\|_{W_2}^2.$$

ここで  $H \ni h \rightarrow h^{-1}g^{-1}K \in G/K$  は,  $H \cap K^g \setminus H$  から  $G/K$  の中への単射を引き起こすことに注意すると,

$$\sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|a_{h^{-1}g^{-1},e}(w)\|_{W_2}^2 \leq \sum_{x \in G/K} \|a_{x,e}(w)\|_{W_2}^2 \leq M\|w\|_{W_1}^2.$$

最後の不等式は (A2) による. したがって,

$$\sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|a_{e,g}\pi_1(h)w\|_{W_2}^2 \leq M\|w\|_{W_1}^2$$

となり, (J2) が示された. (J3) は (A3) を用いて, 同様に示される.

2. 写像  $a \rightarrow a_{e,g}$  が単射であることは明らかであろう.
3. その写像が全射であること. 与えられた  $L \in \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g)$  に対して  $a : G \times G \rightarrow B(W_1, W_2)$  を定義したいのだが, まず,

$$a_{x,y} = 0 \quad \text{if } x^{-1}y \notin KgH$$

とおく. 次に  $x^{-1}y \in KgH$  のときは,  $x^{-1}y = kgh$ ,  $k \in K$ ,  $h \in H$  と書けるが,  $L \in \text{Hom}_{H \cap K^g}(\pi_1, \pi_2^g)$  なので,  $\pi_2(k)^{-1}L\pi_1(h)$  は  $h, k$  の選び方に依らない. そこで,

$$a_{x,y} = \pi_2(k)^{-1}L\pi_1(h), \quad x^{-1}y = kgh, \quad k \in K, \quad h \in H$$

とおく. このとき,  $a_{e,g} = L$  は自明である. また, (21) 及び support に関する条件も殆ど明らかである. 条件 (22) を証明しよう. そのために  $y \in G$  を固定して,  $\sum_{x \in G/K} \|a_{x,y}(w)\|_{W_2}^2$  を評価したい.  $a$  の定義の仕方より和は  $x^{-1}y \in KgH$  となるような  $x \in G/K$  を走らせてとればよい. さらに,

$$x^{-1}y \in KgH \iff y^{-1}x \in Hg^{-1}K \iff x \in yHg^{-1}K$$

であるから,

$$\sum_{x \in G/K} \|a_{x,y}(w)\|_{W_2}^2 = \sum_{x \in yHg^{-1}K/K} \|a_{x,y}(w)\|_{W_2}^2$$

となる. ここで  $H \ni h \rightarrow yh^{-1}g^{-1}K \in G/K$  は,  $H \cap K^g \setminus H$  から  $G/K$  の中への単射を引き起こすから,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in yHg^{-1}K/K} \|a_{x,y}(w)\|_{W_2}^2 &= \sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|a_{yh^{-1}g^{-1},y}(w)\|_{W_2}^2 = \sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|a_{e,gh}(w)\|_{W_2}^2 \\ &= \sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|L\pi_1(h)w\|_{W_2}^2 \leq M\|w\|_{W_1}^2. \end{aligned}$$

最後の不等式は (22) による. こうして,

$$\sum_{x \in G/K} \|a_{x,y}(w)\|_{W_2}^2 \leq M\|w\|_{W_1}^2$$

を得て, (22) が示された. (23) も同様であり, 全射性の証明が完結する. (証明終)

補題 1,3,4 から次の極めて一般的な結果が従う.

命題 1. 2つの任意の表現  $(\pi_1; H), (\pi_2; K)$  に対して,

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi_1, \text{Ind}_K^G \pi_2) = \sum_{g \in K \setminus G/H} \dim \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g).$$

注意.  $G$  が有限群のときは, よく知られているように

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi_1, \text{Ind}_K^G \pi_2) = \sum_{g \in K \setminus G/H} \dim \text{Hom}_{H \cap K^g}(\pi_1, \pi_2^g)$$

が成り立つ. 命題 1 は, 強い意味での intertwining operator ((J2), (J3) を思い出せ.) を考えることで, 一般の無限離散群に対しても同様の等式が成立することを意味している.

以上の準備をもって, 定理 A が証明できる.

(定理 A の証明)  $\dim \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g) > 0$  と仮定しよう. 条件 (BH1), (BH2) によって,  $H = K^g$  を得る. したがって, 2つの条件 (J2), (J3) は,  $\text{Hom}_{H \cap K^g}(\pi_1, \pi_2^g)$  に対する制限にならない. 即ち,

$$\mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g) = \text{Hom}_{H \cap K^g}(\pi_1, \pi_2^g) = \text{Hom}_H(\pi_1, \pi_2^g).$$

$\pi_1, \pi_2^g$  とも  $H$  の既約表現であるから,  $\dim \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g) > 0$  は  $\dim \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g) = 1$  かつ  $\pi_1 \simeq \pi_2^g$  を意味する. ここで, 命題 1 を用いると

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi_1, \text{Ind}_K^G \pi_2) &= \sum_{g \in K \backslash G/H} \dim \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g) \\ &= \#\{g \in K \backslash G/H; \dim \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g) > 0\} \\ &= \#\{g \in K \backslash G/H; H = K^g, \pi_1 \simeq \pi_2^g\} \end{aligned}$$

を得る. (証明終)

### §3. 種々の判定条件の導出

§1 において我々は, basic hypotheses という2つの条件 (BH1), (BH2) を導入し, 部分群の既約表現の族  $\mathfrak{R}$  から得られる  $G$  の表現の族  $\tilde{\mathfrak{R}}$  に対する既約性と同値性の判定条件を確立した. 得られた結果 (定理 B) は適用範囲が広いかわり, 条件 (BH2) がやや使いにくくなっている. 本節では, 適用範囲の広さを些か犠牲にして basic hypotheses に代わる簡単な条件を導く. それでもなお, 有限次元表現からの誘導は完全にカバーされるので, 既知の判定条件のうち大部分は我々の結果の直接の帰結として得られる.

まず, いくつかの記号を新たに導入しよう.

定義.  $G$  の2つの部分群  $H, K$  が

$$|H : H \cap K| < \infty, \quad |K : H \cap K| < \infty$$

をみたすとき,  $H \sim K$  と書く. この  $\sim$  は部分群間の同値関係になる.

定義.  $G$  の部分群  $H$  に対して,

$$Q(H) = Q_G(H) = \{g \in G; H \sim H^g\}$$

とおくと,  $Q(H)$  は  $G$  の部分群になる. これを  $H$  の quasi-normalizer という.  $N(H)$  を  $H$  の normalizer とすると,  $H \subset N(H) \subset Q(H)$ .

注意. 数論の文献 (例えば, Shimura [15, Chap.3]) では ( $G$  として特殊なものを考えることにはなるが),  $H \sim K$  なる2つの部分群は commensurable であるといい,  $Q(H)$  を  $H$  の commensurator と呼んでいる. ここでは, Corwin [1] に従って quasi-normalizer と呼ぶことにする.

定義. 2つの部分群  $H, K$  に対して,

$$(K \backslash G / H)_f = \{g \in K \backslash G / H; H \sim K^g\}$$

とおく. このとき,  $(H \backslash G / H)_f = H \backslash Q(H) / H$  となることにも注意しておこう.

命題 2. 2つの表現  $(\pi_1; H), (\pi_2; K)$  が, 条件

$$(F) \quad H \not\sim K^g \text{ をみたす全ての } g \in G \text{ に対して, } \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g) = \{0\}$$

をみたせば,

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi_1, \text{Ind}_K^G \pi_2) = \sum_{g \in (K \backslash G / H)_f} \dim \text{Hom}_{H \cap K^g}(\pi_1, \pi_2^g).$$

逆に, この等式が成立し, かつ値が有限のときは, 条件 (F) が成り立つ.

