

外部磁場による乱流の 2 次元化と場の構造

東邦大・医・物理 齋藤善雄 (Yoshio Saito)

中内紀彦 (Norihiko Nakauchi)

大嶋 洋 (Hiroshi Oshima)

1. はじめに

地球大気の大規模な流れは 2 次元的であると言われるが、これはおもに地球大気の層の厚さよりも水平方向の長さスケールの方が非常に大きいためであると考えられる。一方、実験室規模の 2 次元的な流れは、一様な外部磁場の下で水銀を流すことにより得られる<sup>1)</sup>。すなわち、はじめに 3 次元の流れを作っておいて、それを何らかの外力（ここではローレンツ力）によって 2 次元化するのである。したがって、これらの流れがその 2 次元性に由来する共通した性質を持つことは当然であろうが、同じ 2 次元的な流れであっても、その作られ方によって流れの 3 次元性性質の名残りや構造の違いが存在すると考えられる。

流れが乱流である場合には、2 次元と 3 次元とでは乱流の基本的な性質が異なっている。特に非粘性の極限において、2 次元の場合には、3 次元の場合のエネルギー保存に加えて、エンストロフィーも保存されることがその原因である。現実の 2 次元乱流では数学的な意味で厳密にエンストロフィーが保存されることはないが、それでも 2 次元乱流の性質を示すことがある。そこで、乱流が 2 次元的であるか、それとも 3 次元的であるかを判別するための指標または物理量を研究することが必要になる。Founier & Frisch(1978)<sup>2)</sup> は Eddy-

Damped Quasi-Normal Markovian近似を用いて2から3の間の中間の次元を持つ一様等方性乱流を研究し、2次元性と3次元性を区別する臨界次元が存在することを示し、その値は2.05であるとした。しかし、現実の2次元乱流を一様等方性乱流をそのモデルとして研究することには無理があり、乱流のClosure理論を用いるのであれば少なくとも一様軸対称乱流をモデルとする方が望ましいと思われる。

ここでは、2次元乱流の例として一様な外部磁場の下での非圧縮電気伝導性流体の流れを数値シミュレーションにより再現し、3次元乱流が2次元化する過程と2次元乱流の性質および速度場の構造を調べる。ただし、磁気レイノルズ数が十分小さい場合を扱うことにする。

すでにSchumman(1976)<sup>3)</sup>はこのような流れを数値シミュレーションで再現し、Lehnert(1955)<sup>4)</sup>, Moffatt(1967)<sup>5)</sup>, Roberts(1967)<sup>6)</sup>らの磁場による乱流の減衰過程に対する線形理論と比較して、初期の減衰過程については線形理論とよく合うことを示した。さらに彼は乱流が2次元的になるかそれとも3次元的に留まるかを区別する臨界レイノルズ数と臨界磁気相互作用定数の存在を示唆した。また、Nakauchi(1985)<sup>7)</sup>は一様等方性乱流の理論(修正0-4次キュムラント理論)を一様軸対称乱流に拡張し、磁場による乱流の減衰過程と2次元性を調べた。

一方、Alemanyら(1979)<sup>8)</sup>は実験的に磁場に平行な速度成分を測定し、1次元エネルギースペクトルを計算した。その後、Sommeria(1983)<sup>9)</sup>は磁場に垂直な速度成分を測定し、同様に1次元エネルギースペクトルを計算した。彼らの結果は共に、磁場の強さとレイノルズ数が大きければ高波数側にエンストロフィーカスケード領域が存在し、エネルギースペクトルは磁場に平行か垂直かによらず $k^{-3}$ に比例することを示している。磁場に垂直な速度成分が2次元乱流の性質を示すことは考えられるが、平行な速度成分のエネルギースペクトルが $k$

に比例することは考察を要する問題であろう。ちなみに、2次元乱流中の passive scalar (例えば温度) のスペクトルは慣性対流領域で  $k^{-1}$  に比例することが予想されている<sup>16)</sup>。

## 2. 基礎方程式

非圧縮電気電導性流体の速度場  $u(x, t)$  と磁束密度  $b(x, t)$  を支配する方程式系はローレンツ力を外力とするナビエ-ストークス方程式および誘導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( p + \frac{b \cdot b}{2\mu} \right) + \frac{1}{\rho\mu} (b \cdot \nabla) b + \nu \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + (u \cdot \nabla) b = (b \cdot \nabla) u + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta b, \quad (2)$$

と、

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot b = 0, \quad (4)$$

である。ここで、 $\rho$  は流体の密度、 $\nu$  は動粘性率、 $\mu$  は磁気感受率、 $\sigma$  は電気伝導率を表す。また、乱流の代表的な速度を  $U$ 、代表的な長さを  $L$  として磁気レイノルズ数  $R_m$  を  $R_m = \mu\sigma UL$  と定義する。

一様な外部磁場の磁束密度を  $B$  とし、磁気レイノルズ数  $R_m$  が十分小さいとして、磁束密度  $b$  を

$$b = B + R_m b', \quad (5)$$

のように書く。ここで、 $b'$  は磁束密度のゆらぎを表している。 $R_m \ll 1$  のとき、方程式(2)より  $b'$  の方程式は第1近似で

$$(B \cdot \nabla) u + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta b' = 0, \quad (6)$$

になる。これを適当な境界条件 (ここでは周期的境界条件) の下で解いた解を

形式的に

$$\mathbf{b}' = -\mu \sigma \Delta^{-1} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}], \quad (7)$$

と書く。一方、速度場の方程式(1)に $\mathbf{b}$ の展開式(5)を代入して $R_m$ について1次の項まで残し、上の $\mathbf{b}'$ の形式的な解を代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{\sigma}{\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \Delta^{-1} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}], \quad (8)$$

を得る。ただし、ここで $p - \Delta^{-1} ((\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{B} / \sigma$ を改めて $p$ と書いた。

ここでは、上の方程式を周期的境界条件の下で数値的に解いた。ただし、計算領域は一辺が $2\pi$ の立方体である。また、非線形項の計算には pseudo-spectral法を用い、2/3ルールにより aliasing errorを消去した。座標系は、磁場に平行な方向に $x_3$ 軸をとり、磁場に垂直な方向を $x_1$ と $x_2$ 軸にとった。

### 3. 計算結果

初期の乱流は3次元等方性乱流であり、速度場の初期条件として、平均のエネルギースペクトルが

$$1.6 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \nu_0^2 k_0^{-5} k^4 \exp[-2 \left(\frac{k}{k_0}\right)^2], \quad (9)$$

となるように速度場のフーリエ成分 $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ の大きさを決め、 $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ の位相は区間 $(0, 2\pi)$ の間の値を持つ一様乱数とした。また、計算では $\nu_0=1$ ,  $k_0=2$ とした。

方程式(8)に現れるパラメータの値は、動粘性率 $\nu=0.01$ , 磁気相互作用定数 $N \equiv \sigma B^2 / \rho = 0.5, 1.0, 2.0$ として3通りの計算を行った。このとき、初期のマイクロスケールレイノルズ数は100, 積分スケールレイノルズ数は125である。また、波数の最大値 $k_{max}$ を16(実空間の一辺当りの格子点数 $N_0$ は33), 時間の刻み $\Delta t$ を0.05とした。時間発展はRunge-Kutta-Gill法を用いて計算された。

