

## 層流の不安定と非線形干渉の理論

航技研 伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

### 1. はじめに

層流安定理論においてよく取り上げられる二次元流は主として二つの種類に大別される。一つは、その不安定によってトルミン・シュリヒティング波と呼ばれる二次元進行波が発生する流れで、平板に沿うブラジウス境界層や二平面間のポアズイユ流が代表的な例である。もう一つのグループは、不安定の結果として流れ方向に軸を持つ定常な渦列が形成される場合で、回転円筒間のクエット流や凹曲面に沿う境界層において観察されるテイラー・ゲルトラー渦が有名である。これらの流れは、レイノルズ数がある臨界値を超えると微小な攪乱の増幅が始まる点で共通している。臨界レイノルズ数は攪乱を無限小と仮定する線形安定理論から定まるけれども、超臨界における攪乱の振舞いについては線形理論だけでは十分な情報が得られない。線形解は指数関数的な

増幅を示すだけであるが、攪乱の振幅が増すとそれにつれて非線形効果が無視できなくなるはずである。攪乱の発達状態を予測するためには、非線形性がどのような作用をするかという情報が欠かせないのである。さらに、攪乱が二つ以上の波数成分から成り立つときには、それらの相互作用を無視してはほとんど何も現象を説明できない。実際に層流から乱流への遷移過程は、非線形性を考慮しなくては理解できない複雑な変遷の連続なのである。

非線形の攪乱方程式を厳密に解くことは極めて困難であり、また満足のゆく程度に精度のよい近似計算によつて解くことができたとしても、その結果は数値の山である。その中から我々の理解に役立つ特徴的な振舞いを抽出することは決して容易ではない。そこで、計算精度を少々犠牲にしても、現象の本質的な断面を明確にしてくれる解法が重要な役割を持つことになる。以下に述べる弱い非線形理論は、攪乱の振幅が十分小さく、その高次のべきが無視できることを仮定しているが、非線形効果の最も単純化された形を表現するものであり、線形理論では説明できない種々の発達形態を明示できる点で非常に有益である。なお、議論を単純化するために、基本流を純粹に平行な二次元流に限定する。前半では平面ポアズイユ流を対象として一般論を与え、後半では狭

い回転円筒間のクエット流におけるいくつかの例題を考えることにする。

## 2. 弱い非線形干渉の一般理論

主流方向に  $x$ 、横幅方向に  $y$ 、壁に垂直に  $z$  の座標を取り、時間を  $t$  とする。攪乱を  $x$  と  $y$  に周期的と仮定して二重フーリエ級数に置き、基本流に重合わせてナビエ・ストークス方程式に代入すれば、各フーリエ成分を支配する非線形連立方程式が得られる。もし無限小攪乱を想定して非線形項を無視すれば、各成分は独立になり、いわゆるオル・ゾンマーフェルト固有値問題が導かれる。 $x$  方向と  $y$  方向の波数  $\alpha$ 、 $\beta$  とレイノルズ数  $R$  を与えると、複素振動数  $\omega$  が固有値として定まる。実部が攪乱の振動数、虚部が時間的増幅率を表わす。弱い非線形理論では、各フーリエ成分を対応する線形方程式の固有関数で展開する。展開係数は振幅関数と呼ばれ、時間だけに依存する。この表示を方程式に代入し、各固有関数の随伴固有関数を両辺に乗じて  $z$  について積分すると、二つの固有関数列の直交性に基づいて、展開係数の時間変化を支配する非線形連立常微分方程式が得られる。このままではまだ式が複雑すぎて手に負えない。