(証明) 命題 1 により

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi_1, \text{Ind}_K^G \pi_2) = \sum_{g \in K \backslash G / H} \dim \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g).$$

仮定(F)により, 和は  $H \sim K^g$  をみたすような  $g \in K \backslash G/H$  に対してとればよいから,

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi_1, \text{Ind}_K^G \pi_2) = \sum_{g \in (K \backslash G/H)_f} \dim \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g).$$

したがって,  $g \in (K \backslash G/H)_f$  に対して  $\mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g) = \text{Hom}_{H \cap K^g}(\pi_1, \pi_2^g)$  であることを証明すれば十分である. さて  $L \in \text{Hom}_{H \cap K^g}(\pi_1, \pi_2^g)$  とすると,

$$\sum_{h \in H \cap K^g \backslash H} \|L\pi_1(h)w\|_{W_2}^2 \leq |H : H \cap K^g| \|L\|^2 \|w\|_{W_1}^2, \quad w \in W_1$$

を得る. 即ち, (J2) が成り立つ. 同様に (J3) も従うから  $L \in \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g)$ . 逆は既に明らかであろう. (証明終)

次に,  $G$  の部分群の既約表現の族  $\mathfrak{R}$  に対して, (BH1),(BH2) に代わる以下の3条件を考えよう:

- (R)  $\mathfrak{R}$  の任意の2つの表現に対して (F) が成り立つ;
- (G1)  $\mathfrak{R}$  の underlying subgroup 全体は  $G$  の共役に関して閉じている;
- (G2)  $\mathfrak{R}$  の2つの underlying subgroup  $H, K$  に対して,  $H \sim K \iff H = K$ .

ここで (G1),(G2) は  $G$  の部分群の族に対する条件であることに注意しておこう.

定理 C (既約性・同値性の判定条件).  $\mathfrak{R}$  が (R),(G1),(G2) をみたしているとする. このとき,

- (1)  $\mathfrak{R}$  の2つの表現は互いに同値または disjoint である.
- (2) 2つの表現  $(\pi_1; H) \in \mathfrak{R}$ ,  $(\pi_2; K) \in \mathfrak{R}$  に対して  $\text{Ind}_H^G \pi_1 \simeq \text{Ind}_K^G \pi_2$  となる必要十分条件はある  $g \in G$  によって  $H = K^g$  かつ  $\pi_1 \simeq \pi_2^g$  となることである.
- (3)  $(\pi; H) \in \mathfrak{R}$  に対して,

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi, \text{Ind}_H^G \pi) = \#\{g \in N(H)/H; \pi \simeq \pi^g\}.$$

- (4) 特に,  $\mathfrak{R}$  のすべての underlying subgroup  $H$  が条件  $N(H) = H$  をみたせば,  $\mathfrak{R}$  は既約表現のみから成る.

(証明) 与えられた  $\mathfrak{R}$  は (BH1) の意味で  $G$  に関する共役で閉じているとは限らない。そこで、

$$\mathfrak{R}^* = \{(\pi^g; H^g); (\pi; H) \in \mathfrak{R}, g \in G\}$$

を考えると (BH1) は明らかに成り立つ。さらに (BH2) が成り立つことを示せば、定理 B が適用できて結果を得る。そこで、 $(\pi_1^{g_1}; H^{g_1}) \in \mathfrak{R}^*$ ,  $(\pi_2^{g_2}; K^{g_2}) \in \mathfrak{R}^*$  として  $H^{g_1} \neq K^{g_2}$  と仮定する。このとき、 $H \neq K^{g_2 g_1^{-1}}$  に注意して、(G1), (G2) を用いると、 $H \not\sim K^{g_2 g_1^{-1}}$ 。ここで (R) に注意すれば、 $\mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^{g_2 g_1^{-1}}; H, K^{g_2 g_1^{-1}}) = \{0\}$ 。よって、 $\mathcal{J}(\pi_1^{g_1}, \pi_2^{g_2}; H^{g_1}, K^{g_2}) = \{0\}$  となり (BH2) が示された。(証明終)

(G1), (G2) の下では、任意の underlying subgroup  $H$  は  $Q(H) = N(H)$  をみたしている。 $\mathfrak{R}$  の既約性だけならば、(G1), (G2) に代わって、次の条件が使い易い:

(Q)  $\mathfrak{R}$  の全ての underlying subgroup  $H$  に対して  $Q(H) = H$ 。

命題 3.  $\mathfrak{R}$  が (R), (Q) をみたせば、 $\mathfrak{R}$  は既約表現だけから成る。

(証明) 命題 2 によって

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi, \text{Ind}_H^G \pi) = \sum_{g \in (H \backslash G/H)_f} \dim \text{Hom}_{H \cap H^g}(\pi, \pi^g).$$

一方、仮定 (Q) によって、

$$(H \backslash G/H)_f = H \backslash Q(H)/H = \{HeH\}.$$

したがって

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi, \text{Ind}_H^G \pi) = \dim \text{Hom}_H(\pi, \pi) = 1,$$

即ち、 $\text{Ind}_H^G \pi$  は既約表現である。(証明終)

ところで (Q)  $\Rightarrow$  (G2) に注意しよう。実際、 $H \sim K$  とすると  $Q(H) = Q(K)$  がすぐに出て、(Q) を用いると  $H = K$  となる。よって、定理 C と命題 3 より次の定理が従う。

定理 D (既約性・同値性の判定条件).  $\mathfrak{R}$  が (R), (G1), (Q) をみたしているとする。このとき、 $\mathfrak{R}$  は既約表現のみから成る。さらに、2つの表現  $(\pi_1; H) \in \mathfrak{R}$ ,  $(\pi_2; K) \in \mathfrak{R}$  に対し

て  $\text{Ind}_H^G \pi_1 \simeq \text{Ind}_K^G \pi_2$  となる必要十分条件はある  $g \in G$  によって  $H = K^g$  かつ  $\pi_1 \simeq \pi_2^g$  となることである.

後で注意するが (Q) は  $G$  の正則表現の既約分解とその多様性に関連し興味深い (§4. 命題 5). ここでは, 有限次元表現に対する次の重要な結果を証明しておこう.

補題 5. 任意の 2 つの有限次元表現  $(\pi_1, W_1; H)$ ,  $(\pi_2, W_2; K)$  に対して, (F) が成り立つ.

(証明)  $L \in \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2^g; H, K^g)$  とする. 性質 (J2) によって, 定数  $M > 0$  が存在して

$$\sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|L\pi_1(h)w\|_{W_2}^2 \leq M \|w\|_{W_1}^2, \quad w \in W_1$$

が成り立つ. ここで,  $w$  を  $W_1$  の正規直交基底を走らせて, 両辺の和をとると

$$\sum_{h \in H \cap K^g \setminus H} \|L\pi_1(h)\|_{HS}^2 \leq M \dim W_1.$$

したがって,

$$\|H : H \cap K^g\| \|L\|_{HS}^2 \leq M \dim W_1.$$

同様に性質 (J3) を用いて,

$$\|K^g : H \cap K^g\| \|L^*\|_{HS}^2 \leq M \dim W_2$$

を得る. さて, ここで  $g \in G$  は  $H \neq K^g$  をみたしているものとする, 上の 2 式に現れた指数のうち少なくとも一方は無限である. ところが, 仮定より  $\dim W_1 < \infty$  かつ  $\dim W_2 < \infty$  なので,  $\|L\|_{HS} = 0$  又は  $\|L^*\|_{HS} = 0$  が導かれ, 何れにせよ  $L = 0$ . (証明終)

こうして, 有限次元表現からの誘導だけを扱うのであれば, 条件 (F) は自動的であり, underlying subgroups に対する条件 (G1), (G2) だけを調べればよいことになる. 具体例は次節で与えられる. 今までの議論から次の事実が容易に導かれる.