方程式(8)からも分かるように、ここで乱流が2次元化するとは物理量の磁場方向の空間微分が小さくなって行くことを意味する。図1(a)-(e)は磁場による渦度場の変化を示している。図に描かれている面は渦度場  $\omega(x, t)$  の二乗がその最大値  $\omega_{max}^2$  の1/4に等しい面を表している。始めの時刻( $t=0.5$ )には等渦度面は比較的滑らかで、僅かに磁場方向に伸びている。また、等渦度面に囲まれた体積は全体の6.0%である。ちなみにこの値の初期値は18.0%である。時間が経つ( $t=1.5$ )と渦度の強い領域が空間に疎らに存在するようになり、しかも、その体積は全体の1.2%と非常に小さい。すなわち、全体から見れば渦度の強い領域が点状に存在すると考えられ、3次元乱流の特徴を表している。しかしその一方、この時刻あたりから磁場方向の伸びが顕著になり始める。時刻  $t=2.5$  では、エネルギー散逸により渦度の二乗の最大値が減少するのでそれに伴って相対的に等渦度面に囲まれた体積は前よりも大きくなっており、全体の2.9%である。また、磁場方向の伸びは前よりも一層顕著になり、このことはこれ以後も同様である。時刻  $t=3.5$  では、渦度場の2次元的性格が現れている。すなわち、磁場に平行な方向からみると、渦度の強い領域が点在するのではなく、細長く伸びた形で存在するようになる。そして同時に等渦度面は磁場方向にも伸びており、全体として面構造が顕著になる。この時刻における等渦度面に囲まれた体積は全体の4.4%である。時刻  $t=4.5$  ではこれらのことが一層強まる。等渦度面に囲まれた体積は全体の5.7%に増加する。

図2(a)-(d)は磁場に垂直な渦度成分  $\omega_1$  の  $x_1=0$  の断面における等渦度線(時刻  $t=0$  と  $t=5$ )を描いたものである。同様に図3(a)-(d)は磁場に平行な渦度成分  $\omega_3$  の  $x_1=0$  の断面における等渦度線(時刻  $t=0$  と  $t=5$ )を描いたものである。これらの図から磁場が強くなるにしたがって、渦度場が磁場方向に一様化して行く様子が読み取れる。一方、図4(a)-(d)は磁場に垂直な渦度成分  $\omega_1$  の  $x_3=0$  の断面における等渦度線(時刻  $t=0$  と  $t=5$ )を描いたものであり、また図5(a)-(d)は同

様に磁場に平行な渦度成分  $\omega_3$  の  $x_3=0$  の断面における等渦度線 (時刻  $t=0$  と  $t=5$ ) を描いたものである。乱流の 2 次元化が強まるにしたがって、2 次元乱流の特徴である急勾配を持つ渦度領域の出現が見られる。図 2 から図 5 を通じて、磁場に垂直な渦度成分  $\omega_1$  と平行な渦度成分  $\omega_3$  の空間的構造には、たとえ磁場が強くなったとしても、顕著な差は存在しないことが分かる。

図 6 (a) と (b) は時刻  $t=1$  と  $t=5$  における各速度成分のエネルギースペクトル  $E_i(k, t)$  を表している。以後図 8 までにおいて横軸は波数の絶対値である。図 7 (a) と (b) は時刻  $t=1$  と  $t=5$  における各渦度成分のエンストロフィースペクトル  $\Omega_i(k, t)$  を表している。そして、エネルギーとエンストロフィーの各成分のスペクトルの比を描いたものが図 8 (a)-(d) である。磁場の効果が効き始めると高波数側では磁場に平行な方向のエネルギースペクトル  $E_3(k)$  の方が  $E_1(k)$  および  $E_2(k)$  よりも大きくなり、低波数側ではこの逆である。一方、磁場に平行な方向のエンストロフィースペクトル  $\Omega_3(k)$  は高波数側で  $\Omega_1(k)$  および  $\Omega_2(k)$  よりも小さくなり、低波数側ではこの逆である。すなわち低波数側は磁場方向の渦度が他に比べて圧倒的に大きいという意味で 2 次元的であるが、高波数側は磁場方向のエネルギーが、この計算の範囲では、他に比べて圧倒的に大きいという意味で 2 次元的ではない。しかしながら、磁場に垂直な方向の運動の高波数成分は磁場方向の場の一様性という観点から見ればやはり 2 次元的である。また、磁場の効果が強くなれば磁場方向の場の一様性は一段と進み、これに伴って磁場方向の運動は 2 次元乱流中の *passive scalar* の性格を持つようになるので、十分に時間が経てば磁場方向のエネルギーは全波数領域で他に比べて小さくなると予想される。この段階では全てのスケールで乱流は 2 次元的になるであろう。

図 9 は 磁場に垂直な方向のエネルギーと平行な方向のエネルギーとの比  $2E_3/(E_1+E_2)$  の時間変化を示している。磁場の効果が現れないうちは磁場に垂

直な方向のジュール散逸は平行な方向のジュール散逸よりも約2倍近く大きいので、磁場に垂直な方向のエネルギーが他よりも速く減衰し、したがってエネルギーの比は増大する。一方、磁場の効果により磁場に平行な方向の粘性散逸は垂直な方向の粘性散逸よりも大きくなる（ $N=1$ の場合最大約1.5倍、 $N=2$ の場合最大約2.5倍）。このことは後で再び触れる。また、ジュール散逸は磁場の効果が効き始めると急激に減少する。このためにエネルギーの比は初期の増大からいずれは減少に転じる。この増減の変化する時刻はレイノルズ数が一定であれば磁気相互作用定数 $N$ の値に依存すると考えられる。しかしながら、 $N=1$ と $N=2$ ではその時刻は共に1.2から1.4であり、 $N$ の値にあまり依存しない。一方、 $N=0.5$ ではその時刻は少なくとも5.0以上であり、 $N=1$ の場合との差が非常に大きい。このことは $N=0.5$ と1の間に臨界磁気相互作用定数 $N_c$ が存在することを示唆するものと考えられる<sup>3)</sup>。

図10は磁場に垂直な方向の渦度の二乗と平行な方向の渦度の二乗との比 $2\Omega_3 / (\Omega_1 + \Omega_2)$ の時間変化を示している。時刻が $t=3$ 前後まで比は $N$ の値に依らずなだらかな変化を示すが、 $N=1$ と $N=2$ の場合には $t=3$ 前後から比が直線的に増大している。ここにも臨界磁気相互作用定数の存在が示唆されている。また、比が直線的に増大し始める時刻は $t=2.5$ から $3.0$ で、ちょうどエネルギーの比が1より小さくなる少し前である。

図11は圧力の磁場に垂直な方向の微分と平行な方向の微分との比の時間変化を示している。始めのうちは比の増減が見られるものの、時間が経つと比は単調に減少している。磁場に平行な方向の圧力の微分の大きさは磁場に垂直な方向のエネルギーが平行な方向へ流れる大きさを表している。したがって、この比が単調に減少することは磁場に平行な方向へのエネルギー輸送が他に比べてより速く減少することを意味している。すなわち図9で示した増大から減少に転じたエネルギー比は更に減少し続け、0に漸近するものと考えられる。

