数理解析研究所講究録
第719巻 1990年 52-57

2次元乱流の対数補正についてのコメント

京大理物理　大木谷耕司 (Koji Ohkitani)

1. はじめに

2次元乱流の慣性領域におけるエネルギースペクトルの形は長い間議論の的となってきた。波数kにおけるエネルギースペクトルを$E(k)$で表そう。最初の、そしておそらくは最も簡単な形はエンストロフィーカスケード理論における次元解析によって

$$E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3} \quad \text{for } k_0 \ll k \ll k_d \qquad (1)$$

のように提案された。[1] ここでηはエンストロフィー散逸率、νは動粘性率、k_0は慣性小領域の上端、そして$k_d \sim \eta^{1/6}\nu^{-1/2}$はエンストロフィー散逸波数である。Kraichnanは波数空間におけるエンストロフィーフラックスの一定性(k-独立性)を要請することで(1)に対数補正を導入した[2]

$$E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3} [\log(k/k_0)]^{-1/3}。 \qquad (2)$$

その後に行なわれた数値計算によって、秩序構造の出現の

ために、しばしばエネルギースペクトルの巾が急になることがわかってきた。この傾向は特に減衰乱流の（臨界時刻[4]に比べて）後期に著しい[3]。しかしながら、定常乱流においては、秩序構造はエネルギーが供給されているスケールのものだけに限られている[5]。したがって(1)や(2)の形はレイノルズ数が十分大きければより高波数側に現われるものと期待される。さらに、減衰乱流においても(1)は臨界時刻付近において観察されている[6]。このように、(1)や(2)の形は2次元乱流の理解においてその基礎的な意味を失っていない。この小稿では、これらの2次元乱流の現象論の無矛盾性をアトラクターの次元という立場からみる。

2、アトラクターの次元

最近、2次元乱流のアトラクターの次元に対する厳密な上限が、Constantin, Foias, Temamによって得られた[7]。彼らによれば、アトラクターのハウスドルフ次元は $(k_d/k_0)^2 \times [1+\log(1+k_d/k_0)]^{1/3}$ によって上からおさえられ、そのフラクタル次元は $(k_d/k_0)^2[1+\log(k_d/k_0)]^{1/3}$ によって上からおさえられる。

この厳密な評価を、エンストロフィーカスケード理論に基づく定性的な評価と比較してみよう。カスケード理論におい

では、アトラクターの次元は慣性小領域内に励起されている自由度の数とみなすことができる。(1)に対してはこれは単に$(k_d/k_0)^2$であり、たしかに厳密な評価より真に小さい。ところが(2)に対しては定性的な評価は弱いながら対数補正によって修正される。そこで、「(2)は厳密な評価と両立し得るか?」という疑問が生じる。これに答えるため、(2)の導出を簡単にふりかえってみる。

Kraichnanに従って[2]、波数kをよぎるエンストロフィーフラックス$\Lambda(k)$をk符近にある全エンストロフィーと、そこでの渦の回転時間$\tau(k)\sim\left[\int^{k}p^2E(p)dp\right]^{-1/2}$との比に等しいと仮定すると、

$$\Lambda(k)\sim k^3E(k)/\tau(k)$$

とかくことができる。$\Lambda(k)=\eta$(一定)となる慣性小領域においては、$\tau(k)\sim\eta^{-1/3}[\log(k/k_0)]^{1/3}$と共に(2)を得る。(2)に対するエンストロフィー散逸波数K_dは、$\tau(K_d)\sim\tau_{visc}(K_d)$というつりあいから評価される。ここで$\tau_{visc}(k)\sim(\nu k^2)^{-1}$は粘性時間スケールである。この関係から、$k_d\sim K_d[\log(K_d/k_0)]^{-1/6}$が得られ、これより近似的に、$K_d\sim k_d[\log(k_d/k_0)]^{1/6}$が得られる。$K_d$は$k_d$より大きいが、これは対数補正に伴ってわずかに回復した局所性のために、散逸のおこるスケールが$[\log R]^{1/6}$ $(R\sim 1/\nu)$とい