系 1 (Kleppner [5]).  $\pi_1, \pi_2$  を各々,  $G$  の部分群  $H, K$  の有限次元表現とすれば,

$$\dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \pi_1, \text{Ind}_K^G \pi_2) = \sum_{g \in (K \backslash G / H)_f} \dim \text{Hom}_{H \cap K^g}(\pi_1, \pi_2^g).$$

系 2.  $\pi$  を  $G$  の部分群  $H$  の有限次元表現とすれば,

$$\dim \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G \pi, \operatorname{Ind}_H^G \pi) = \sum_{g \in H \backslash Q(H)/H} \dim \operatorname{Hom}_{H \cap H^g}(\pi, \pi^g).$$

特に,  $\operatorname{Ind}_H^G \pi$  が既約になるための必要十分条件は, 全ての  $g \in Q(H) - H$  に対して  $\pi$  と  $\pi^g$  とが  $H \cap H^g$  の表現として disjoint になることである.

注意. 系 1 で  $\pi_1, \pi_2$  とともに 1 次元表現のときは Mackey [7] による. 系 2 の後半の主張は Corwin [1] が intertwining number theorem を用いずに導いた.

系 3 (Saito [14, Theorem 1,2]).  $\mathfrak{O}$  を次の 2 つ性質をもつ  $G$  の部分群の族とする:

- (i)  $H \in \mathfrak{O}, K \in \mathfrak{O}, g \in G$  が  $|H : H \cap K^g| < \infty$  をみたせば  $H \subset K^g$  である;
- (ii)  $H \in \mathfrak{O}, g \in G$  が  $H^g \subset H$  をみたせば,  $g \in N(H)$  である.

ここで  $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{O} \text{ に属する部分群の 1 次元表現}\}$  とすれば,  $\mathfrak{R}$  に対して定理 C と同じ結論 (1)-(4) が成り立つ.

(証明)  $\mathfrak{O}^* = \{H^g; H \in \mathfrak{O}, g \in G\}$  に対しても (i), (ii) は相変わらず成り立つ.  $\mathfrak{O}^*$  が (G1) をみたすことは明らか. (G2) をみたすことは次のようにして示される.  $H^{g_1} \in \mathfrak{O}^*$ ,  $K^{g_2} \in \mathfrak{O}^*$  が  $H^{g_1} \sim K^{g_2}$  をみたすと仮定する. 容易に,

$$|H : H \cap K^{g_2 g_1^{-1}}| < \infty, \quad |K : K \cap H^{g_1 g_2^{-1}}| < \infty$$

が導かれる. ここで, (i) を用いれば  $H^{g_1} = K^{g_2}$  が出る.  $\mathfrak{R}$  は 1 次元表現のみを考えているので, 補題 5 より条件 (R) も成り立つ. よって定理 C の仮定は全てみたされることになる. (証明終)

注意. (1) 系 3 は Saito [14] をそのまま引用したが, 証明をみてわかるように条件 (ii) は不要である.

(2) Hirai [2] では, 上の系 3 が 1 次元表現からの誘導とは限らないものにも適用できるように拡張された. しかしながら, そこに現れてくる条件は, (R), (G1), (Q) を導くので定理 D に含まれる.

## §4. 具体例

4.1. 自由群  $G$  を2個以上の元から生成される自由群とし, その極大可換部分群の全体を  $\mathfrak{O}$  とおく. まず次の事実から始めよう.

補題6.  $\mathfrak{O}$  は (G1), (Q) をみたす.

(証明) (G1) は明らかである. (Q) を示すために  $H \in \mathfrak{O}$ ,  $g \in Q(H)$  とする.  $g \in H$  を証明すればよい. まず,  $H$  は自由群の部分群ということで自由, しかも仮定より可換であるから, ある  $\theta \in G$  をとって  $H = \langle \theta \rangle$  と書ける. このとき  $H^g = \langle \phi \rangle$ ,  $\phi = g^{-1}\theta g$ . さて,  $H \sim H^g$  なので,  $|H : H \cap H^g| < \infty$ . よって  $H \cap H^g \neq \{e\}$ . したがって, ある整数  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$  があって,  $H \cap H^g = \langle \theta^p \rangle = \langle \phi^q \rangle$  となる. よって  $\theta^p = \phi^{\pm q}$ . さらに

$$\theta^p = \phi^{\pm q} = \phi^{-1}\phi^{\pm q}\phi = \phi^{-1}\theta^p\phi = (\phi^{-1}\theta\phi)^p.$$

$G$  は自由群なので,  $\theta = \phi^{-1}\theta\phi$ . すると,  $\langle \theta, \phi \rangle$  は可換群となるが,  $H, H^g$  とも極大可換部分群であるから,  $\langle \theta \rangle = \langle \theta, \phi \rangle = \langle \phi \rangle$ . 特に,  $\phi = \theta^{\pm 1}$ , 即ち,  $g^{-1}\theta g = \theta^{\pm 1}$  である. よって,

$$g^{-2}\theta g^2 = g^{-1}\theta^{\pm 1}g = (g^{-1}\theta g)^{\pm 1} = (\theta^{\pm 1})^{\pm 1} = \theta.$$

したがって,  $g^2 = \theta^{-1}g^2\theta = (\theta^{-1}g\theta)^2$  となり,  $g = \theta^{-1}g\theta$  を得る.  $H$  は極大可換部分群なので,  $g \in H$ . (証明終)

$H \in \mathfrak{O}$  の既約表現は全て1次元表現であることに注意すれば,  $\mathfrak{R} = \{ G \text{ の極大可換部分群の既約表現} \}$  に定理Cが適用できて, 次の結果が得られる.

命題4.  $G$  の表現の族  $\mathfrak{R}$  は既約表現だけから成る.  $\chi_1, \chi_2$  を各々  $H \in \mathfrak{O}$ ,  $K \in \mathfrak{O}$  の1次元表現とすると,  $\text{Ind}_H^G \chi_1 \simeq \text{Ind}_K^G \chi_2$  となるための必要十分条件は, ある  $g \in G$  が存在して  $H = K^g$ ,  $\chi_1 = \chi_2^g$  となることである.

上の命題4で構成した既約表現は  $G$  の正則表現の既約分解及びその多様性に関連していることが知られている (Kawakami [4], Yoshizawa [17]). しかしながら, その議論は自由群独自のものではなく, 次の一般的な主張が成り立つ.

命題 5.  $G$  を離散群とし,  $\mathcal{O} = \{H \subset G; \text{可換部分群}, Q(H) = H\}$  とおく. このとき, 各  $H \in \mathcal{O}$  は

$$(G \text{ の正則表現}) \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} \text{Ind}_H^G \chi \, d\chi$$

により  $G$  の正則表現の既約分解を与える. ここに,  $\hat{H}$  は  $H$  の 1 次元表現の全体を表し,  $d\chi$  は  $\hat{H}$  のハール測度である. さらに, 互いに共役でない  $\mathcal{O}$  の元からは全く異なる既約分解が得られる.

(証明) 概略のみ述べる.  $(U, \ell^2(G))$  を  $G$  の左正則表現とする.  $f \in \ell^2(G)$  に対して,

$$\hat{f}(g; \chi) = \sum_{a \in H} f(ga) \chi(a), \quad \chi \in \hat{H}, g \in G,$$

とおくと, 関数  $g \rightarrow \hat{f}(g; \chi)$  は  $\text{Ind}_H^G \chi$  の表現空間に含まれる. ここで,

$$\sum_{g \in G} |f(g)|^2 = \sum_{g \in G/A} \sum_{a \in A} |f(ga)|^2 = \int_{\hat{H}} \sum_{g \in G/A} |\hat{f}(g; \chi)|^2 \, d\chi$$

に注意すれば, 分解

$$U \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} \text{Ind}_H^G \chi \, d\chi$$

が得られる.  $\mathcal{O}$  が (G1), (Q) をみたしていることは明らかであるから, 定理 D より命題の主張が従う. (証明終)

注意. 可換部分群  $H$  が  $Q(H) = H$  をみたせば, それは極大可換部分群である. 命題 5 の条件をみたす  $\mathcal{O}$  の例については, あとの補題 7, 10 も参照せよ.

