数理解析研究所講究録
第719巻 1990年 270-278

乱流の Closure とそのモデル表現

名大 工 金田 行雄 (Yukio Kaneda)

1. 慣性小領域の特性時間

乱流の慣性小領域では、少なくとも二つの特性的な時間スケールがある。ひとつは"random sweeping"あるいは"random dephasing"などといわれる効果に関連するもので、もうひとつは"internal deformation (distortion)"あるいは"random decorrelation"などといわれる効果に関連するものである。前者の時間スケールをτ_E、後者のそれをτ_Lとし、以後、kを慣性小領域における波数、εを単位質量あたりの平均エネルギー散逸、V_0を乱流場のエネルギーを担っている大きな渦の特性速度とすると

$$\tau_E = O(1/(V_0 k)),$$
$$\tau_L = O(1/(\varepsilon^{1/3} k^{2/3})),$$

である。($\tau_E << \tau_L$)。

乱流場がコルモゴロフの相似則に従うとすれば、波数k

の速度成分 v_k のエネルギー $E_k \propto \langle v_k \cdot v_{-k} \rangle$ は大きな渦の性質とくに V_0 にはよらない。一方、速度成分 v_k 自体（$v_k \cdot v_k$ ではない）の時間変化は V_0 に強く影響される。このことから、例えば、速度場 v のオイラー的二時刻相関（あるいはモーメント）

$$< \{v_i(\mathrm{x}+\mathrm{r}, t+\tau) - v_j(\mathrm{x}, t)\}^2 >, \tag{1}$$

の時間差τについての時間変化は、$k \equiv 1/r$ が慣性小領域の波数領域にあるとすれば、τ_E のオーダーで減衰する。すなわち、（1）は τ_E のオーダーの特性時間を持っている。（1）のオイラー的異時刻相関と、例えば、

$$< \{v_i(\mathrm{x}+\mathrm{r}+\mathrm{v}_0\tau, t+\tau) - v_j(\mathrm{x}, t)\}^2 >, \tag{2}$$

あるいは、ラグランジュ的相関

$$< \{v_i(\mathrm{x}+\mathrm{r}, t; t+\tau) - v_j(\mathrm{x}, t)\}^2 >, \tag{3}$$

を混同してはいけない。ここで、$v_0 \equiv v(x, t)$ であり、$v(x, t; s)$ は時刻 t に場所 x にあった流体粒子の時刻 s における速度である。（2）や（3）の相関の時間差τについての依存性を示す特性時間は（1）と違って τ_L である。

以上のことは、ここではとくに文献をあげないけれども、すでに充分議論されよく知られていることである。しかし、残念ながら、文献によっては、例えば（1）と（2）の、あるいは τ_E と τ_L との混同が見られるのも事実である。

2. 乱流の Closure とそのモデル表現

乱流の Closure（完結近似）との関連でそのモデル表現を考えるのは次の二つの場合、すなわち（I）まず最初になんらかのモデルを想定し、そのモデルを基に Closure を構成する場合と、（II）まずモデルによらず Closure を構成し、その後にそのClosure のモデル表現が可能かを調べる場合がある。（II)の場合に比べ、（I)の場合のほうが、Closure の良否が良いモデルの存在に決定的に依存している。なお、ここである Closure に対してそのモデル表現が可能であるというのは、その Closure がなんらかの実現可能な力学モデルの集団の統計平均に対する厳密に正しい関係式になっていることを意味し、もしモデル表現が可能であればその Closure が、任意の実現可能な統計量の満たすべき、エネルギーの正値性やシュワルツの不等式などの条件を満たすことが保証される。

さて、よく知られているように、低次の相関については間欠性の影響が少なく、コルモゴロフの相似則が成り立つとすれば、

（A）エネルギースペクトルはkの－5／3乗則に従う。

また、前節の議論によれば、上と同じ前提のもとで

（B）オイラー的二時刻相関の特性時間は τ_E のオーダー、

（C）ラグランジュ的二時刻相関の特性時間はτ_Lのオーダーである。

それ故、コルモゴロフの相似則が重要ではないという立場を取らない限り、Closureあるいはそのモデルを構成する場合、この（A）－（C）と矛盾しないものを構成するのが自然である。しかしながら、これまで提案されたモデルでは、そのほとんどが（A）－（C）のどれかに矛盾している。例えば、あるものでは（B）は正しいが、（A）のエネルギースペクトルがkの－5／3乗ではなく－3／2乗に比例しており、また他のものでは（A）のエネルギースペクトルについては正しいが、（B）のオイラー的二時刻相関の特性時間がτ_Eではなくτ_Lになっていたりしている。なお、一見、異時刻相関を用いず、同時刻相関のみを用いているように見える、Fokker-Planck方程式を用いるモデルでも、そのFokker-Planck方程式は実は同時刻相関だけでなく異時刻相関をも支配するのであるから、上記（B），（C）の要請は無視できない。