図 1 2 (a)-(c)は各速度成分毎のスキューネス  $S_i$  の時間変化を表している。このスキューネスは確率分布の歪みとは直接関係していないことを注意しておく。ただし、等方性乱流に対しては  $S_1 + S_2 + S_3$  が確率分布の歪みを表している。図に示したスキューネスはエネルギー輸送項から計算されたものなので、それは高波数へのエネルギーの輸送の大きさを表している。 $S_1$  と  $S_2$  は時刻が約 0.8 まで  $N$  の大きさに依らない時間変化を示し、時刻が 1.0 以降  $N$  の大きさによる変化が現れる。そして、 $N$  が大きくなるにしたがって  $S_1$  と  $S_2$  の値は 0 に近づいて行く。これに対して、 $S_3$  は初期の変化が  $N$  に依存しており、 $N$  が大きくなるにしたがって  $S_3$  の絶対値は大きくなり、時刻が 1.0 以降  $S_3$  の大きさはほとんど変化しない。 $N$  が十分大きいとき、磁場に垂直な方向のスキューネスがほとんど 0 であることは高波数へのエネルギー輸送がほとんど無いことを意味しており、同時に粘性によるエネルギー散逸が非常に小さいことを表している。そしてこのことは磁場に垂直な方向の運動が 2 次元であることを示している。一方、磁場に平行な方向のスキューネスの絶対値は 0 に近くない大きさを持つので、高波数へのエネルギー輸送がかなりあり、粘性によるエネルギー散逸も他の方向に比べて大きい。このエネルギー散逸の方向による違いが図 9 で示したエネルギー比の減少を引き起こしているのである。

#### 4. おわりに

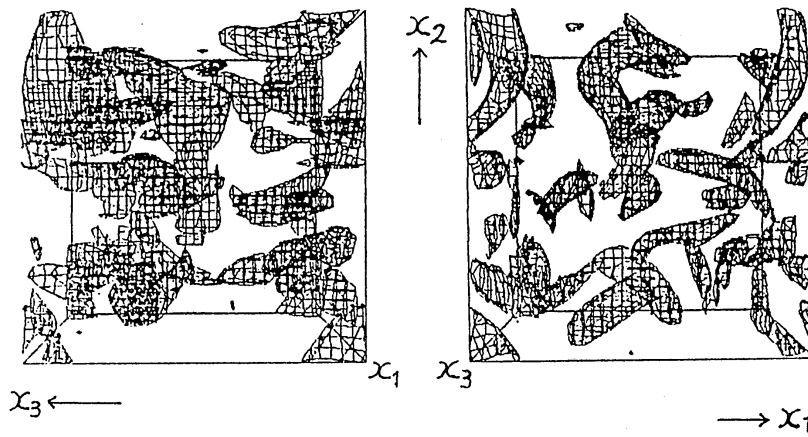
今回の計算はレイノルズ数が大きい場合ではないので、エネルギースペクトルのベキについては何も言えなかった。始めに述べたように磁場方向の 1 次元スペクトルが  $k^{-3}$  に比例する部分を持つのかどうかについての研究を今後の課題としたい。また、今回は等渦度面を 3 次元的に表示して、渦度場の 2 次元化を視覚的に捕らえようと試みた。したがって、等渦度面の形の時間的変化を示



すに留まったが、今後は得られた形から何らかの情報または物理量を引き出すことが必要であろう。たとえば、3次元等方乱流であれば渦度の非常に強い領域は点々と存在するであろうし、それが磁場の効果によって面状になってゆくとしたら、これを次元の違いとして捕らえることができそうに思われる。

#### 参考文献

- 1) J. Hartman & F. Lazarus, Mat. Fys. Medd. 15(1937), 7.
- 2) J. D. Fournier & U. Frisch, Phys. Rev. A17(1978), 747.
- 3) U. Schumman, J. Fluid Mech. 74(1976), 31.
- 4) B. Lehnert, Quart. Appl. Math. 12(1955), 321.
- 5) H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. 28(1967), 571.
- 6) P. H. Roberts, An Introduction to Magnetohydrodynamics, 1967,  
Lingmans, p. 137.
- 7) N. Nakauchi, J. Phys. Soc. Japan 54(1985), 3321.
- 8) A. Alemany, et. al., J. de Mec. 18(1979), 277.
- 9) J. Sommeria, J. de Mec. (special issue), 169.
- 10) M. Lesieur, Turbulence in Fluids, 1987, Martinus Nijhoff  
Publishers, p. 196.



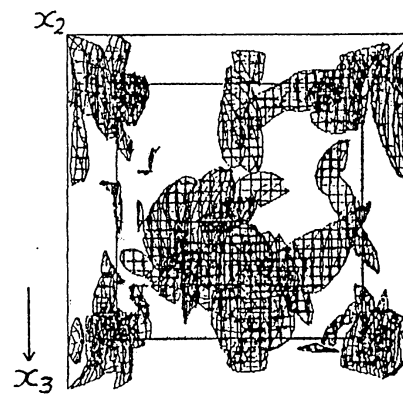
(a)  $t=0.5,$

$$\omega^2_{max}=115.0$$

図 1 (a)-(e)

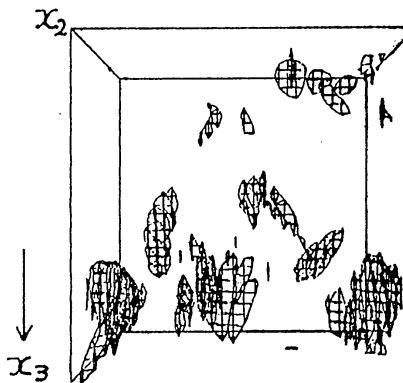
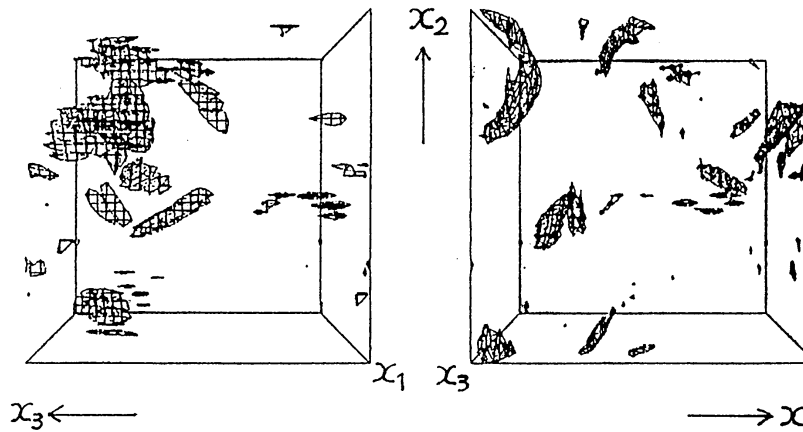
等渦度面 ( $\omega^2 = \omega^2_{max}/4$ )

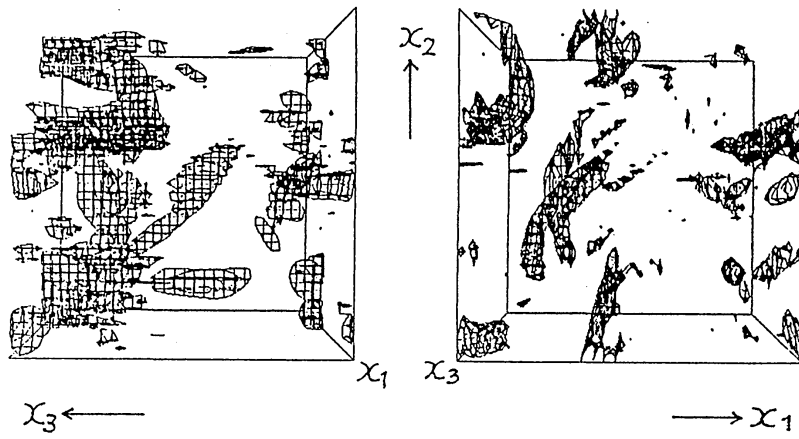
の時間変化.