4.2. 自由積. 自由群は  $G = \mathbf{Z} * \mathbf{Z} * \dots$  (生成元の個数だけ積を作る) なので, 自由積の特殊なものである. この節では, 前節の議論を参照して自由積  $G = A * B$  の既約表現を構成しよう.

まず, 自由積に関する一般的事実を列挙しておこう. 証明は [8, Chap.4] 等を参照すれば容易である.

- (a)  $g \in G - A$  ならば  $A \cap A^g = \{e\}$ ;
- (b) 全ての  $g \in G$  に対して,  $A \cap B^g = \{e\}$ ;

- (c)  $g \in G$  が  $g^n \in A$  かつ  $g^n \neq e$  をみたせば  $g \in A$ ;
- (d)  $g \in G$  が  $A$  の共役部分群にも  $B$  の共役部分群にも属していないとする. このとき,  $x \in G$  と  $n \neq 0$  が  $x^n = g^n$  をみたせば  $x = g$ ;
- (e)  $G$  の可換部分群  $H$  に対して次の3通りの場合の何れかが起こる: (e1)  $H$  は  $A$  の共役部分群の部分群である; (e2)  $H$  は  $B$  の共役部分群の部分群である; (e3) 全ての  $g \in G$  に対して  $H \cap A^g = H \cap B^g = \{e\}$  であり, ある  $c \in G$  があって  $H = \langle c \rangle \cong \mathbf{Z}$ .

補題 7.  $A, B$  の極大可換部分群の全体  $\mathfrak{C}_A, \mathfrak{C}_B$  が各々 (Q) をみたしているとする. このとき,  $G = A * B$  の極大可換部分群で位数無限のもの全体の  $\mathfrak{C}$  は, (G1), (Q) をみたす.

(証明) (G1) は明らか. (G2) を示そう.  $H \in \mathfrak{C}, K \in \mathfrak{C}$  を  $H \sim K$  をみたすものと仮定する.  $|H : H \cap K| < \infty, |H| = \infty$  なので  $H \cap K \neq \{e\}$  である.  $G$  の可換部分群  $H, K$  に対して, 上記 (e1)-(e3) に従って3つの場合に分けて考える.

(i) ある  $g \in G$  があって  $H \subset A^g$ .  $\{e\} \neq H \cap K \subset A^g \cap K$  より,  $K$  に対して (e2), (e3) はありえない. よって  $K$  は  $A$  のある共役部分群に含まれる.  $K \subset A^\gamma$  としよう. 再び,  $\{e\} \neq H \cap K \subset A^g \cap A^\gamma$  より  $A \cap A^{\gamma g^{-1}} \neq \{e\}$ . よって,  $\gamma g^{-1} \in A$ , 即ち,  $K \subset A^\gamma = A^g$ . ここで  $\mathfrak{C}_A$  に対する仮定から, (G2) をみたすことを思い出せば,  $H = K$ .

(ii) ある  $g \in G$  があって  $H \subset B^g$ . この場合は (i) と同様であり  $H = K$  をえる.

(iii) 全ての  $g \in G$  に対して  $H \cap A^g = H \cap B^g = \{e\}$  であり, ある  $c \in G$  があって  $H = \langle c \rangle \cong \mathbf{Z}$ . 明らかに,  $K$  に対して (e1), (e2) はありえない. すると,  $K$  も無限巡回群であり  $K = \langle d \rangle$  と書ける.  $H \cap K \neq \{e\}$  なので  $p \geq 1, q \geq 1$  をとって  $H \cap K = \langle c^p \rangle = \langle d^q \rangle$  と書ける. 簡単な考察により  $c^p = d^{\pm q}$ . よって,

$$c^p = d^{-1} d^{\pm q} d = d^{-1} c^p d = (d^{-1} c d)^p.$$

$c$  は  $A, B$  の共役部分群に属さないから,  $c = d^{-1} c d$ . よって  $\langle c, d \rangle$  は  $H, K$  を含む可換群となるが, それらは極大なので,  $H = \langle c, d \rangle = K$  である. こうして (G2) が示された.

(G1), (G2) を示したので (Q) の代わりに,  $H \in \mathfrak{C}$  に対して  $N(H) = H$  を証明すれば十分である.  $\gamma \in N(H)$  とする.  $H$  は前半の通り (i)-(iii) に分けて考える.

(i)  $H^\gamma = H \subset A^g$  より  $H \subset A^{g\gamma^{-1}} \cap A^g$ .  $H$  は位数無限なので、特に、 $A^{g\gamma^{-1}} \cap A^g \neq \{e\}$ .  
よって  $g\gamma^{-1}g^{-1} \in A$ , そして  $\gamma \in A^g$ .  $\mathfrak{C}_A$  に対する仮定 (Q) より  $\gamma \in N_{A^g}(H) = H$ .

(ii) は (i) と同様である.

(iii)  $\langle c \rangle = H = H^\gamma = \langle \gamma^{-1}c\gamma \rangle$  なので、 $c = \gamma^{-1}c\gamma$  又は  $c = \gamma^{-1}c^{-1}\gamma$ . 前者の場合は、 $\langle c, \gamma \rangle$  が  $H$  を含む可換群になるが、 $H$  は極大なので  $\gamma \in H$ . 後者の場合は、まず、

$$c = \gamma^{-1}c^{-1}\gamma = \gamma^{-1}(\gamma^{-1}c\gamma)\gamma = \gamma^{-2}c\gamma^2$$

から  $\gamma^2 = c^p$  と表せることが判る. このとき、

$$c^p = \gamma^2 = \gamma\gamma^2\gamma^{-1} = \gamma c^p \gamma^{-1} = (\gamma c \gamma^{-1})^p.$$

$c$  は  $A, B$  の共役部分群に属さないから、 $c = \gamma c \gamma^{-1}$ . これは  $c^{-1} = \gamma c \gamma^{-1} = c$  を導き、矛盾である. つまり、後者の場合は起こり得ない. (証明終)

この補題7と定理Dをあわせれば、命題4の一般化が得られる.

命題6.  $G = A * B$  において  $A, B$  の極大可換部分群の全体  $\mathfrak{C}_A, \mathfrak{C}_B$  は各々 (Q) をみたしているとする.  $\mathfrak{R} = \{G \text{ の極大可換部分群で位数無限のものの既約表現}\}$  とおく. このとき、 $G$  の表現の族  $\mathfrak{R}$  は既約表現だけから成る.  $\chi_1, \chi_2$  を各々  $H \in \mathfrak{C}, K \in \mathfrak{C}$  の1次元表現とすると、 $\text{Ind}_H^G \chi_1 \simeq \text{Ind}_K^G \chi_2$  となるための必要十分条件は、ある  $g \in G$  が存在して  $H = K^g, \chi_1 = \chi_2^g$  となることである.

注意. 補題7, 命題6では群  $A$  に対する条件 “ $A$  の極大可換部分群の全体  $\mathfrak{C}_A$  は (Q) をみたしている” を考えたが、例えば、 $A$  が可換群又は自由群のときはみたされている. 実際、可換群に対しては明らかであるし、自由群のときは補題6で証明されている.

最後に少し異なった例を述べておこう. 証明は易しい ([10]).

補題8.  $G = A * B$  で  $A$  が無限群と仮定する.  $\mathfrak{C}$  を  $A$  の共役部分群の全体とすると、(G1), (Q) をみたす.

