

2次元乱流の Phase Coherency

東大・理・物理 真田 勉 (Tsutomu Sanada)

§ 1. Introduction

現実の自然現象の中で、2次元乱流に出会うことは3次元乱流ほど多くはないが、数値シミュレーションで得られる乱流場は多くの興味深い現象を見せてくれる (For review, see Kraichnan and Montgomery 1980)。Navier-Stokes方程式 (NSEq.) に支配される乱流場は2つの相反する性質を持っている。ひとつは stochastic な振舞いまたは unpredictability であり、他方は order あるいは coherency である。このような相反する2つの性質が乱流の理論的取扱いを困難にしている。Kolmogorov (1941) と Kraichnan (1967) のカスケード理論は2次元乱流に対する基本的な描像を与えるが、その理論に対しても多くの問題が残っている。例えば、カスケード理論から得られたスケールリング則に対する、order や coherency の影響が盛んに議論されている (McWilliams 1984, Herring and McWilliams 1985, Benzi et al 1986)。もう一方で、Saffman (1971) の渦度場の不連続性モデルは、2次元 Euler 方程式で渦度が Lagrange 的に見れば保存されるという数学的事実に基づいている。この不連続場モデルは、エネルギースペクトルに対してカスケード理論とは異なる exponent を与える。皮肉なことに、数値計算の結果はそれに対して決定的な結論を与えていない。おそらく、カスケードモデル、不連続場モデルともにいくらかの修正が必要とされるだろう。この論文は、その問題に関する話題について議論する。主に数値シミュレーションの結果に基づくものである。

§ 2. Numerical scheme

外力無しの2次元 NSeq. を周期性境界条件のもとで、Fourier-Spectral法 (Orszag 1971) を用いて解いた (格子点数 512×512 , 2/3 rule)。粘性率は $\nu = 5.0 \times 10^{-4}$, $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$, $\nu = 10^{-4}$, $\nu = 0.75 \times 10^{-4}$, $\nu = 0.5 \times 10^{-4}$ の5通りである。初期条件は共通で大きいスケールの構造 ($|k| \leq 3$) を random phase で与えた。時間積分は2次の Runge-Kutta 法を用い、 Δt は ν が大きい方の2つでは $\Delta t = 0.0025$, 残りの ν が小さい方の3つでは $\Delta t = 0.00125$ である。 $t = 25$ までを実行した。 $t = 0$ と $t = 25$ における基本的な物理量を Table 1 に示す。

§ 3. Energy spectrum

カスケードモデルと渦度場の不連続モデルの間の最も大きな違いは、慣性

領域におけるエネルギースペクトルの exponent である。十分に大きい Reynolds 数の乱流において、前者は k^{-3} スペクトル、後者は k^{-4} スペクトルを与える。現在までのところ、 k^{-3} を示した報告もあれば、 k^{-4} を描く報告も存在する。さらにこの不確定なスペクトルを説明するための修正理論も数多く提出されている (Babiano et al 1987, Benzi et al 1986, Benzi et al 1987, Brachet et al 1986, Gilbert 1988, Kida 1985, Kida et al 1988, Legras et al 1988, Lilly 1971, Yamada and Ohkitani 1988, Yamamoto 1984)。

このシミュレーションで得られたスペクトルを Fig.1 に示す。エネルギースペクトル $E(k)$ ではなく、エンストロフィースペクトル $Q(k) = k^2 E(k)$ を描いてある。 ν に依存しない慣性領域でのスペクトルの exponent はやはり -1 (カスケードモデル) か -2 (不連続場モデル) か決定できないほど微妙である。従って、スペクトルの exponent に基づいて二つの理論を比較するのは諦めるしかない。

§ 4. Development of coherency and intermittency

時間が達つにつれて、初期に大きいスケールのみを持つ渦度場は次第に様々なスケールを持つ複雑な場に発達し、代表的な長さスケール L が小さくなっていく (Table 1)。

2次元乱流では渦の stretching が存在しないため、流体粒子に乗ってみると渦度は保存する。やがて異なる渦度を持つ流体粒子が接近し、渦度場に (近似的に) 不連続的な場所が形成される。そのような不連続的な場所では渦度の勾配がきわめて大きく、従ってエンストロフィーの散逸も大きい。そのようなエンストロフィーの散逸が大きい場所は2次元中に局在しているかもしれない。これを intermittent な構造と呼ぶ。Fig.2 から 5 は局所的なエンストロフィーの散逸量の鳥かん図である。Figure が示すようにエンストロフィーは非常に狭い領域で散逸している ($t = 10, 25$)。壁のような構造が見える (Fig.5)。すなわち1次元的な狭い領域でエンストロフィーの散逸が大きい。この不連続性は、エンストロフィーの散逸が2次元中で intermittent に起こっていることを示している。

§ 5. Scaling law in the enstrophy dissipation field

この節では、エンストロフィーの散逸場にどのようなスケーリング則が成立しているかを調べる。最初に大域的な視点から調べる。エンストロフィーとその散逸率はそれぞれ、

$$Q = (1/2) \langle \omega^2 \rangle \quad (5.1)$$

と

$$\eta = \nu \langle (\partial \omega / \partial x)^2 + (\partial \omega / \partial y)^2 \rangle \quad (5.2)$$

で表すことができる。ここに ω は渦度場で、 $\langle \cdot \rangle$ は空間平均である。NS eq. から、

$$dQ / dt = -\eta \quad (5.3)$$

が得られる。おのおのの ν に対して、 Q と η の時間発展を Fig.6 と 7 に示す。 Q vs. t の曲線の勾配が（それは η と同等であるが）、 ν に依存しない共通の値に近付いているように見える。従ってエンストロフィー散逸率は時間が達つにつれて、普遍的な値になることが期待される。この普遍性はカスケード理論の最も基本的な仮説の一つである。

次に局所的な視点から、スケーリング則を調べる。次の場を考える：

$$T_\alpha = \nu^\alpha (\partial \omega / \partial x, \partial \omega / \partial y) \quad (5.4)$$

例えば、 η はこの T_α を使って、

$$\eta = \langle |T_{\frac{1}{2}}|^2 \rangle \quad (5.5)$$

と表せられる。異なる ν に対しては、たとえ初期条件が同じでも、一般に T_α は異なる。しかしながら、 T_α が ν に independent となる α が存在すれば（それを α_* とする）、次のスケーリング則が得られる。

$$(\partial \omega / \partial x, \partial \omega / \partial y) \sim \nu^{-\alpha_*} \quad (5.6)$$