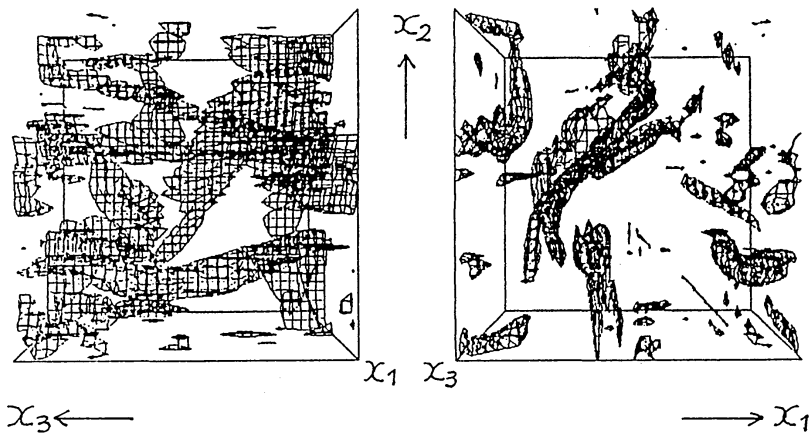
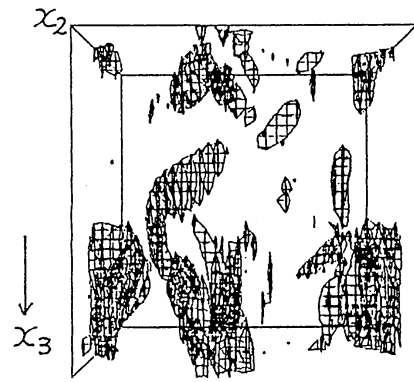
(b)  $t=1.5,$