4.3.  $SL(2, \mathbf{Z})$ . Saito [14] では  $SL(2, \mathbf{Z})$  の既約表現の構成と正則表現の分解が議論されている。そこで構成された既約表現を我々の枠組みで再現しておくのも、あながち無意味ではなからう。まず、一般の群に対して Cartan 部分群の概念を導入しよう。(これは Grothendieck (1956) による。)

定義. 群  $G$  の部分群  $H$  が Cartan 部分群であるとは,

(i)  $G$  の極大巾零部分群であり;

(ii)  $H$  の指数有限のすべての部分群  $H_0$  に対して,  $|N_G(H_0) : H_0| < \infty$

が成り立つものをいう。

以下,  $G = SL(2, \mathbf{Z})$  とする。さて,

$$\mathfrak{F} = \left\{ F = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}; (a, b, c) \in \Delta \right\},$$

$$\Delta = \left\{ (a, b, c) \in \mathbf{Z}^3; \begin{array}{l} \text{(i)} \quad a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} + c\mathbf{Z} = \mathbf{Z} \\ \text{(ii)} \quad b^2 - 4ac \geq 0, \neq \text{正の平方数} \end{array} \right\}$$

とおく。

補題 9 ([14, Proposition 1]).  $G$  の部分群  $H$  が Cartan 部分群であるための必要十分条件は, ある  $F \in \mathfrak{F}$  によって  $H = \{g \in G; {}^t g F g = F\}$  と表せることである。このとき,  $F = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$  なら

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} (t - bs)/2 & -cs \\ as & (t + bs)/2 \end{pmatrix}; t^2 - (b^2 - 4ac)s^2 = 4, s, t \in \mathbf{Z} \right\}.$$

注意.  $t^2 - (b^2 - 4ac)s^2 = 4$  は整数論では Pell 方程式と呼ばれ, 無限個の解を持つことが知られている。その解のうち  $s, t$  ともに最小の正整数となるものに対応する行列を  $h$  とすると,  $H = \{\pm 1\} \times \langle h \rangle \simeq \{\pm 1\} \times \mathbf{Z}$  となっている。

ところで,  $G$  の Cartan 部分群は 2 種類に分類される:

(+)-類:  $N_G(H) = H$  となるもの。

(-)-類: (+)-類でないもの。このとき,  $|N_G(H) : H| = 2$  となっている。

$\mathfrak{C}_\pm$  によって  $(\pm)$ -類に属する Cartan 部分群の全体を表し,  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_+ \cup \mathfrak{C}_-$  とおこう. すると,

補題 10. (1)  $G$  の Cartan 部分群は極大可換部分群である.

(2)  $\mathfrak{C}$  は  $(G1), (G2)$  をみたす.

(3)  $\mathfrak{C}_+$  は  $(G1), (Q)$  をみたす.

以上の状況を踏まえると,  $\mathfrak{R} = \{G \text{ の Cartan 部分群の既約表現}\}$  に定理 C が適用でき, 次の結果を得る.

命題 7. (1)  $\mathfrak{R}$  の 2 つの表現は互いに同値または disjoint である.

(2) 2 つの表現  $(\chi_1; H) \in \mathfrak{R}, (\chi_2; K) \in \mathfrak{R}$  に対して  $\text{Ind}_H^G \chi_1 \simeq \text{Ind}_K^G \chi_2$  となる必要十分条件は, ある  $g \in G$  によって  $H = K^g$  かつ  $\chi_1 \simeq \chi_2^g$  となることである.

(3)  $H \in \mathfrak{C}_+$  ならば,  $\text{Ind}_H^G \chi$  は既約である.

(4)  $H \in \mathfrak{C}_-$  のとき,  $\text{Ind}_H^G \chi$  が既約になる必要十分条件は  $\chi \neq \bar{\chi}$  である.  $\chi = \bar{\chi}$  のときは,  $\text{Ind}_H^G \chi$  は互いに同値でない 2 つの既約表現の直和になる.

(証明) (1)-(3) は各々, 定理 C(1)-(3) から直ちに判る. (4) を証明するために  $H \in \mathfrak{C}_-$  とする. 定理 C(3) と  $|N(H) : H| = 2$  を思い出せば,

$$\text{Ind}_H^G \chi \text{ が既約でない} \iff \dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \chi, \text{Ind}_H^G \chi) = 2.$$

よって  $\text{Ind}_H^G \chi$  は互いに同値でない 2 つの既約表現の直和である. 一方, 簡単な計算によって  $ghg^{-1} = h^{-1}, g \in N(H) - H, h \in H$ , が出る. よって, このとき  $\chi^g = \bar{\chi}$ . もう一度定理 C(3) を用いて,

$$\text{Ind}_H^G \chi \text{ が既約でない} \iff \chi = \bar{\chi}.$$

を得る. (証明終)

このように Saito [14] では Cartan 部分群が中心的役割を演じたのである. しかしながら, このことから一般の離散群の Cartan 部分群の働きを推測するのは尚早であろう. 実際, 次の結果が具体的計算により証明される.

命題 8.  $SL(2, \mathbb{Z})$  の極大可換部分群  $H$  に対して次の3つの場合のいずれかが起こる:

- (i)  $H$  は位数4の巡回群であり,  $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$  と共役である;
- (ii)  $H$  は位数6の巡回群であり,  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$  と共役である;
- (iii)  $H$  は Cartan 部分群である.

つまり, 補題10(1) を思い出せば  $SL(2, \mathbb{Z})$  においては Cartan 部分群と位数無限の極大可換部分群は一致しているのである. ところで  $SL(2, \mathbb{Z})$  は自由積を一般化した融合積であり,  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  と同型である. したがって次の事実は興味深い, 証明は省略する.

補題 11. (1) 自由群においては, 極大可換部分群と Cartan 部分群は一致する.

- (2)  $A, B$  とも可換群ならば, 自由積  $G = A * B$  において, 極大可換部分群と Cartan 部分群は一致する.

なお, この節の内容を一般化し融合積の誘導表現を論ずるのは興味深い問題である. Obata [12] を参照されたい.

4.4. 無限対称群. 自然数  $\mathbb{N}$  の有限置換の全体のなす可算離散群を無限対称群といい,  $G = \mathfrak{S}_\infty$  で表す. これは例えば, 局所有限ということで前節までの群とは著しく異なる振舞いをする. 一方, 自由群とともに正則表現が  $\text{II}_1$ -型因子表現になるという共通点もある.

$\mathbb{N}$  の部分集合  $A$  に対して,

$$\mathfrak{S}(A) = \{g \in \mathfrak{S}_\infty; \text{supp } g \subset A\}$$

とおく. ここに  $\text{supp } g = \{n \in \mathbb{N}; g(n) \neq n\}$ . 但し, 便宜上  $\mathfrak{S}(\emptyset) = \{e\}$  とする. さて,  $\mathbb{N}$  の分割  $\Gamma = \{A_\gamma\}$  に対して,

$$H(\Gamma) = \prod_{\gamma} \mathfrak{S}(A_\gamma) \quad (\text{制限直積})$$

を分割  $\Gamma$  に付随する Young 部分群という. 以下, 分割  $\Gamma = \{A_\gamma\}$  に対して  $A_\gamma \neq \emptyset$  を仮定する. また,  $\prod$  は常に制限直積の意味に解する. ここで分割  $\Gamma = \{A_\gamma\}$  の有限部分, 無限部

分を

$$\Gamma_f = \{A_\gamma; |A_\gamma| < \infty\}, \quad \Gamma_\infty = \{A_\gamma; |A_\gamma| = \infty\}$$

によって定める.

補題 12. 2つの分割  $\Gamma, \Delta$  が与えられたとき,  $H(\Gamma) \sim H(\Delta)$  となるための必要十分条件は,  $\Gamma_\infty = \Delta_\infty$  かつ  $|\Gamma_f \ominus \Delta_f| < \infty$  となることである. ここに  $\ominus$  は集合の対称差を表す.