α_* を求めるために次の量を計算する。異なる ν を持つ 2 つ場： T_α (1) と T_α (2) に対して、

$$C_\alpha = \frac{\langle |T_\alpha(1) - T_\alpha(2)|^2 \rangle}{\sqrt{\langle |T_\alpha(1)|^2 \rangle \langle |T_\alpha(2)|^2 \rangle}} \quad (5.7)$$

を α の関数として定義する。 α が変化すると、 C_α は $[0, \infty)$ の異なる値を取り得る。もしスケーリング則 (5.6) が満たされるならば、 C_α は $\alpha = \alpha_*$ で最小値 (理想的には 0) を取るだろう。 C_α は $T_\alpha(1)$ と $T_\alpha(2)$ の距離を測る尺度である。例として、 $\nu = 0.5 \times 10^{-4}$ と 0.75×10^{-4} の 2 つの場合について求めた C_α を Fig.8 に示す。(Fig.(b)は $\alpha = 0.5$ 近くの拡大図である。) $\alpha = 0.53$ で最小値を取っていることがわかる (すなわち $\alpha_* = 0.53$)。他の組について、 α_* の値を Table 2 にまとめた。最も ν が大きい場を除けば、 α_* は共通の値 0.53 である。すなわち、十分 Reynolds 数が大きいとき、

$$(\partial \omega / \partial x, \quad \partial \omega / \partial y) \sim \nu^{-0.53} \quad (5.8)$$

のスケーリング則が成立すると考えられる。従って η は、

$$\eta \sim \nu^{-0.06} \quad (5.9)$$

でスケーリングされる。この結果を 2 つの理論と比べてみよう。カスケード理論では、

$$\eta \sim \nu^0 \quad (5.10)$$

であるが、不連続場モデルでは

$$\eta \sim \nu^{2/3} \quad (5.11)$$

である。従ってこのシミュレーションで得られたスケーリング則は不連続場モデルよりもカスケードモデルをはるかによく支持している。

§ 6. Random phase field

ここまでのところ、スケーリング則はほぼカスケードモデルを支持しているが、エネルギースペクトルはそのモデルから得られる exponent よりも steep であるという矛盾した結果を得ている。そこでこの節では物理空間の intermittent な、あるいは coherent な構造の形成がスペクトルを steep にしているのかどうかを調べる。そのために次のような数学的事実を使う。定理「フーリエモードの phase が統計的に独立ならば、intermittent な構造が現れることは確率的に有り得ない」(Sanada in preparation)。そこで

original な NSeq. によって得られる場と、各ステップ毎に phase に人工的にノイズを入れて simulate した結果を比較することによって intermittency の効果を調べる。(この方法はすでに Babiano et al(1987) によって使われているが、彼らの結果は、その粘性項のモデル化、初期条件の与え方ならびに resolution などの点に疑問が残る。) ノイズの入れ方は各ステップ毎に、 $(-2^\circ, 2^\circ)$ の一様乱数を入れるものと、 $(-4^\circ, 4^\circ)$ の一様乱数を入れるものとの2通りである。乱数は各ステップごとに違う値を取る。 ν は、 10^{-4} である。Fig.9 と Fig.10 は、random phase の効果を持ったエンストロフィーの散逸場である。Fig.5 と比較せよ(時間は共通)。Random phase の効果を持つ場は、エンストロフィーの散逸がほぼ一様であり intermittent な構造が消えている。これは、 ω , $\partial\omega/\partial x$, $\partial\omega/\partial y$ の kurtosis の時間発展を示す Figs.11-13 から明らかである。Random phase の場の kurtosis はほぼ3である。これらの Fig. から phase が非独立であることが intermittency を形成していると結論できる。Fig.14 では η の時間発展が示されている。original な NSeq. のものと比較される。Random phase の効果が、エンストロフィーのカスケードを遅れさせていることがわかる。

次にエネルギーのスペクトルと intermittency あるいは、phase coherency との関係について議論する。Fig.1 に示したようにスペクトルの exponent は -1 か -2 か判断できない。このような曖昧な exponent を説明するためにこれまでいくつかのモデルが提出されている。そこで、original な NSeq. と、random phase effect を持った simulation との比較から、スペクトルの exponent に対する intermittency の影響を調べる。Fig.15 は3つのエンストロフィースペクトルである。original な simulation のものと、 $(-2^\circ, 2^\circ)$ のものと、 $(-4^\circ, 4^\circ)$ のものである。 ν は共通である。 $\pm 4^\circ$ の slope が NS や $\pm 2^\circ$ のものと比べて steep である。これは、 $\pm 4^\circ$ の時間発展がまだ過渡的な状態であり、すなわち乱流が十分に発達していないためであろう(Fig.14)。ところが NS と $\pm 2^\circ$ のスペクトルの間にはほとんど差がない。NS の場は間欠的であるが $\pm 2^\circ$ はほぼ一様であり特徴的な構造が存在しない。それでもスペクトルすなわちフーリエモードの amplitude にはほとんど差が無い。

§ 7. Conclusion

2次元 NSeq. の直接数値シミュレーションによって2次元乱流の統計的性質を考察してきた。結果として、1) エネルギースペクトルの exponent は -3 か -4 か判断できない。2) スケーリング則: $(\partial\omega/\partial x, \partial\omega/\partial y) \sim \nu^{-0.53}$ はカスケードモデルを支持する。3) intermittency は存在するがそれがスペクトルの exponent に影響を与えているとは

いえない。

これまで多くの著者が、数値計算で得られる、 k^{-3} より steep なスペクトルを説明しようと試みた。時としてその根拠は intermittency や秩序構造の影響であった。しかしながら今回の結果 3) はそれに対して否定的である。ここでカスケード理論を振り返ろう。 η が ν -independentになるという仮説は結果 2) によってほぼ支持される。従ってカスケード理論に従い η と ν とによって次元解析を行えばエネルギースペクトルの exponent は決まる。3次元Kolmogorov理論では、ほぼ同じ論理に従い、 $k^{-5/3}$ スペクトルは多くの実験で確認されている。しかし2次元ではうまく行かない。その原因と成りうるいくつかの可能性を述べて、この論文を締めくくる。結果 3) によって intermittency の効果は除外される。まず、エネルギー E の保存が考えられる。 ν が十分小さいとき、カスケードプロセスの特性時間の間はエネルギーは保存されると見なして差し支えない。仮に、 η, ν, E の3つの量で次元解析を行えば、スペクトルの exponent は決まらない。2番目にフーリエ空間の non-localityの影響があげられる。2次元 NSeq. の非線形項では、non-local な interaction が支配的であると考えられている (Kraichnan 1971)。しかし、non-local という概念は、transfer という概念に馴染まない。3番目に各スケールの特性時間の問題がある。慣性領域で保存されるエンストロフィーあるいはその流れる割合 η は時間の次元しか持たない(3次元の場合、エネルギー散逸率 ε の次元は時間と長さの両方の組み合わせである)。従って各スケールの特性時間はすべて共通である。大きな渦が分裂して小さな渦に壊れるプロセスで、大きな渦と小さな渦の寿命が同じであるならば、そのような分裂がスムーズに起こるとは考えにくい。以上のように、仮に η の普遍性が正しいとしても、エネルギースペクトルが k^{-3} になることは決して自明なことではない。特に数値実験で得られる steep なスペクトルを説明するためには、カスケードプロセスそのものを考え直す必要がある。