そこで、全ての振幅関数が十分微小であること、ある波数  $(\alpha, \beta)$  を持つ成分を基本波と考えたとき、その最初の固有関数成分だけが卓越した大きさを持つこと、および基本波の最初の固有値に比べて、他の全ての固有値がずっと強い減衰特性を持つことの3つの仮定を行う。そうすると、卓越する固有関数成分の振幅発達に最も強く影響を与えるのは波数  $(0, 0)$  の平均流成分と波数  $(2\alpha, 2\beta)$  の高調波成分であることが判る。しかもそれらを支配する振幅方程式に対しては、固有解が無視できて、強制解だけを残せばよいことになり、いずれも基本波の振幅の2乗に比例する形に書ける。以上の考察の結果は、基本波の最初の固有関数成分の振幅関数を  $A(t)$  とするとき、次式のように表示される。

$$\frac{dA}{dt} = -iA\{\omega + \lambda|A|^2 + O(|A|^4)\} \quad (1)$$

ここで、 $A$  は一般には複素関数、 $\omega$  は線形解の複素振動数、 $\lambda$  はランダウ定数と呼ばれる複素定数であり、(1)式はランダウの方程式と名付けられている。上式の実部を取り、微小項  $O(|A|^4)$  を無視すれば、攪乱振幅  $|A|$  の時間変化が決定される。

以上は卓越した強さを持つ波数成分が単独に存在する場合であり、攪乱振幅は単純な方程式に支配された。もし卓越

する波数成分が複数個存在する場合を考えると方程式はずっと複雑になるけれども、その分だけ多くの情報を得ることができる。本研究では、二組の波数成分が卓越した大きさを持つ場合に焦点を絞り、波数の組合せに応じて振幅方程式がどのような形になるか、それらの式の解がどのような物理現象を説明するかを論じる。ここでは、各種の方程式を導びく過程は省略し、代表的な振幅方程式とその解について例題に即しながら説明する。

### 3. 回転クエット流における諸問題

テイラー渦の問題では多くの場合に振幅方程式の係数が実数値を取るために、解析が比較的容易になる。例題に適するゆえんである。周方向の波数を  $\alpha$ 、軸方向の波数を  $\beta$  とし、 $\mu$  を外筒と内筒の角速度の比、 $T$  をテイラー数とする。円筒間の幅が半径に比べて十分小さいものとするれば、円周方向に変化しないテイラー渦に関する固有値関係は  $\omega_r = 0$ ,  $\omega_i = \Omega(\beta, T, \mu)$  で与えられる。

はじめに外筒静止の場合を考える。 $T$  が臨界値  $T_c$  よりわずかに大きいとき、単独なテイラー渦の振幅方程式は(1)

と同じになる。計算から  $\omega_i > 0$ ,  $\lambda_i < 0$  となり、超臨界平衡振幅の存在が確認されている。しかし、 $T$  が  $2.12T_c$  を超えると、波数  $(0, 2\beta_c)$  を持つ高調波が正の線形増幅率を持つようになるので、単独波の理論に疑問が生じる。そこで基本波  $A$  と高調波  $B$  が共存する場合 (図 1) の式

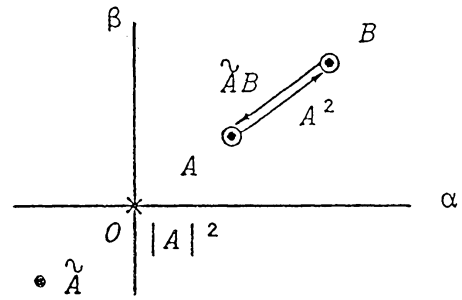


図 1 . 基本波と高調波の干渉

$$\frac{dA}{dt} = \omega_{1i} A + \lambda_{1i}^{(0)} A |A|^2 + \lambda_{1i}^{(2)} \gamma_{AB}, \quad \frac{dB}{dt} = \omega_{2i} B + \lambda_{2i} A^2 \quad (2)$$