$$\omega^2_{max}=189.5$$

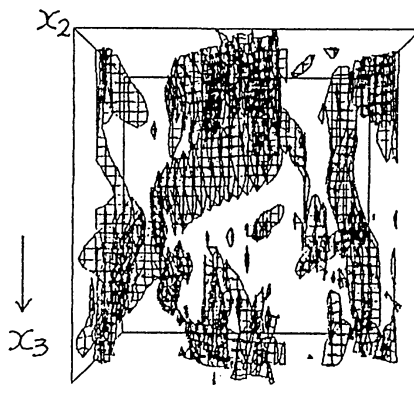


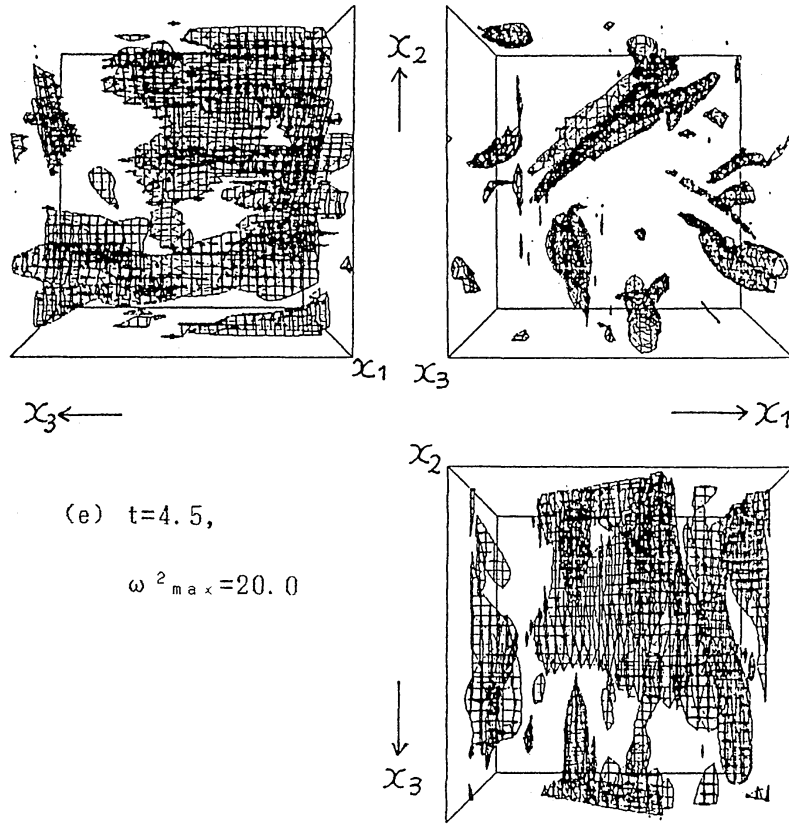


(c)  $t=2.5,$   
 $\omega^2_{max}=77.9$



(d)  $t=3.5,$   
 $\omega^2_{max}=36.3$





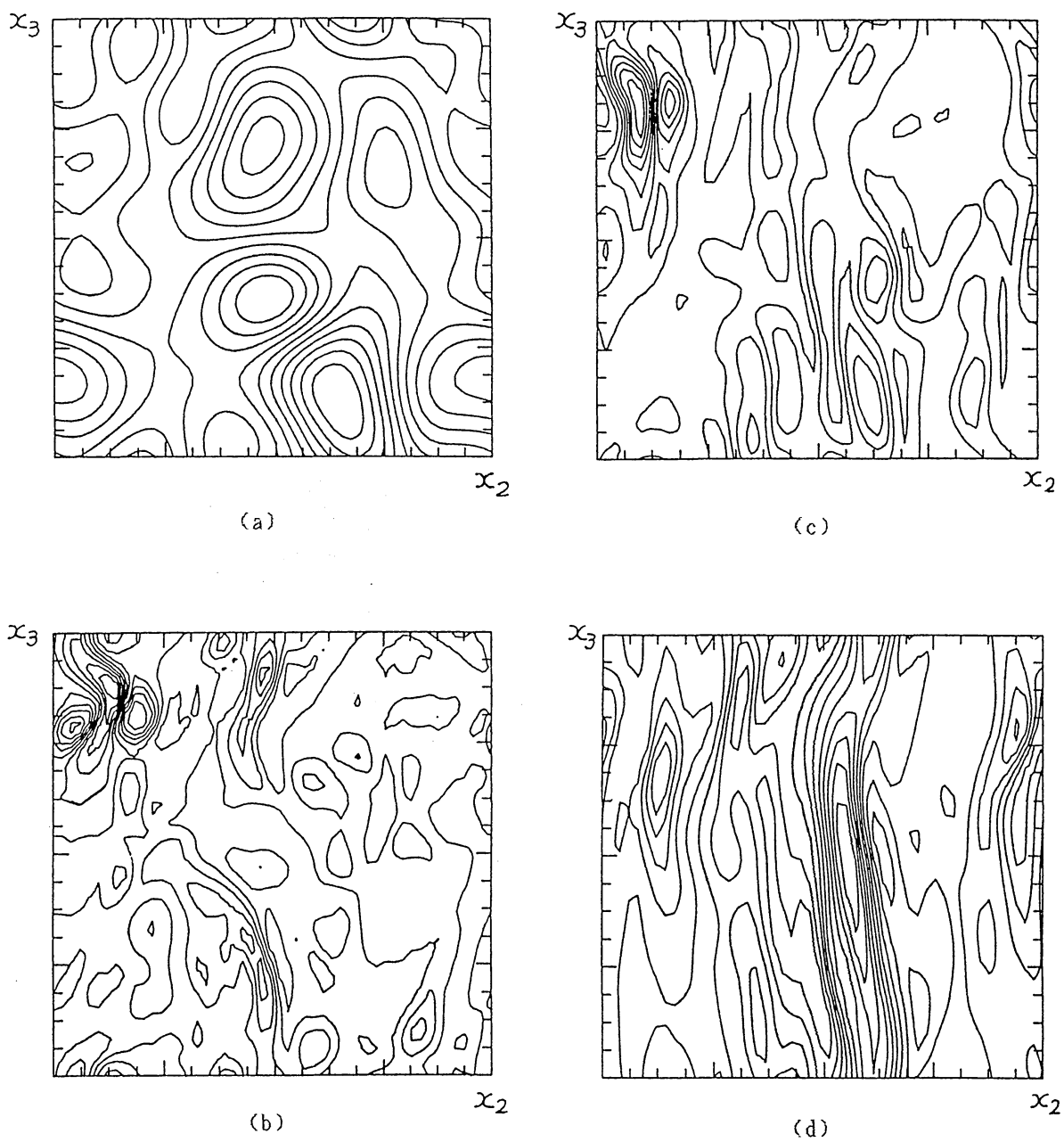


図 2 (a)-(d) 磁場に垂直な方向の渦度  $\omega_1$  の  $x_1=0$  の断面における等渦度線。(a)は時刻  $t=0$ , (b)-(d)は時刻  $t=5$ で, (b)は  $N=0.5$ , (c)は  $N=1$ , (d)は  $N=2$ である。

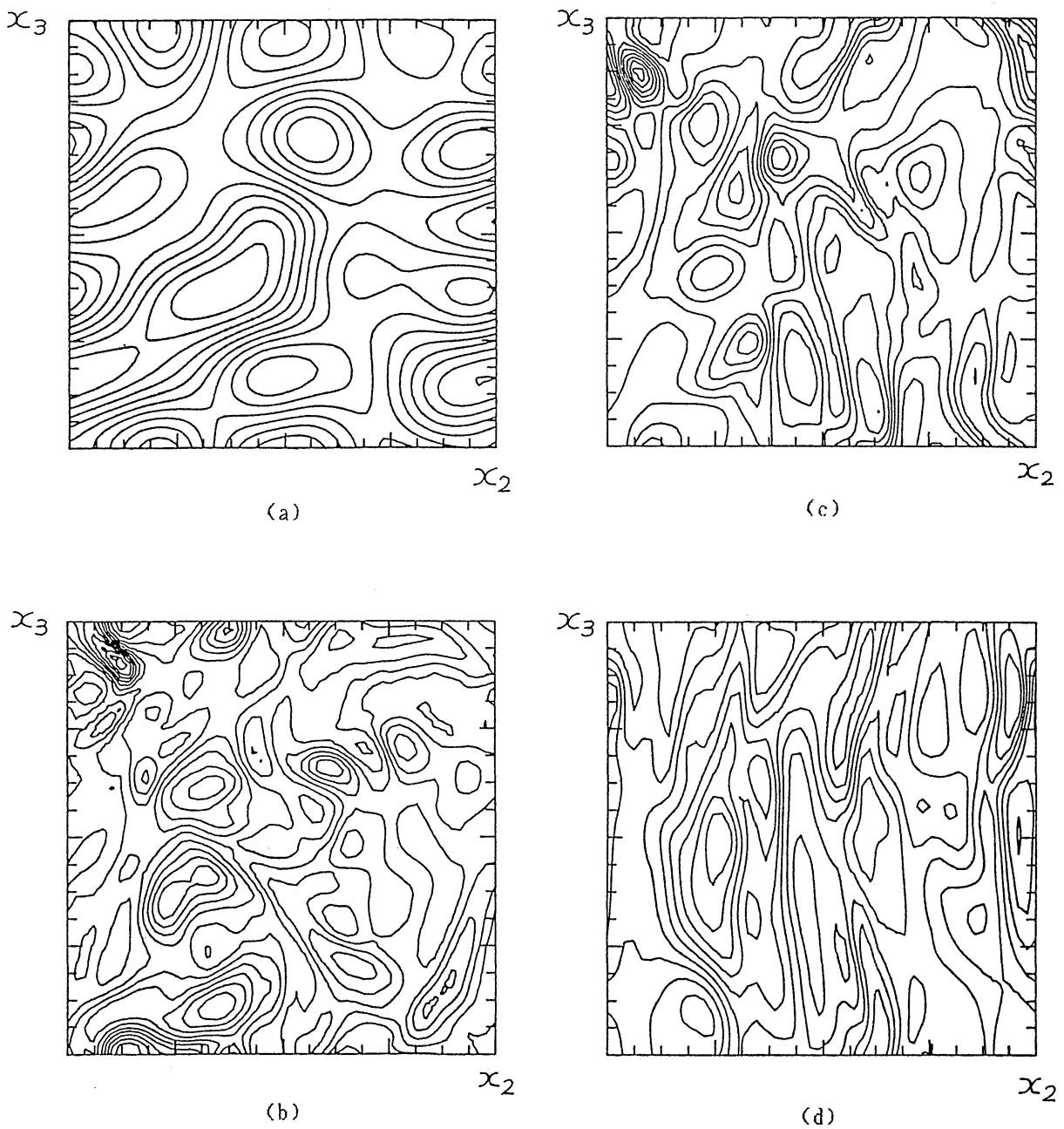


図 3 (a)-(d) 磁場に平行な方向の渦度  $\omega_3$  の  $x_1=0$  の断面における等渦度線。(a)は時刻  $t=0$ , (b)-(d)は時刻  $t=5$  で, (b)は  $N=0.5$ , (c)は  $N=1$ , (d)は  $N=2$  である。