References

- Babiano, A., C. Basdevant, B. Legras and R. Sadourny 1987 :
J. Fluid Mech. 183, 379.
- Benzi, R., G. Paladin, S. Patarnello, P. Santangelo and A. Vulpiani
1986 : J. Phys. A: Math. Gen. 19, 3771.
- Benzi, R., S. Patarnello and P. Santangelo 1987: Europhys. Lett. 3(7),
811.
- Brachet, M. E., M. Meneguzzi and P. L. Sulem 1986 : Phys. Rev. Lett. 57, 683.
- Gilbert, A. D. 1988 : J. Fluid Mech. 193, 475.
- Herring, J. R. and J. C. McWilliams 1985 : J. Fluid Mech. 153, 229.
- Kida, S. 1985 : J. Phys. Soc. Jpn. 54, 2840.
- Kida, S., M. Yamada and K. Ohkitani 1988 : Fluid Dyns. Res. 4, 271.
- Kolmogorov, A. N. 1941 : C. R. Acad. Sci. URSS, 30, 301.
- Kraichnan, R. H. 1967 : Phys. Fluids 10, 1417.
- Kraichnan, R. H. 1971 : J. Fluid Mech. 47, 525.
- Kraichnan, R. H. and D. Montgomery 1980 : Rep. Prog. Phys. 43, 547.
- Legras, B., P. Santangelo and R. Benzi 1988 : Europhys. Lett. 5(1), 37.
- Lilly, D. K. 1971 : J. Fluid Mech. 45, 395.
- McWilliams, J. C. 1984 : J. Fluid Mech. 146, 21.
- Orszag, S. A. 1971 : Stud. Appl. Math. 50, 293.
- Saffman, P. G. 1971 : Stud. Appl. Math. 50, 377.
- Yamada, M. and K. Ohkitani 1988 : Phys. Rev. Lett. 60, 983.
- Yamamoto, K. 1984 : J. Phys. Soc. Jpn. 53, 4094.

t = 0

ν	E	Q	P	U	L	Re
5.0×10^{-4}	0.174	0.509	2.47	0.59	0.45	530
2.5×10^{-4}	0.174	0.509	2.47	0.59	0.45	1100
1.0×10^{-4}	0.174	0.509	2.47	0.59	0.45	2700
0.75×10^{-4}	0.174	0.509	2.47	0.59	0.45	3500
0.5×10^{-4}	0.174	0.509	2.47	0.59	0.45	5300

t = 25

ν	E	Q	P	U	L	Re
5.0×10^{-4}	0.164	0.248	6.33	0.57	0.20	230
2.5×10^{-4}	0.169	0.280	13.7	0.58	0.14	320
1.0×10^{-4}	0.171	0.318	36.5	0.58	0.093	540
0.75×10^{-4}	0.172	0.330	49.8	0.59	0.081	640
0.5×10^{-4}	0.172	0.346	76.9	0.59	0.067	790

Table 1: Fundamental values at t=0 and 25.

ν is viscosity, E is energy per unit mass, Q is enstrophy and P is palinstrophy. The characteristic velocity U is $\sqrt{2E}$, the length L is $\sqrt{Q/P}$ and the Reynolds number Re is UL/ν .

ν	α_*
5.0×10^{-4}	0.57
2.5×10^{-4}	0.53
1.0×10^{-4}	0.53
0.75×10^{-4}	0.53
0.5×10^{-4}	0.53

Table 2: The scaling exponent α_* between two vorticity-gradient fields with different viscosities.

Figure Captions

- Fig.1. Enstrophy spectrum ($t=25$).
 Δ : $\nu = 0.5 \times 10^{-4}$, \square : $\nu = 0.75 \times 10^{-4}$, \circ : $\nu = 10^{-4}$
 \times : $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$ and \diamond : $\nu = 5 \times 10^{-4}$.
- Fig.2. Bird's-eye views of $\nu [(\partial \omega / \partial x)^2 + (\partial \omega / \partial y)^2]$. ($\nu = 10^{-4}$, $t=0$).
- Fig.3. Bird's-eye views of $\nu [(\partial \omega / \partial x)^2 + (\partial \omega / \partial y)^2]$. ($\nu = 10^{-4}$, $t=10$).
- Fig.4. Bird's-eye views of $\nu [(\partial \omega / \partial x)^2 + (\partial \omega / \partial y)^2]$. ($\nu = 10^{-4}$, $t=25$).
- Fig.5. Fine structure of Fig.4.
- Fig.6. Time evolution of enstrophy.
- Fig.7. Time evolution of enstrophy dissipation rate.
- Fig.8. C_α curve between two fields with $\nu = 0.5 \times 10^{-4}$ and $\nu = 0.75 \times 10^{-4}$ ($t=25$). (b) is the enlarged picture about $\alpha = 0.5$.
- Fig.9. Bird's-eye views of $\nu [(\partial \omega / \partial x)^2 + (\partial \omega / \partial y)^2]$. ($\nu = 10^{-4}$, random phase $\pm 2^\circ$, $t=25$).
- Fig.10. Bird's-eye views of $\nu [(\partial \omega / \partial x)^2 + (\partial \omega / \partial y)^2]$. ($\nu = 10^{-4}$, random phase $\pm 4^\circ$, $t=25$).
- Fig.11. Time evolution of kurtosis ($\nu = 10^{-4}$).
 \square is kurtosis of ω , \circ is that of $\partial \omega / \partial x$ and \bullet is that of $\partial \omega / \partial y$.
- Fig.12. Time evolution of kurtosis ($\nu = 10^{-4}$, random phase $\pm 2^\circ$). Symbols as in Fig.11.
- Fig.13. Time evolution of kurtosis ($\nu = 10^{-4}$, random phase $\pm 4^\circ$). Symbols as in Fig.11.
- Fig.14. Time evolution of η . The symbol 2 is that of random phase $\pm 2^\circ$ and the symbol 4 is that of random phase $\pm 4^\circ$.
- Fig.15. Enstrophy spectrum. \circ : NSeq., Δ : random phase $\pm 2^\circ$ and \times : random phase $\pm 4^\circ$.