を調べる。上式の解は  $(|A|^2, B)$  平面上に解曲線群を定義し (図 2)、それぞれの右辺を 0 に等置して得られる二直

(i)  $\omega_{2i} < 0$  の場合

(ii)  $\omega_{2i} > 0$  の場合

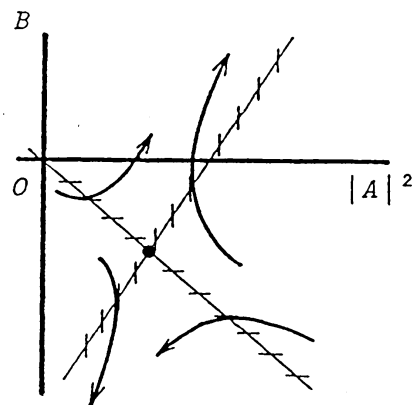
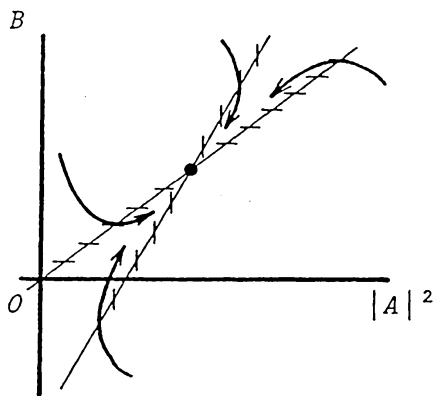


図 2 . 解曲線のパターン

線上で  $dB/d|A|^2 = \infty$  および  
 0 である。 計算から  $\lambda_{1i}^{(2)} > 0$ ,  
 $\lambda_{2i} > 0$  が判るので解曲線の  
 概要を知ることができ、 $\omega_{2i}$  が  
 ある負の値以下でないとは平衡解  
 に達しないことが結論される。

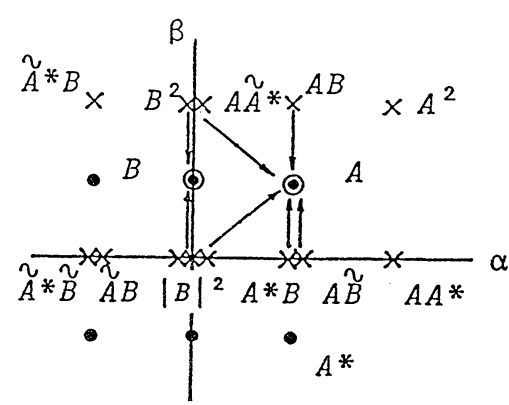


図 3 . テイラー渦と波  
 動型攪乱の干渉

これは単独波理論の適用限界を  
 明確にしたことになる。

つぎに、同じテイラー渦の波動型攪乱に対する安定性を調  
 べてみる。 波動型攪乱とは波動  $A(\alpha, \beta)$  と波動  $A^*(\alpha,$   
 $-\beta)$  の成分が同じ大きさを持って重ね合わされたものであ  
 る (図 3)。 攪乱の振幅  $|A| = |A^*|$  がテイラー渦  $B(0,$   
 $\beta)$  の振幅  $B$  に比べて小さい場合を想定すると、複素振幅  
 方程式は次式のように書ける。

$$\frac{dA}{dt} = -iA(\omega_1 + \lambda_3 |B|^2 + \lambda_4 \frac{A^* B^2}{A}), \quad \frac{dB}{dt} = -iB(\omega_2 + \Lambda_1 |B|^2) \quad (3)$$

第 2 式はテイラー渦の平衡振幅を与えるにすぎない。 第 1  
 式のほうは  $|A|^2$  に関する方程式と位相差  $\Theta = 2 \arg B -$   
 $\arg A + \arg A^*$  に関する方程式に分けることができ、後者  
 の解析から  $\Theta = \pi$  が導かれる。 この結果を用いると

$|A|^2$  の増幅条件

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2|A|^2 \omega_{2i} \left( \frac{\omega_{1i}}{\omega_{2i}} - \frac{\lambda_{3i} - \lambda_{4i}}{\Lambda_{1i}} \right) > 0 \quad (4)$$