(証明) 1.  $H(\Gamma) \sim H(\Delta) \Rightarrow \Gamma_\infty = \Delta_\infty$  を示そう. 勿論,  $\Gamma_\infty \subset \Delta_\infty$  を示せば十分である.  $\Gamma, \Delta$  の生成する細分を  $\Gamma \vee \Delta$  とおくと,  $H(\Gamma) \cap H(\Delta) = H(\Gamma \vee \Delta)$  である. 仮定から,

$$|H(\Gamma) : H(\Gamma \vee \Delta)| < \infty, \quad |H(\Delta) : H(\Gamma \vee \Delta)| < \infty.$$

さて  $A \in \Gamma_\infty$  とする.  $A$  は  $\Gamma \vee \Delta$  に属する集合の和で書けるので,  $A = \bigcup_{j=1}^J C_j, C_j \in \Gamma \vee \Delta$  としよう. まず  $J \geq 2$  とする. もし  $|C_{j_0}| = \infty$  なるものがあれば,  $n_0 \in A - C_{j_0}$  を1つ固定して互換  $g_n = (n n_0) \in H(\Gamma), n \in C_{j_0}$  を考えると,

$$g_n H(\Gamma \vee \Delta) = g_m H(\Gamma \vee \Delta) \iff n = m$$

となり,  $|H(\Gamma) : H(\Gamma \vee \Delta)| < \infty$  に矛盾する. よって全ての  $C_j$  が有限集合であり,  $A$  は無限集合なので,  $J = \infty$ . 各  $C_j$  から1個ずつ元を取って互換を作れば, 上と同様に矛盾が出る. 結局,  $J = 1$ , 即ち, ある  $B \in \Delta_\infty$  が存在して  $A \subset B$  となる. もし  $A \neq B$  ならば, 前半の議論を繰り返して,  $|H(\Delta) : H(\Gamma \vee \Delta)| < \infty$  を用いればやはり矛盾が出る. したがって,  $A \in \Delta_\infty$ .

2.  $H(\Gamma) \sim H(\Delta) \Rightarrow |\Gamma_f \ominus \Delta_f| < \infty$ . 明らかに  $|\Gamma_f - \Delta_f| < \infty$  を示せば十分である.  $A \in \Gamma_f - \Delta_f$  に対して次の2通りのうち何れかが起こる:

- (i) ある  $B_1 \in \Delta_f, B_2 \in \Delta_f$  が存在して,  $A \cap B_1 \neq \emptyset, A \cap B_2 \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $A \subset B, A \neq B$  となる  $B \in \Delta_f$  が存在する.

1 と類似の議論によって, (i) 又は (ii) を引き起こすような  $A \in \Gamma_f - \Delta_f$  は有限個しかないことが判る. これで必要性の証明が完成した.

3. 十分性を示す. 仮定より有限個の集合  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma_f; B_1, \dots, B_n \in \Delta_f$  が存在して,  $\Gamma - \{A_1, \dots, A_m\} = \Delta - \{B_1, \dots, B_n\} = \{C_k\}$ . このとき,

$$\begin{aligned} H(\Gamma) &= \prod_k \mathfrak{S}(C_k) \times \prod_{1 \leq i \leq m} \mathfrak{S}(A_i), \\ H(\Delta) &= \prod_k \mathfrak{S}(C_k) \times \prod_{1 \leq j \leq n} \mathfrak{S}(B_j), \\ H(\Gamma \vee \Delta) &= \prod_k \mathfrak{S}(C_k) \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \mathfrak{S}(A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

である. ここで各々の2番目の因子は有限群であるから  $H(\Gamma) \sim H(\Delta)$ . (証明終)

補題 13. 分割  $\Gamma = \{A_\gamma\}$  に対して

$$Q(H(\Gamma)) = \mathfrak{S} \left( \bigcup_{A_\gamma \in \Gamma_f} A_\gamma \right) \times \prod_{A_\gamma \in \Gamma_\infty} \mathfrak{S}(A_\gamma).$$

(証明)  $g \in Q(H(\Gamma))$ , 即ち,  $H(\Gamma) \sim H(\Gamma)^g$  と仮定しよう. いま分割  $\Gamma = \{A_\gamma\}$  に対して  $g(\Gamma) = \{g(A_\gamma)\}$  とおくと,  $H(\Gamma)^g = H(g^{-1}(\Gamma))$  となる. ここで補題 12 を利用すると,  $\Gamma_\infty = (g^{-1}(\Gamma))_\infty$ . よって任意の  $A \in \Gamma_\infty$  に対して  $g(A) \in \Gamma_\infty$  であるが,  $g$  は有限置換なので  $g(A) = A$ . したがって,  $g \in \mathfrak{S} \left( \bigcup_{A_\gamma \in \Gamma_f} A_\gamma \right) \times \prod_{A_\gamma \in \Gamma_\infty} \mathfrak{S}(A_\gamma)$ . 逆も同様の考察で証明される. (証明終)

補題 14.  $|\Gamma_f| \leq 1$  となっているような分割  $\Gamma$  に付随する Young 部分群の全体  $\mathfrak{Y}$  は (G1), (Q) をみたす.

これは補題 13 より明らかである. ここで定理 D を適用すれば, 次の結論が直ちに出る.

命題 9.  $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{Y} \text{ に属する Young 部分群の有限次元既約表現}\}$  とおく. このとき,  $G = \mathfrak{S}_\infty$  の表現の族  $\hat{\mathfrak{R}}$  は既約表現だけから成る.  $\pi_1, \pi_2$  を各々  $H(\Gamma) \in \mathfrak{Y}, H(\Delta) \in \mathfrak{Y}$  の有限次元表現とすると,  $\text{Ind}_{H(\Gamma)}^G \pi_1 \simeq \text{Ind}_{H(\Delta)}^G \pi_2$  となるための必要十分条件は, ある  $g \in G$  が存在して  $\Gamma = g^{-1}(\Delta), \pi_1 = \pi_2^g$  となることである.

注意. (1)  $\mathfrak{Y}$  の部分族  $\mathfrak{Y}_0 = \{\mathfrak{S}(F) \times \mathfrak{S}(N-F); F \subset N \text{ 有限集合}\}$  も明らかに, (G1), (Q)

をみます.  $\mathfrak{R}_0 = \{\mathfrak{Y}_0 \text{に属する Young 部分群の有限次元既約表現}\}$  から得られる  $\mathfrak{G}_\infty$  の既約表現の族  $\mathfrak{R}_0$  は, Lieberman [6], Ol'shanskii [13] によって研究されたものである.

(2) 命題9で構成された  $\mathfrak{G}_\infty$  の既約表現はある種の  $\text{II}_1$ -因子表現の既約分解に関係していると思われる. 実際, 対応する分解不可能な正定値関数(これに対しては Thoma [16] による完全な記述がある)が, 我々の構成した既約表現から定まる正定値関数によって積分表示できる. 詳しくは Obata [11] を参照されたい.

(3) Obata [9] において構成された  $\mathfrak{G}_\infty$  の既約表現も我々の枠組みで捉え直すことができる.

4.5. 半直積群. Hirai [2] は wreath product と呼ばれる半直積群の既約表現の構成・分類を組織的に行った. ここでは basic hypotheses が実際に有効であることを示すために, 最も簡単な場合を紹介する. より一般かつ詳細な議論は原論文を参照されたい.

さて離散群  $T$  を1つ固定する.  $A \subset \mathbb{N}$ ,  $A \neq \emptyset$  に対して制限直積群

$$D_A(T) = \{t = (\tau_n)_{n \in A}; \tau_n \in T, \text{有限個の } n \text{ を除いて } \tau_n = e\}$$

を考える.  $\mathfrak{G}(A)$  は座標置換によって  $D_A(T)$  に作用し, 半直積群  $\mathfrak{G}(A) \ltimes D_A(T)$  が得られる. 定義により,

$$g^{-1}tg = (\tau_{g(n)})_{n \in A}, \quad t = (\tau_n)_{n \in A} \in D_A(T), \quad g \in \mathfrak{G}(A).$$

特に,  $A = \mathbb{N}$  の場合, これを  $G = \mathfrak{G}_\infty \ltimes D_\infty(T)$  と書いて wreath product と呼ぶ.  $\mathbb{N}$  の分割  $\Gamma = \{A_\gamma\}$  に付随する Young 部分群(4.4を参照せよ)を  $H(\Gamma)$  で表し,

$$G(\Gamma) = H(\Gamma) \ltimes D_\infty(T) = \prod_{\gamma} \mathfrak{G}(A_\gamma) \ltimes D_{A_\gamma}(T)$$

とおく. 我々は  $G(\Gamma)$  を underlying subgroup とするある種の既約表現の族  $\mathfrak{R}$  を考えるのであるが, それらはもはや有限次元表現とは限らないことに注意して欲しい.