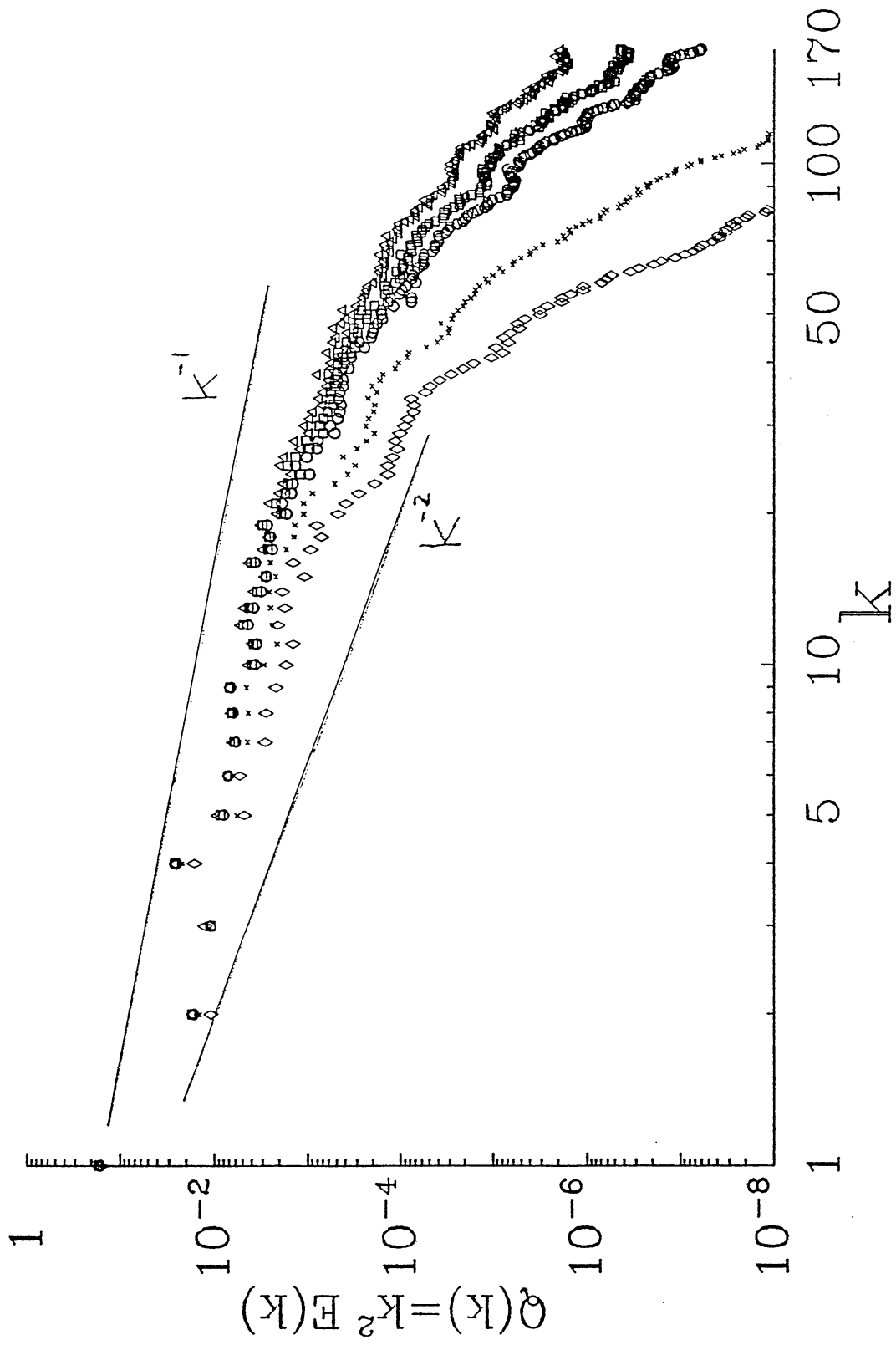


Fig. 1.

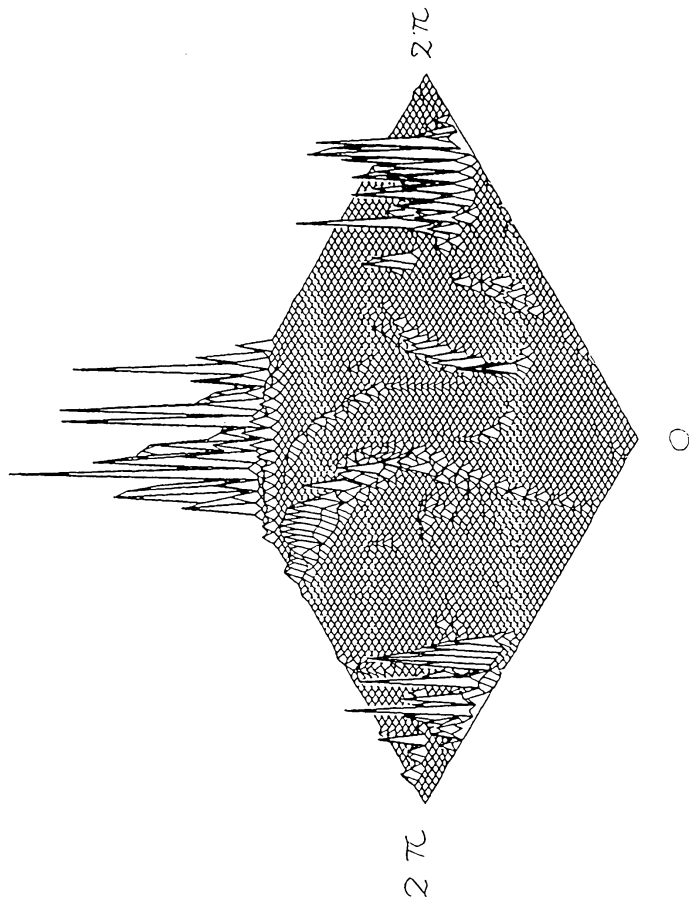


Fig. 3.