が得られる。計算結果によれば  $T = 1.05 T_c$  を超えるとテイラー渦は不安定になる。

最後の問題は、外筒と内筒がほぼ同じ程度の速さで逆向きに回転する場合に関するものである。実験ではそのような状況で、テイラー渦の代りにスパイ

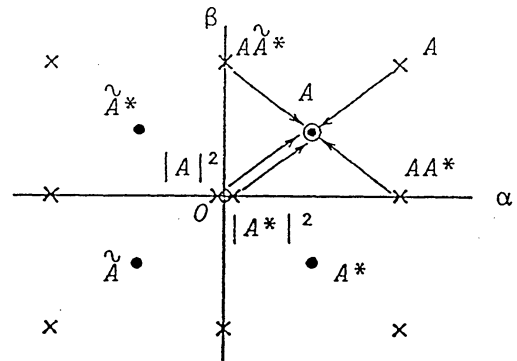


図4. 二つの斜行波の干渉

ラル渦状の進行波動が観測される。テイラー渦型攪乱 ( $\alpha = 0$ ) よりも波動型攪乱 ( $\alpha \neq 0$ ) の方が臨界テイラー数が低いのである。波動型攪乱には波数  $(\alpha, \beta)$  を持つ成分  $A$  と波数  $(\alpha, -\beta)$  を持つ成分  $A^*$  があることは既に述べたが、両者が同じ大きさに共存するならば、周方向に波打ったテイラー渦 (波動型テイラー渦) が形成されるはずであり、一方のみが単独で存在すればスパイラル渦になるはずである。どちらの形態が実現するかを線形理論では示すことができない。そこで、 $A$  と  $A^*$  が共存する場合の相互干渉を考えると (図4)、線形解が同じになることから、振幅



方程式はかなり単純化されてつぎのようになる。

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2|A|^2(\omega_i + \lambda_{1i}|A|^2 + \lambda_{2i}|A^*|^2),$$

$$\frac{d|A^*|^2}{dt} = 2|A^*|^2(\omega_i + \lambda_{1i}|A^*|^2 + \lambda_{2i}|A|^2) \quad (5)$$

超臨界状態では  $\omega_i > 0$  であり、 $\lambda_{1i}$  と  $\lambda_{2i}$  は負の値を持つと予想される。そのときには、 $(|A|^2, |A^*|^2)$  平面上における解曲線の形状は、 $\lambda_{1i}$  と  $\lambda_{2i}$  の大小関係に従って二種類に分けられる。図5の(i)では解曲線が  $|A|^2 = -\omega_i / \lambda_{1i}$ ,  $|A^*|^2 = 0$  か  $|A^*|^2 = -\omega_i / \lambda_{2i}$ ,  $|A|^2 = 0$  の点のどちらかに収束するから、スパイラル渦が形成される。これに対して(ii)では解曲線が  $|A|^2 = |A^*|^2 (\neq 0)$  の点に収束し、波動型テイラー渦の形成を意味する。内筒と外筒

(i)  $\lambda_{1i} > \lambda_{2i}$  の場合

(ii)  $\lambda_{1i} < \lambda_{2i}$  の場合

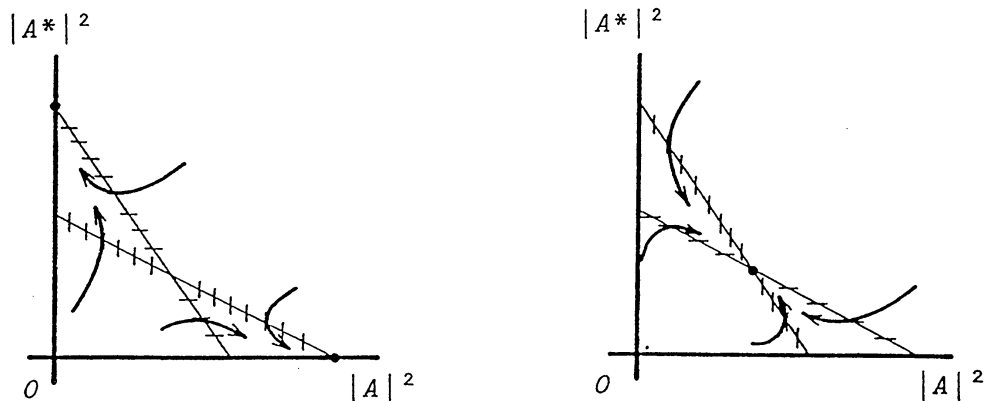


図5. 解曲線のパターン

が逆回転する場合に対する係数  $\lambda_{1i}$  と  $\lambda_{2i}$  の計算結果は (i) の実現を予測し、実験結果に一致している。

#### 4. むすび

回転クエット流の例に即しながら、非線形干渉の振幅方程式とその解の振舞いを調べ、物理現象の説明を試みた。弱い非線形の理論は、手法としてはほぼ完成されているので、それをいかに活用するかが問題のように思われる。