さて,  $G(\Gamma)$  の既約表現を構成しよう.

1. 各  $\gamma$  毎に,  $T$  の既約表現  $(\rho^\gamma, V(\rho^\gamma))$  が与えられているものとして,  $(\rho_n, V_n) = (\rho^\gamma, V(\rho^\gamma))$ ,  $n \in A_\gamma$ , とおく. さらに, 各  $n$  毎に単位ベクトル  $a_n \in V_n$  が与えられているとする. まず  $D_{A_\gamma}(T)$  の既約表現  $(\Pi^\gamma, V(\Pi^\gamma))$  が  $\{a_n\}_{n \in A_\gamma}$  を reference vector としてそれらの tensor 積として得られる:

$$(\Pi^\gamma, V(\Pi^\gamma)) = \bigotimes_{n \in A_\gamma}^{\{a_n\}} (\rho_n, V_n).$$

2.  $(\chi^\gamma, V(\chi^\gamma))$  を  $\mathfrak{S}(A_\gamma)$  の有限次元既約表現とする. ( $|A_\gamma| = \infty$  のとき  $\chi^\gamma$  は自明もしくはは交代表現である.) そして,  $\mathfrak{S}(A_\gamma) \times D_{A_\gamma}(T)$  の既約表現  $(\tilde{\Pi}^\gamma, V(\tilde{\Pi}^\gamma) = V(\Pi^\gamma) \otimes V(\chi^\gamma))$  が

$$\tilde{\Pi}^\gamma(gt) = (\Gamma^\gamma(g)\Pi^\gamma(t)) \otimes \chi^\gamma(g), \quad g \in \mathfrak{S}(A_\gamma), \quad t \in D_{A_\gamma}(T),$$

によって定まる. ここに,  $\Gamma^\gamma(g)$  は  $V(\Pi^\gamma) = \bigotimes_{n \in A_\gamma}^{\{a_n\}} V_n$  上に因子の置換として働くユニタリ作用素である. 即ち,

$$\Gamma^\gamma(g) \left( \bigotimes_{n \in A_\gamma} v_n \right) = \bigotimes_{n \in A_\gamma} v_{g^{-1}(n)}.$$

このとき,  $\Pi^\gamma(g^{-1}tg) = \Gamma^\gamma(g)^{-1}\Pi^\gamma(t)\Gamma^\gamma(g)$  にも注意しておこう.

3. 各  $\gamma$  毎に単位ベクトル  $b_\gamma \in V(\chi^\gamma)$  が与えられているとする. 最後に,  $G(\Gamma) = \prod_\gamma \mathfrak{S}(A_\gamma) \times D_{A_\gamma}(T)$  の既約表現  $(\pi_Q, V_Q)$  を reference vector  $\{c_\gamma = (\bigotimes_{n \in A_\gamma} a_n) \otimes b_\gamma\}_\gamma$  による  $(\tilde{\Pi}^\gamma, V(\tilde{\Pi}^\gamma))$  の tensor 積で定義する:

$$(\pi_Q, V_Q) = \bigotimes_\gamma^{\{c_\gamma\}} (\tilde{\Pi}^\gamma, V(\tilde{\Pi}^\gamma)).$$

この表現は

$$Q = \{\Gamma = \{A_\gamma\}, \rho^\gamma, \chi^\gamma, \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, b_\gamma\}$$

を指定することに依って一意に定まるので  $\pi_Q$  と書いた.  $Q$  をその datum と呼ぶ.  $\pi_Q$  の表現空間は

$$V_Q = \bigotimes_{\gamma \in \Gamma}^{\{c_\gamma\}} \left( \left( \bigotimes_{n \in A_\gamma}^{\{a_n\}} V_n \right) \otimes V(\chi^\gamma) \right) = \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{N}}^{\{a_n\}} V_n \right) \otimes \left( \bigotimes_{\gamma \in \Gamma}^{\{b_\gamma\}} V(\chi^\gamma) \right)$$

とも表される.

特に興味深いのは,

$$(DF) \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma_f \text{ に対して } \gamma = \gamma' \iff \rho^\gamma \simeq \rho^{\gamma'}$$

をみたす datum  $Q$  である. そのような datum から得られる  $G(\Gamma)$  の既約表現全体を  $\mathfrak{R}$  で表す. (このとき分割  $\Gamma$  も全ての場合を尽くすように動かす.)

補題 15.  $\mathfrak{R}$  は basic hypotheses をみたす.

まず基本的な事実を証明なしに述べておこう.

補題 16.  $(\pi_i, V_i), i = 1, 2$ , を離散群  $G$  の既約表現とし,  $(1, W_i)$  を  $1(g)w = w, w \in W_i$ , で定義される  $G$  の表現とする. このとき任意の  $L \in \text{Hom}_G(\pi_1 \otimes 1, \pi_2 \otimes 1)$  は  $J \in \text{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$  と  $K \in B(W_1, W_2)$  を適当に選んで  $L = J \otimes K$  と表される. さらに  $\pi_1 \simeq \pi_2$  のときは  $J$  をユニタリーにとれる. また  $\pi_1 \not\simeq \pi_2$  ならば  $\text{Hom}_G(\pi_1 \otimes 1, \pi_2 \otimes 1) = \{0\}$ .

(補題 15 の証明) 2つの datum

$$Q = \{\Gamma = \{A_\gamma\}, \rho^\gamma, \chi^\gamma, \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, b_\gamma\}, \quad R = \{\Delta = \{B_\delta\}, \sigma^\delta, \psi^\delta, \{a'_n\}_{n \in \mathbb{N}}, b'_\delta\}$$

が与えられたとして, 2つの表現  $(\pi_Q; G(\Gamma)), (\pi_R; G(\Delta))$  を考えよう.  $\mathcal{J}(\pi_Q, \pi_R) \neq \{0\} \implies \Gamma = \Delta$  を示せばよい. そこで  $L \in \mathcal{J}(\pi_Q, \pi_R), L \neq 0$ , を1つ取り固定しておく. また  $G(\Gamma) \cap G(\Delta) = G(\Gamma \vee \Delta)$  に注意しておこう.

1.  $A_\gamma \in \Gamma_\infty$  と  $B_\delta \in \Delta$  で  $A_\gamma \cap B_\delta \neq \emptyset$  かつ  $A_\gamma - B_\delta \neq \emptyset$  となるものがあつたとして矛盾を導こう. このとき補題 12 の証明の第 1 段落と同様にして, 無限個の  $g_n \in \mathcal{G}(A_\gamma) \subset G(\Gamma)$  で  $G(\Gamma \vee \Delta)g_n = G(\Gamma \vee \Delta)g_m \iff n = m$  をみたすものがとれる.  $\pi_Q$  の表現空間  $V_Q$  を

$$V_Q = V'_Q \otimes V''_Q, \quad V'_Q = \bigotimes_{n \in A_\gamma} V_n, \quad V''_Q = (\text{残余})$$

のように表しておく.  $L$  の性質 (J2) によって  $w_1 \otimes w_2 \in V_Q = V'_Q \otimes V''_Q$  に対して

$$M \|w_1 \otimes w_2\|^2 \geq \sum_{g \in G(\Gamma \vee \Delta) \setminus G(\Gamma)} \|L\pi_Q(g)(w_1 \otimes w_2)\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|L\pi_Q(g_n)(w_1 \otimes w_2)\|^2$$

が成り立つ. ところが  $g_n \in \mathfrak{G}(A_\gamma)$  で  $\chi^\gamma$  は1次元表現なので,

$$\pi_Q(g_n)(w_1 \otimes w_2) = \tilde{I}^\gamma(g_n)w_1 \otimes w_2 = \chi^\gamma(g_n)I^\gamma(g_n)w_1 \otimes w_2.$$