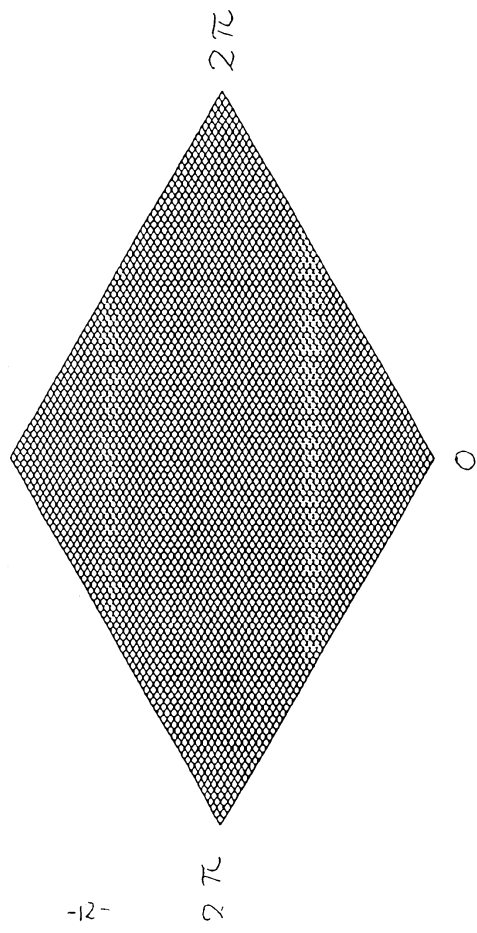


Fig. 2.

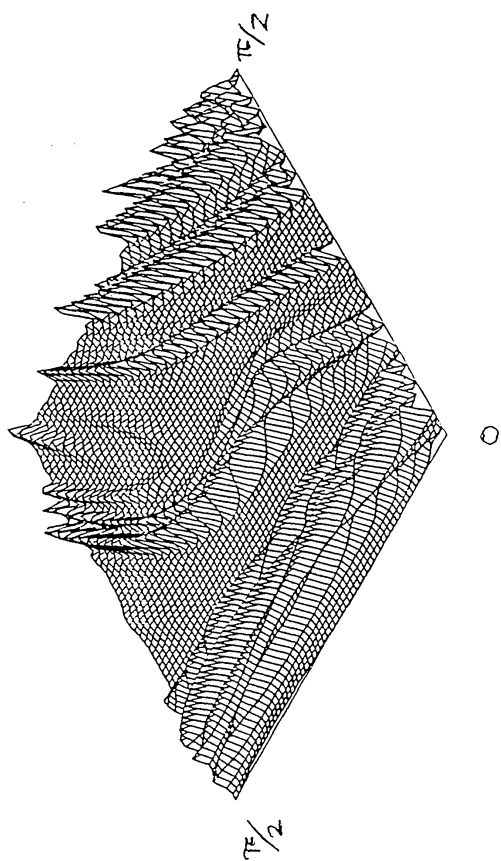


Fig. 5.

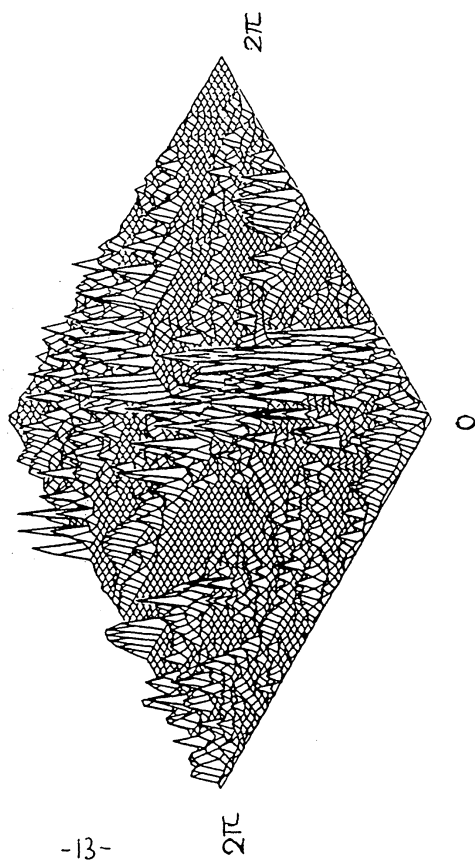


Fig. 4.

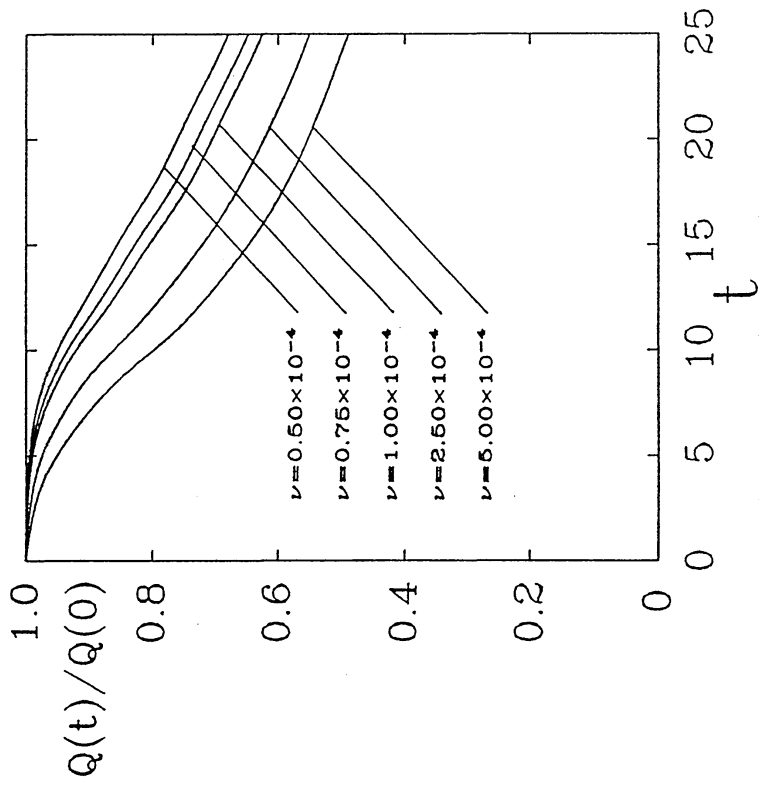


Fig. 6.