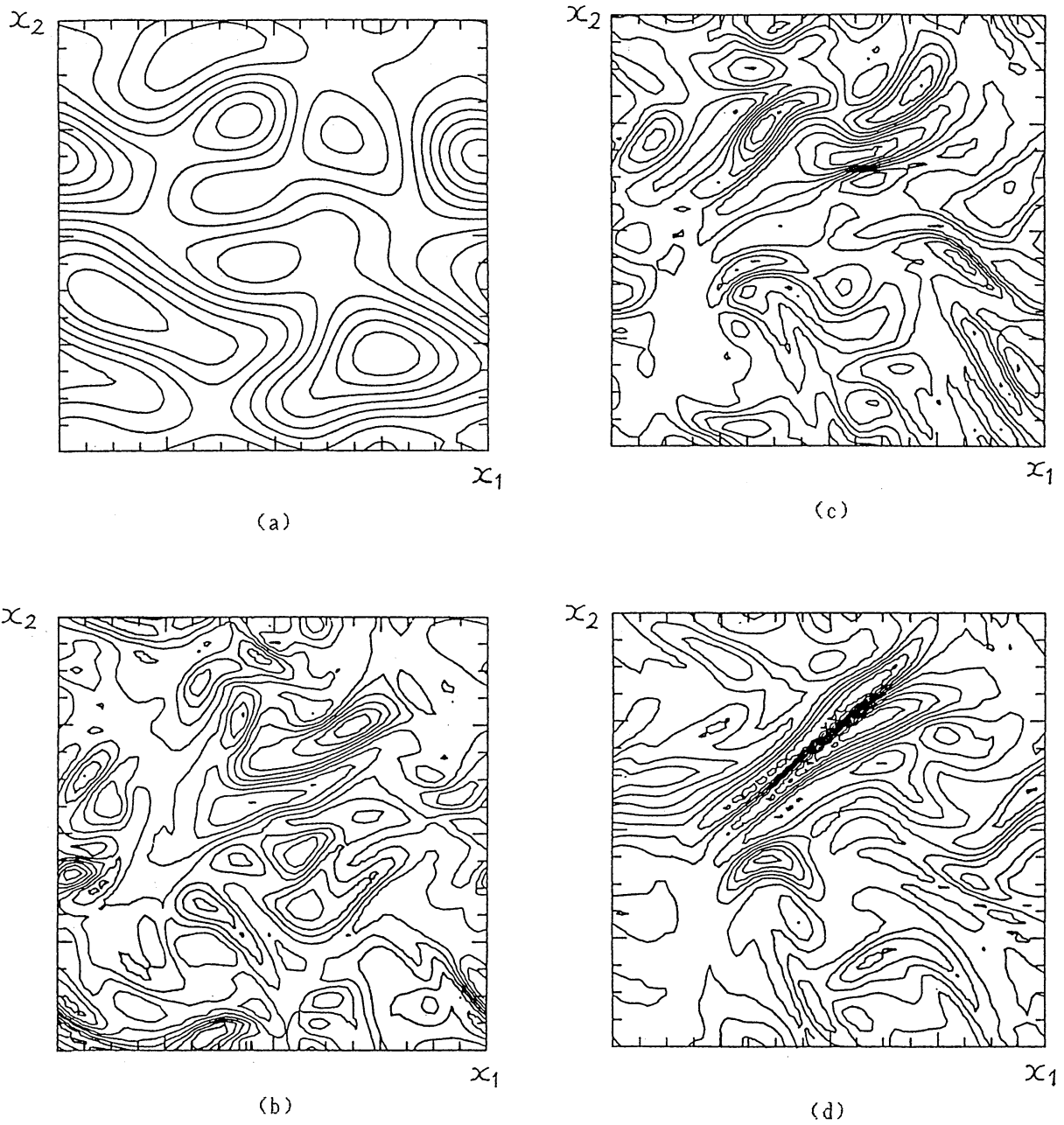


図4 (a)-(d) 磁場に垂直な方向の渦度  $\omega_1$  の  $x_3=0$  の断面における等渦度線。(a)は時刻  $t=0$ , (b)-(d)は時刻  $t=5$  で, (b)は  $N=0.5$ , (c)は  $N=1$ , (d)は  $N=2$  である。

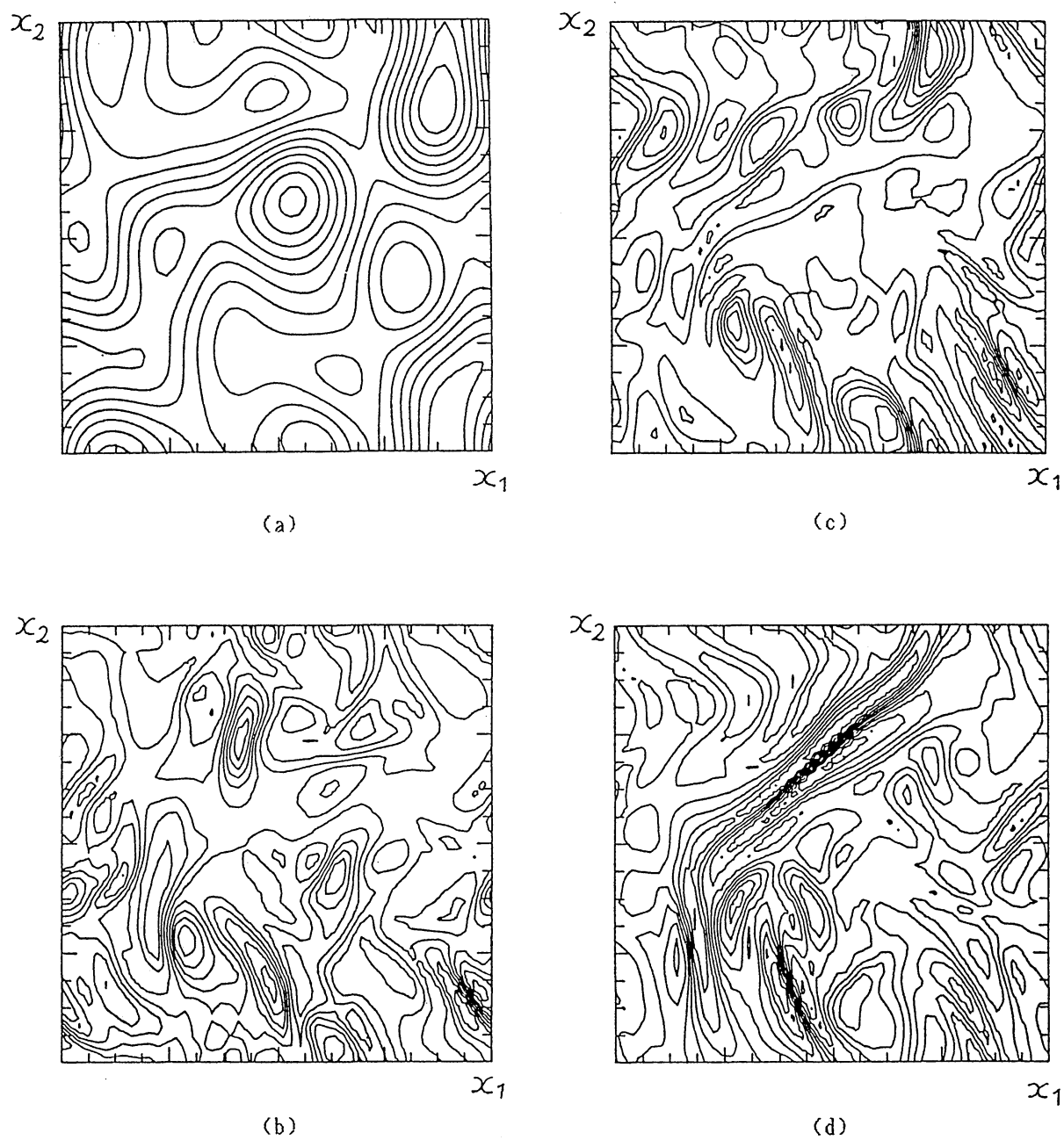


図5 (a)-(d) 磁場に平行な方向の渦度  $\omega_3$  の  $x_3=0$  の断面における等渦度線。(a)は時刻  $t=0$ , (b)-(d)は時刻  $t=5$  で, (b)は  $N=0.5$ , (c)は  $N=1$ , (d)は  $N=2$  である。