よって

$$M\|w_1 \otimes w_2\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|L(I^\gamma(g_n)w_1 \otimes w_2)\|^2$$

一方,  $L \in \text{Hom}_{G(\Gamma \vee \Delta)}(\pi_Q, \pi_R)$  なので, 特に

$$L\pi_Q(t) = \pi_R(t)L, \quad t \in D_{A_\gamma}(T) \subset G(\Gamma \vee \Delta).$$

$V_Q$  と同様に

$$V_R = V'_R \otimes V''_R, \quad V'_R = \bigotimes_{n \in A_\gamma} V'_n, \quad V''_R = (\text{残余})$$

(但し,  $V'_n = V(\sigma^\delta)$ ,  $n \in B_\delta$ ) と表示すると,  $D_{A_\gamma}(T)$  の表現として (既約表現)  $\otimes 1$  の形になっている. よって, 補題16から  $L = J \otimes K$  と書ける.  $J$  はユニタリーに取っておく. こうして  $w_1 \otimes w_2 \in V_Q = V'_Q \otimes V''_Q$  に対して

$$\begin{aligned} M\|w_1 \otimes w_2\|^2 &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \|L(I^\gamma(g_n)w_1 \otimes w_2)\|^2 \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \|JI^\gamma(g_n)w_1\|^2 \|Kw_2\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|w_1\|^2 \|Kw_2\|^2 \end{aligned}$$

を得る. 最後の式は定数の無限和であり, また  $w_1 \otimes w_2$  は任意であるから  $K = 0$ , 即ち,  $L = 0$  を得る. これははじめの  $L$  の取り方に矛盾している.

2. したがって  $A_\gamma \in \Gamma_\infty$  と  $B_\delta \in \Delta$  に対して  $A_\gamma \cap B_\delta = \emptyset$  又は  $A_\gamma \subset B_\delta$  となる.  $Q, R$  の役割を入れ換えて同様の結果を得るから, 結局  $\Gamma_\infty = \Delta_\infty$ .

3.  $A_\gamma \in \Gamma_f$  と  $B_\delta \in \Delta_f$  で  $A_\gamma \cap B_\delta \neq \emptyset$  かつ  $A_\gamma - B_\delta \neq \emptyset$  となるものがあつたとして矛盾を導こう. 1 と同様の議論によって  $L = J \otimes K$  の形に表され  $J$  は条件 (DF) によって  $D_{A_\gamma}(T)$  の同値でない2つの既約表現を intertwine することになり  $L = 0$ . したがって 2 と同様にして  $\Gamma_f = \Delta_f$ . (証明終)

命題 10.  $G = \mathfrak{S}_\infty \times D_\infty(T)$  の表現の族  $\mathfrak{R}$  は既約表現だけから成る.  $(\pi_Q; G(\Gamma)) \in \mathfrak{R}$ ,  $(\pi_R; G(\Delta)) \in \mathfrak{R}$  に対し  $\text{Ind}_{G(\Gamma)}^G \pi_Q \simeq \text{Ind}_{G(\Delta)}^G \pi_R$  となるための必要十分条件は, ある  $g \in G$  が存在して  $\Gamma = g^{-1}(\Delta)$ ,  $\pi_Q \simeq \pi_R^g$  となることである.

(証明) 後半の主張は定理 B(2) と補題 15 から明らかである. 既約性を証明しよう. まず簡単に判るが

$$N_G(G(\Gamma)) = N_{\mathfrak{S}_\infty}(H(\Gamma)) \times D_\infty(T).$$

さらに  $g \in \mathfrak{S}_\infty$  に対して,

$$g \in N_{\mathfrak{S}_\infty}(H(\Gamma)) \iff g\Gamma = \Gamma.$$

特に, そのような  $g$  は  $\Gamma_\infty$  上では恒等的に作用する.  $\pi_Q$  の既約性のためには定理 B(3) により

$$g \in N_{\mathfrak{S}_\infty}(H(\Gamma)) - H(\Gamma) \implies \pi_Q^g \neq \pi_Q$$

を示せばよい. ( $N_{\mathfrak{S}_\infty}(H(\Gamma)) = H(\Gamma)$  のときは証明すべきことはない.) そこで  $g \in N_{\mathfrak{S}_\infty}(H(\Gamma)) - H(\Gamma)$  とすると,  $A_\gamma \in \Gamma_f$  で  $A_{\gamma'} = gA_\gamma \neq A_\gamma$  となるものがある.  $\pi_Q$  の表現空間を

$$V(\pi_Q) = \left( \bigotimes_{n \in A_\gamma} V_n \right) \otimes \left( \bigotimes_{n \in A_{\gamma'}} V_n \right) \otimes (\text{残余})$$

のように表しておけば,  $t \in D_{A_\gamma}(T)$  に対して

$$\pi_Q(t) = \Pi^\gamma(t) \otimes \text{id} \otimes \text{id}, \quad \pi_Q^g(t) = \text{id} \otimes \Pi^{\gamma'}(gtg^{-1}) \otimes \text{id}$$

となっている.  $\Pi^\gamma$  と  $\Pi^{\gamma'}$  は datum  $Q$  に対する仮定 (DF) から同値でない  $D_{A_\gamma}(T) \simeq D_{A_{\gamma'}}(T)$  の既約表現である. よって  $\pi_Q^g \neq \pi_Q$  である. (証明終)

注意. (1) 同値性  $\pi_Q \simeq \pi_R^g$  を datum の条件で述べることもできる. その際 reference vector 間の同値性の概念が必要になる. Hirai [2, Theorem 3.7] を参照されたい.

(2) 一般に  $(\pi_Q; G(\Gamma)) \in \mathfrak{R}$  は無限次元表現になるので, 命題 10 は定理 C, D ではカバーできず basic hypotheses が本質的に必要になっている.

(3)  $T = \{e\}$  とすると命題 10 は命題 9 と同一の内容となる。

### 参考文献

- [1] Corwin, L., *Induced representations of discrete groups*, Proc. Am. Math. Soc. **47** (1975), 279–287.
- [2] Hirai, T., *Some aspects in the theory of representations of discrete groups*, Japan. J. Math. to appear.
- [3] Hirai, T., *Construction of irreducible unitary representations of the infinite symmetric group*, preprint (1989).
- [4] Kawakami, S., *A remark of decompositions of the regular representations of free groups*, Math. Japon. **28** (1983), 337–340.
- [5] Kleppner, A., *On the intertwining number theorem*, Proc. Am. Math. Soc. **12** (1961), 731–733.
- [6] Lieberman, A., *The structure of certain unitary representations of infinite symmetric groups*, Trans. Am. Math. Soc. **164** (1972), 189–198.
- [7] Mackey, G. W., *On induced representations of groups*, Am. J. Math. **73** (1951), 576–592.
- [8] Magnus, W., Karrass, A., Solitar, D., “Combinatorial group theory (2nd rev. ed.),” Dover, New York, 1976.
- [9] Obata, N., *Certain unitary representations of the infinite symmetric group I*, Nagoya Math. J. **105** (1987), 109–119; *II*, ibid. **106** (1987), 143–162.
- [10] Obata, N., *Some remarks on induced representations of infinite discrete groups*, Math. Ann. **284** (1989), 91–102.
- [11] Obata, N., *Integral expression of some indecomposable characters of the infinite symmetric group in terms of irreducible representations*, preprint (1989).
- [12] Obata, N., *Construction of irreducible unitary representations of amalgams of discrete abelian groups*, preprint (1989).
- [13] Ol’shanskii, G. I., *New “large” groups of type I*, J. Soviet Math. **18** (1982), 22–39.
- [14] Saito, M., *Représentations unitaires monomiales d’un groupe discret, en particulier du groupe modulaire*, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 464–482.
- [15] Shimura, G., “Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions,” Publ. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1971.
- [16] Thoma, E., *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe*, Math. Z. **85** (1964), 40–61.
- [17] Yoshizawa, H., *Some remarks on unitary representations of free groups*, Osaka J. Math. **3** (1951), 55–63.