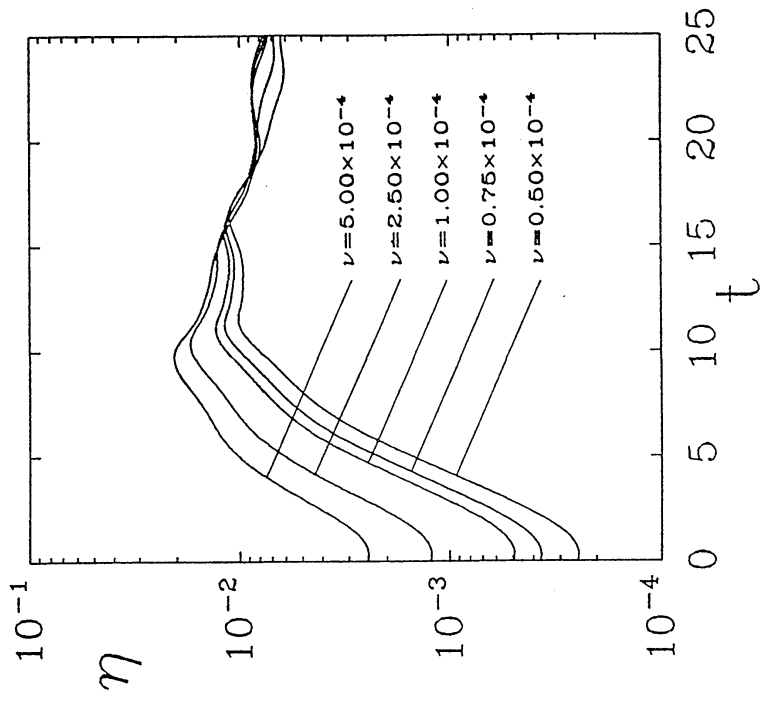


Fig. 7.

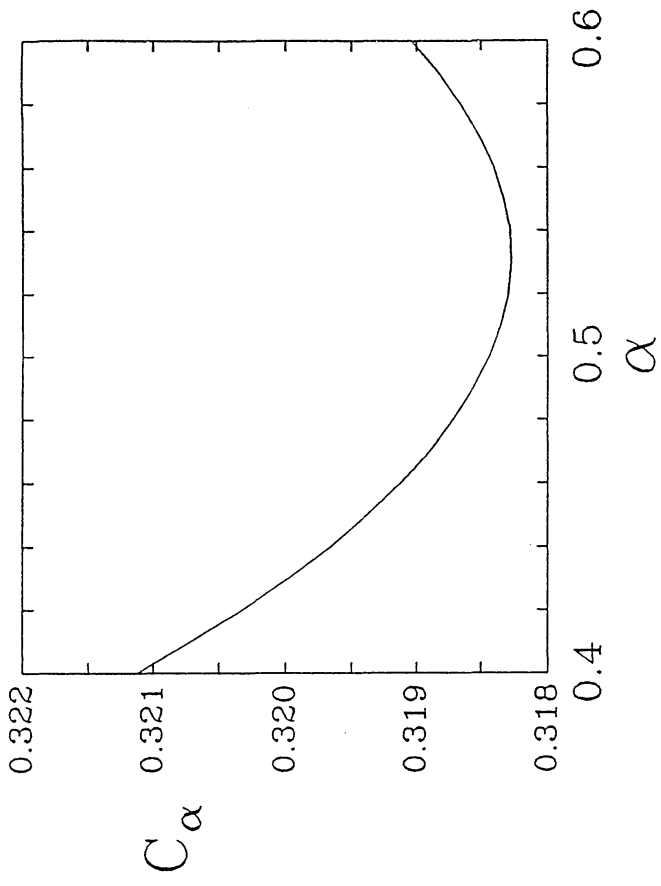


Fig. 8 (b).

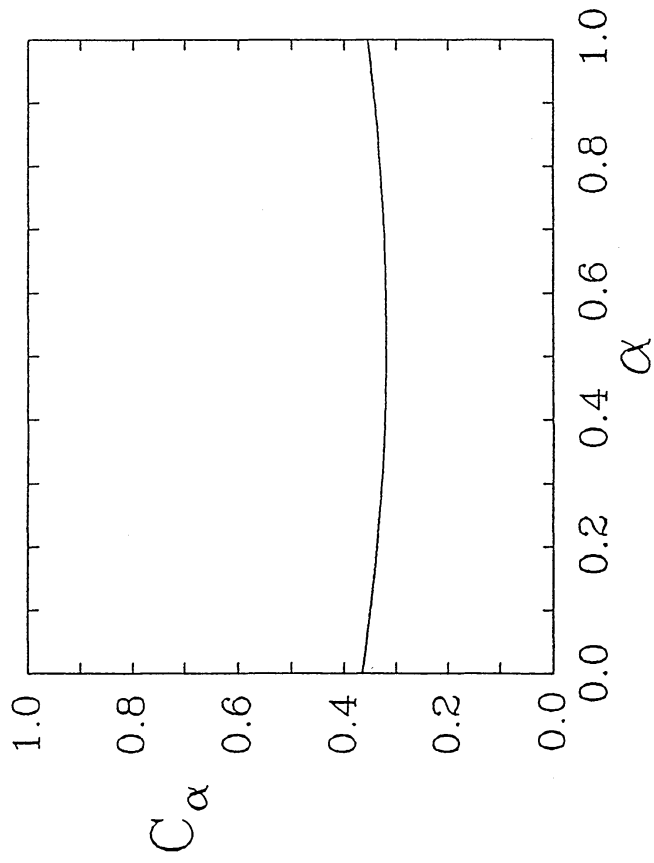


Fig. 8 (a).

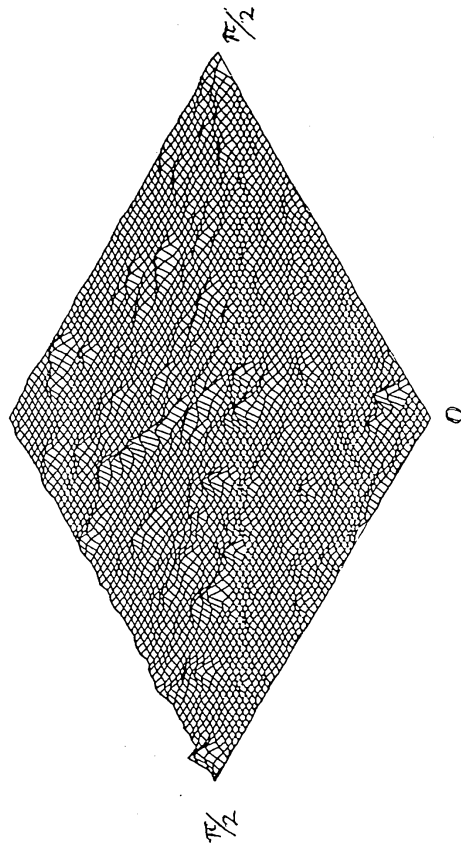


Fig. 10.