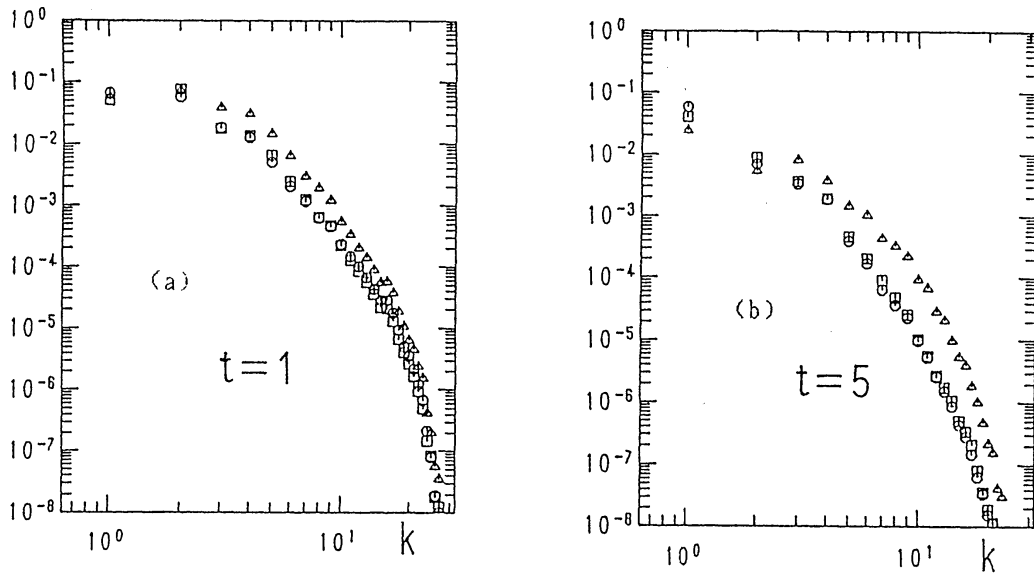


図 6 (a), (b) エネルギースペクトル  $E_i(k, t)$ ,

$\square$  :  $i=1$ ,  $\circ$  :  $i=2$ ,  $\triangle$  :  $i=3$ .

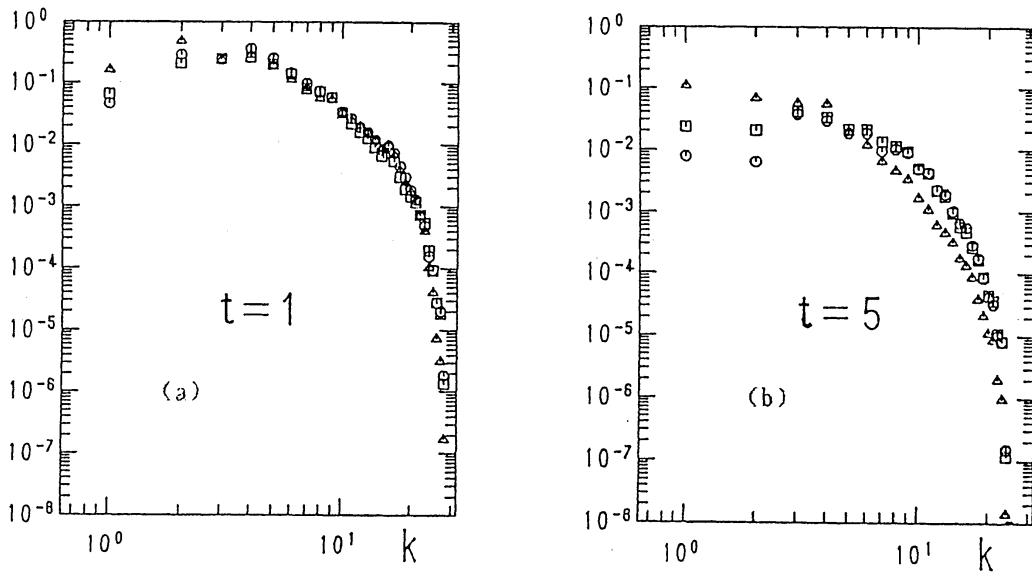


図 7 (a), (b) エントロピースペクトル  $\Omega_i(k, t)$ ,

$\square$  :  $i=1$ ,  $\circ$  :  $i=2$ ,  $\triangle$  :  $i=3$ .