う因子で小さくなったことを意味する。

こうして次元は

$$(K_d/k_0)^2 \sim (k_d/k_0)^2[\log(k_d/k_0)]^{1/3} \qquad (3)$$

のように見積ることができる。(3)はたしかに厳密な評価より小さい。つまり、対数補正されたエネルギースペクトルは厳密な評価と両立する。さらに、(3)は厳密な評価と leading order において一致する。このことは2つの対数因子が密接に結びついていることを示唆している。ここで、この厳密な評価が波数空間におけるエンストロフィーフラックスの一定性を考慮することなく得られたことは興味深い。また、3次元乱流のアトラクターの次元に対する厳密な評価[8]には対数因子が存在しないことも興味深い。これらの事実は、2次元の場合のスペクトルの対数補正に対する間接的な支持とみることができる。

3. おわりに

対数補正のいくつかの物理量に対する影響についてふれる。臨界時刻[4] t_c（$=k_0$付近に局在しているエンストロフィーが散逸波数までカスケードするのに要する時間）はレイノルズ数$R \sim 1/\nu$ の関数である。対数補正を考慮しないとき（$\tau(k) \sim \eta^{-1/3}$, $k_d \sim \eta^{1/6}\nu^{-1/2}$）臨界時刻は、

$$t_c \sim \int_{k_0}^{k_d} \tau(k)\, d(\log k) \sim \log R$$

と見積られる。 ところが、対数補正を考慮するときには
$(\tau(k) \sim \eta^{-1/3}[\log(k/k_0)]^{-1/3},\ K_d \sim k_d[\log(k_d/k_0)]^{1/6})$、

$$t_c \sim \int_{k_0}^{K_d} \tau(k)\, d(\log k) \sim (\log R)^{2/3}$$

となる。 渦分解がはやくなったため、先の $\log R$ より小さいのである。 カオスパラメータ[9]については、まず最大リャプノフ数λはエンストロフィーカスケード過程での最小の時間スケールと結びつくと考えると、

$$\lambda \sim \tau^{-1}(k_d) \sim \eta^{1/3}[\log(k_d/k_0)]^{1/3} \sim (\log R)^{1/3}$$

となる。 対数補正を考えないと、これはRによらない事を注意しておく。 最後に、Kolmogorov-Sinai エントロピーHは、

$$H \sim \tau^{-1}(k_d) \times (\text{励起されているモード数}) \sim R(\log R)^{2/3}$$

と見積られる。

以上の結果は、秩序構造が大きなスケールに限られているような、高いレイノルズ数をもつきれいな漸近状態において実現されると考えられる。

References

[1]G. K. Batchelor, Phys. Fluids Suppl. **12**, II233(1969);
R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417(1967);
C. E. Leith, Phys. Fluids **11**, 671(1968).
[2]R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **47**, 525(1971).
[3]J. C. Mcwilliams, J. Fluid Mech. **146**, 21(1984);
R. Benzi, S. Patarnello and P. Santangelo,
J. Phys. A : Math. Gen. **21**(1988)1221.
[4]T. Tatsumi and S. Yanase, J. Fluid Mech. **110**(1981)475.
[5]B. Legras, P. Santangelo and R. Benzi, Europhys. Lett. **5**,
37(1988).
[6]M. E. Brachet, M. Meneguzzi, H. Politano and P. L. Sulem,
J. Fluid Mech. **194**, 333(1988);
S. Kida, M. Yamada and K.Ohkitani, Fluid Dyn. Res. **4**, 271(1988).
[7]P. Constantin, C. Foias and R. Temam, Physica **D30**, 284(1988).
[8]P. Constantin, C. Foias and R. Temam, Mem. Amer. Math. Soc. **53**,
No.314, 1985.
[9]J.-P. Eckmann and D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. **57**, 617(1985).

(付記)

講演では、2次元乱流の秩序構造の特徴づけについてもふれたが、これについては別の機会に報告する予定である。