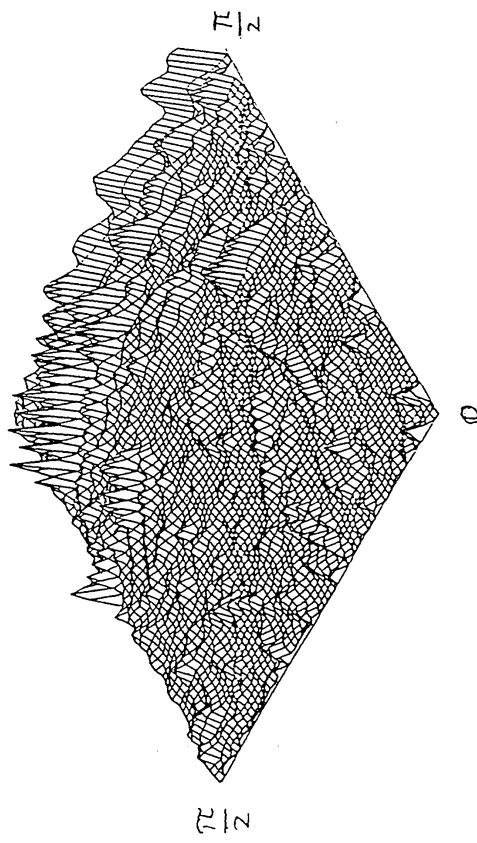


Fig. 9.

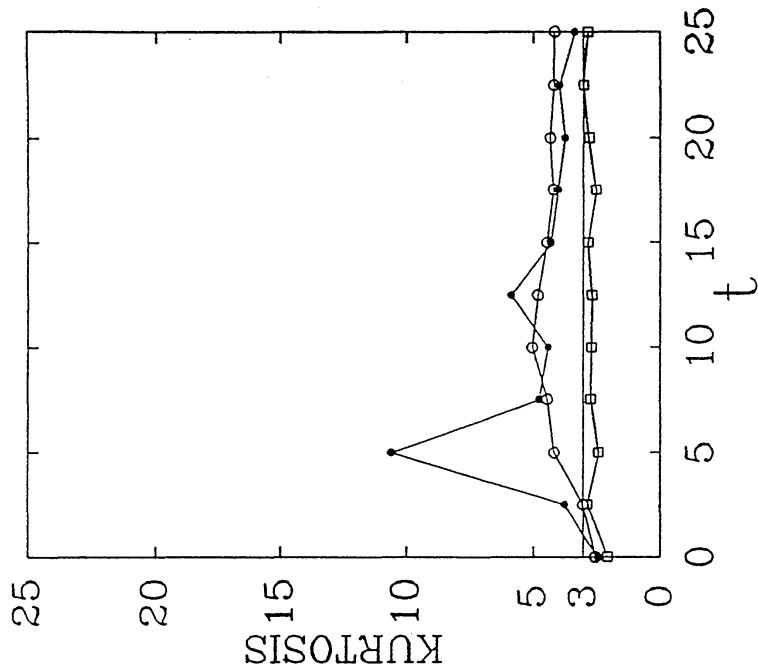


Fig. 12.

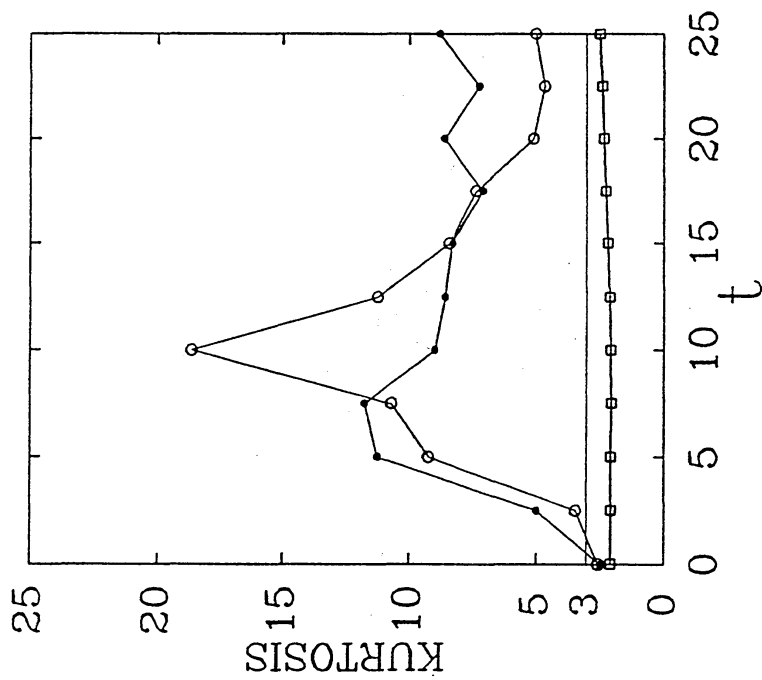


Fig. 11.

\square $K(w)$
 \circ $K(wr)$
 \bullet $K(wr)$

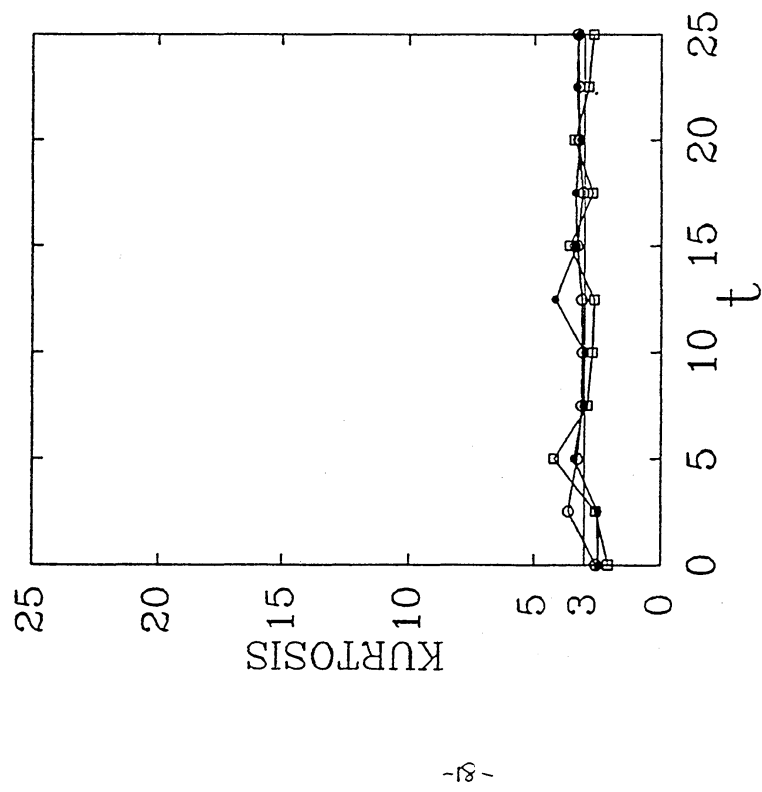


Fig. 13.