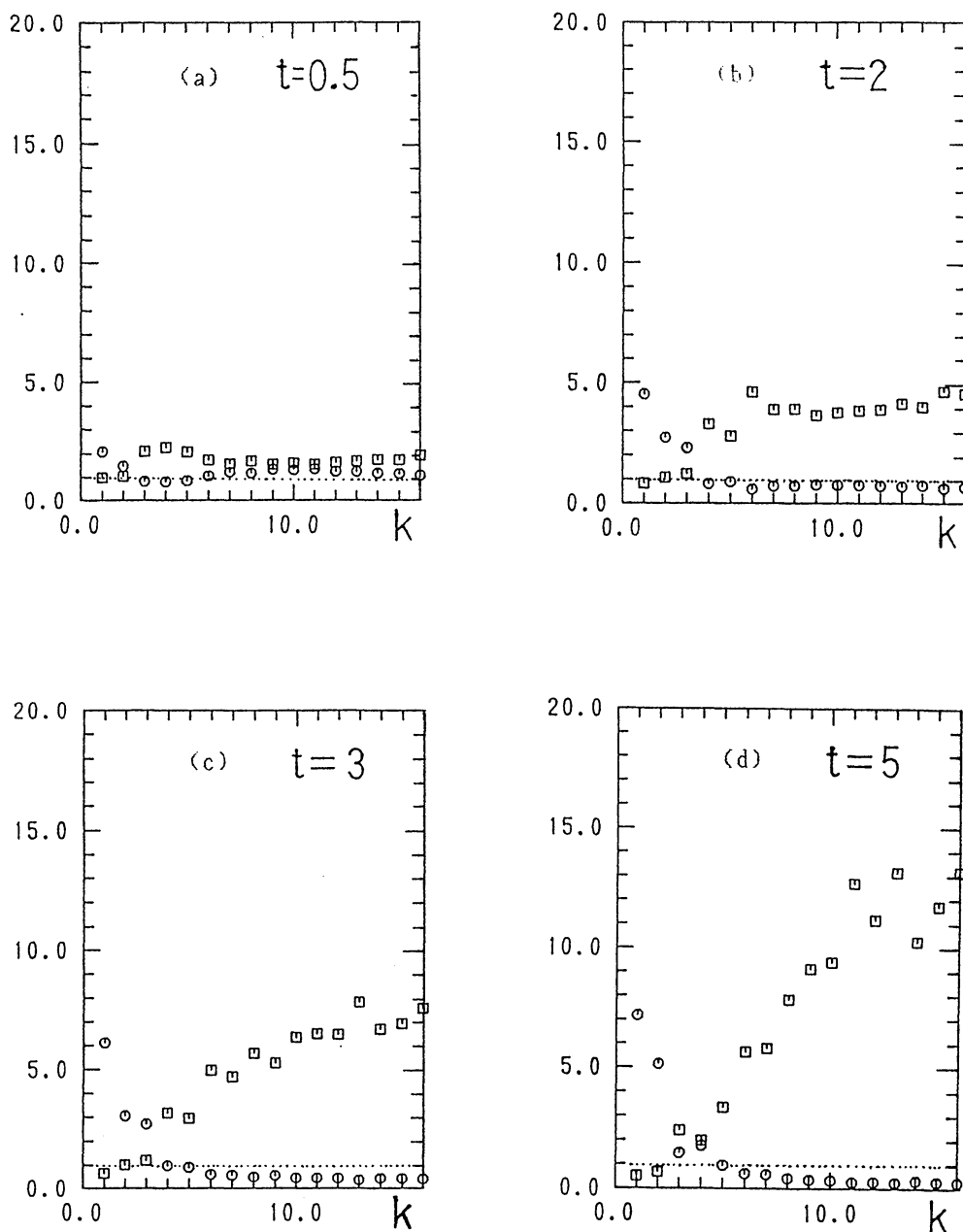


図 8 (a)-(d) 磁場方向と磁場に垂直な方向のエネルギースペクトルおよび

エンストロフィースペクトルの比。

$$\square : 2E_3(k, t) / (E_1(k, t) + E_2(k, t)),$$

$$\circ : 2\Omega_3(k, t) / (\Omega_1(k, t) + \Omega_2(k, t)).$$

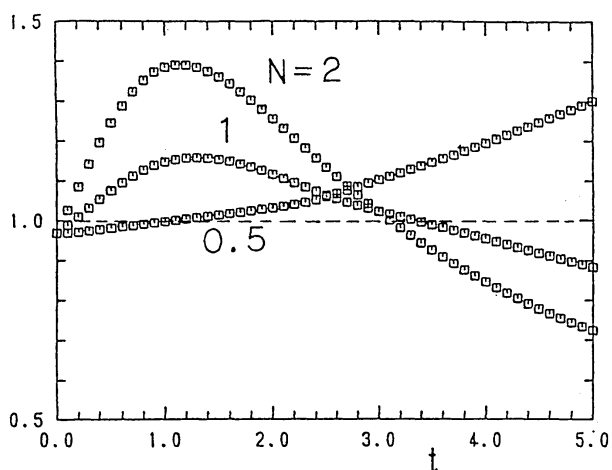


図 9  
磁場方向と磁場に垂直な方向のエネルギーの比  $2E_3 / (E_1 + E_2)$  の時間変化.

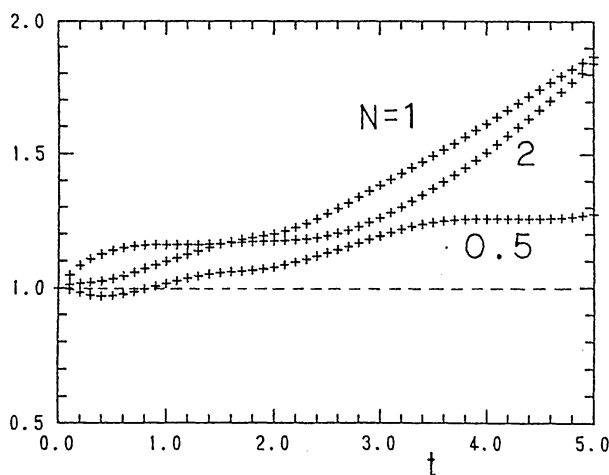


図 10  
磁場方向と磁場に垂直な方向のエンストロフィーの比  $2\Omega_3 / (\Omega_1 + \Omega_2)$  の時間変化.

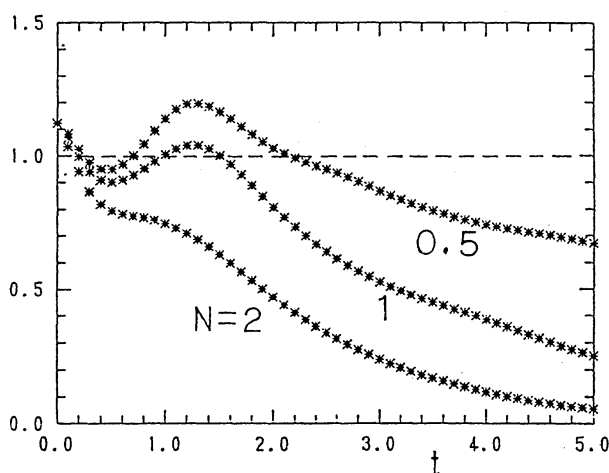
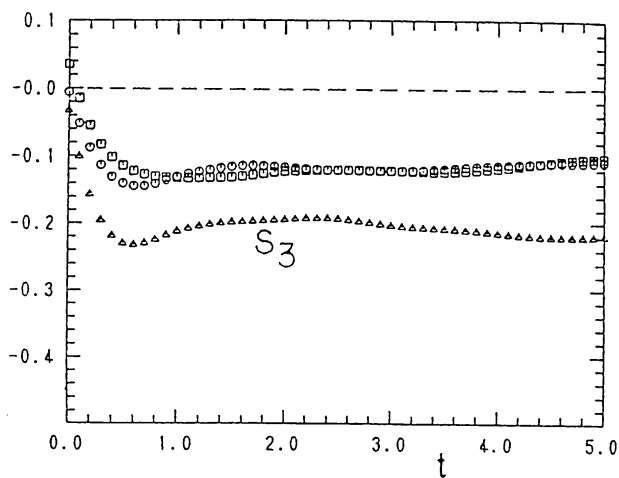
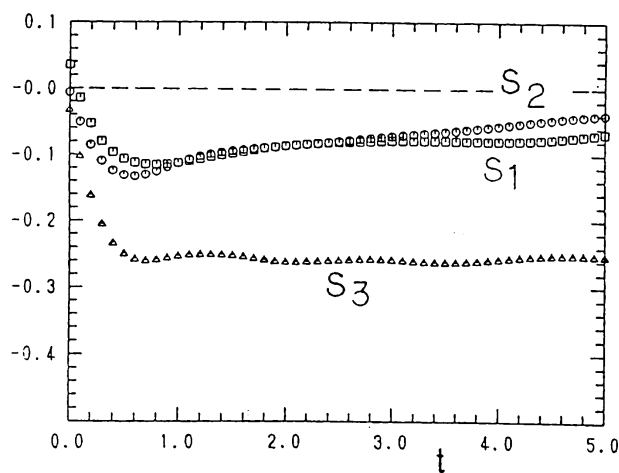


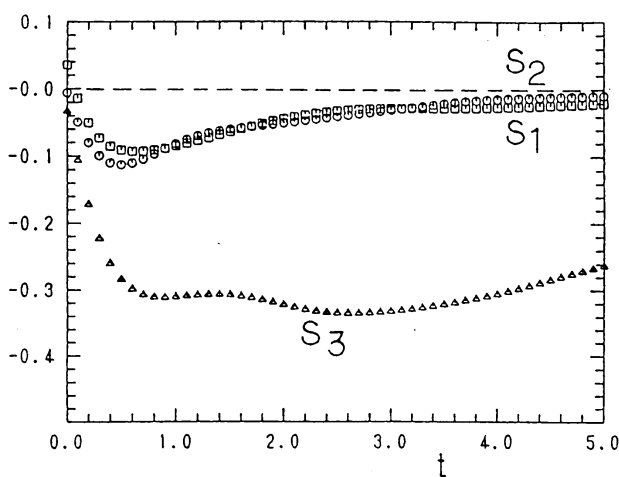
図 11  
圧力の磁場方向の微分と磁場に垂直な方向の微分との比  $2(\partial_3 P)^2 / ((\partial_1 P)^2 + (\partial_2 P)^2)$  の時間変化.



(a)



(b)



(c)

図 1 2 (a)-(c)

各方向のスキューネスの時間変化.

(a)は $N=0.5$ , (b)は $N=1$ , (c)は $N=2$ ,

$\square$ :  $S_1$ ,  $\circ$ :  $S_2$ ,  $\triangle$ :  $S_3$ .