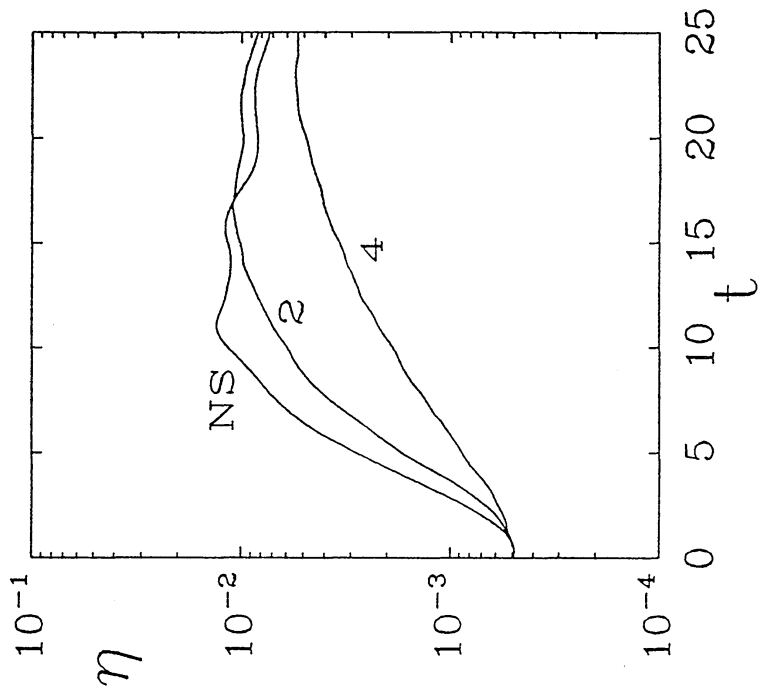


Fig. 14

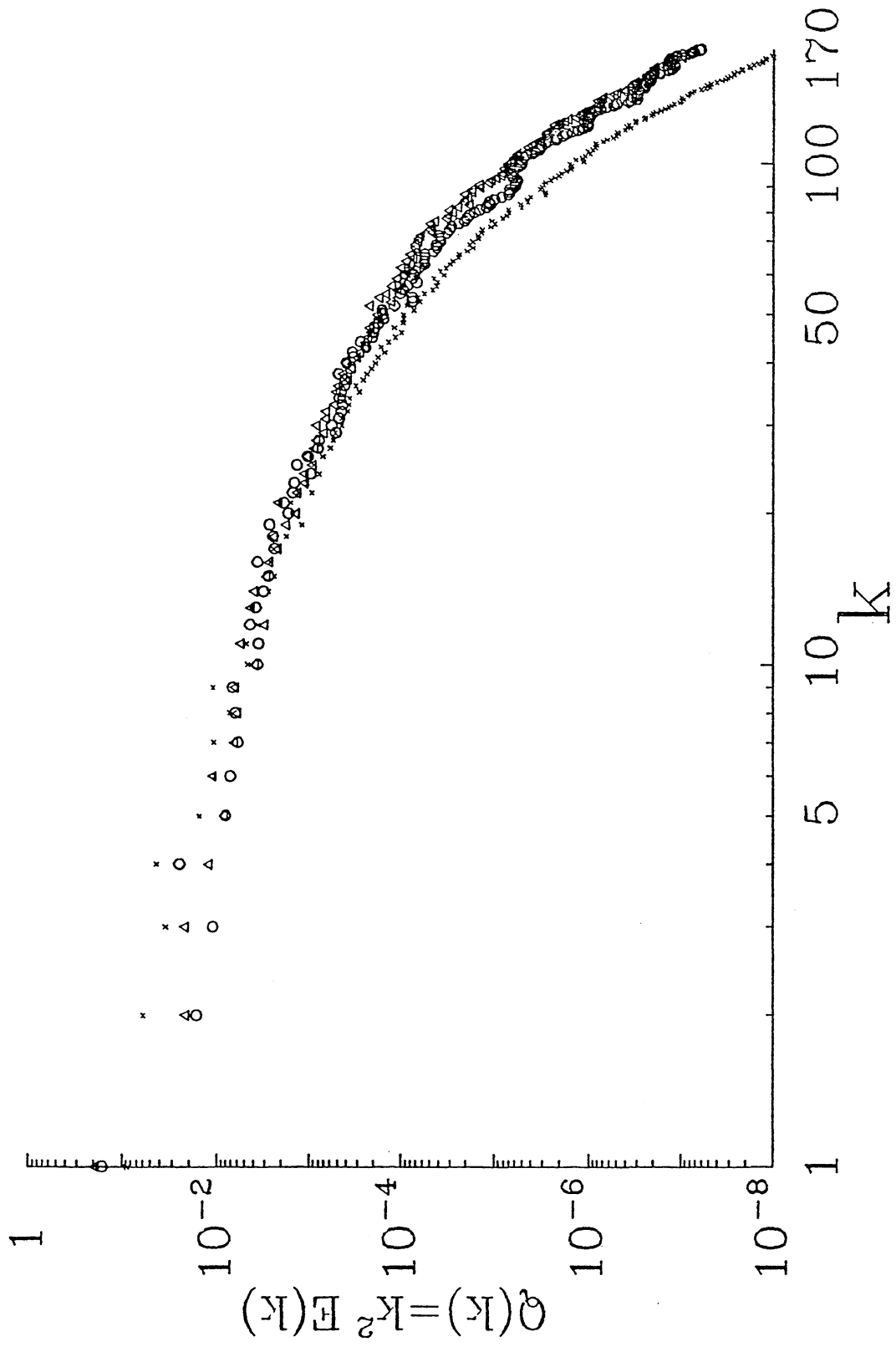


Fig. 15