次節では私が以前、ラグランジュ的な繰り込み展開の方法に基づいて導かれるある近似（Lagrangian Renormalized Approximation（LRA） あるいは Markovianized LRA（MLRA））を提案した際[1)]に示したLangevin方程式型のモデルを少し修正することによって上記（A）－（C）全

てを満たすMLRAのモデルが作れられることを示す。

3. MLRAのモデル表現

MLRAのエネルギー式は

$$[\partial/\partial t + 2\nu k^2]Q(k,t) = D(k,t), \tag{4}$$

と書くことができる。ここで

$$D(k,t) \equiv 2\pi \iint_{\triangle} \theta(k,p,r,t) D'(k,p,r,t) kpr\, dp\, dr, \tag{5}$$

$$D'(k,p,r,t) \equiv b(k,p,r)[Q(p,t)Q(r,t) - Q(k,t)Q(r,t)],$$

$$\Delta \equiv \{p, r ; p>0, r>0, |p-r|<k<p+r\},$$

であり、エネルギースペクトル E は $E(k,t)=2\pi k^2 Q(k,t)$ で与えられ、ν は動粘性係数、b, θ はある適当な関数で、$\theta(k,p,r,t) = \theta(k,r,p,t) \geq 0$ である。次節に示すように（4）は次の形に書くこともできる。

$$[\partial/\partial t + 2(\nu k^2 + C(k,t))]Q(k,t) = D^{+}(k,t), \tag{6}$$

ここで

$$D^{+}(k,t) \geq 0, \quad 0 \leq C(k,t) < \infty,$$

であり慣性小領域で $C(k,t) = O(\varepsilon^{1/3}k^{2/3})$ である。

（6）あるいは（4）を与えるモデルとしては

$$[\partial/\partial t + \nu k^2 + C(k,t))]u_i(\mathrm{k},t) = P_{ij}(\mathrm{k})f_j(\mathrm{k},t),$$

がある。ここで f は平均が 0 で

$$f_i(-\mathrm{k},t) = f_i^*(\mathrm{k},t), \tag{7}$$

$$(L/2\pi)^3 < f_i(\mathrm{k},t)f_j(\mathrm{p},t') >= \delta_{ij}\delta_{\mathrm{k+p}}\delta(t-t')D^{+}(k,t)/2,$$

を満たすランダムな外力であり，速度場は空間的に周期的であるとし、Lはその基本周期の一辺の長さ（L→∞）、$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ である。このモデルで与えられるエネルギーの式すなわち（6）あるいは（4）は上のモデルの他にも

$$[\partial/\partial t + (ik_j V_j^A(\mathbf{k},t) + \nu k^2 + C(k,t) + C^A(k,t))]u_i(\mathbf{k},t)$$
$$= P_{ij}(\mathbf{k})[f_j(\mathbf{k},t) + f_j^A(\mathbf{k},t)], \qquad (8)$$

のモデルでも与えられる。　ここで C^A は任意に非負の関数、V_j^A は＜ V_j^A ＞を満たす任意の確率過程である。ランダムな力 $\boldsymbol{f}^A$ は $\boldsymbol{f}$ と統計的に独立で平均が0、そして（7）のような実数条件と

$$(L/2\pi)^3 < f_i^A(\mathbf{k},t) f_j^A(\mathbf{p},t') >= \delta_{ij}\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{p}}\delta(t-t')C^A(k,t)Q(k,t),$$

を満たすものである。（8）で C^A と V_j^A を $C^A(k,t) = O(V_0 k)$, $V_j^A(k,t) = O(V_0)$ を満たすように取ると、（8）のモデルのオイラー的二時刻相関の減衰は慣性小領域では、係数 $C(k,t)$ $(= O(\varepsilon^{1/3}k^{2/3}))$ よりも、減衰係数 C^A あるいは位相をずらす係数 $\mathbf{V}^A$ により強く支配される。それ故（8）はオイラー的二時刻相関に対して τ_E のオーダーの特性時間を与える。ラグランジュ的特性時間に関しては、文献1で与えた、θ、η 及びモデル（式（4．2））はそのままで良く（8）はラグランジュ的二時刻相関に対して τ_L のオーダーの特性時間を与える。

（8）が任意の C^A と $\mathbf{V}^A$ に対して同じエネルギーの式（

6）を与えるということは、一般にエネルギーの式からだけでは、Langevin 方程式が確定しないことを意味している。

4. 式（6）の証明

$\theta(k,p,r,t)=\theta(k,r,p,t)$ であるから、式（5）は

$$D(k,t)\equiv 2\pi\iint_{\triangle}\theta(k,p,r,t)D(k,p,r,t)kpr\,dp\,dr,$$

と書ける。ここで

$$\begin{aligned}2D(k,p,r,t)\equiv\ & 2a(k,p,r)Q(p,t)Q(r,t)-\\ & -[b(k,p,r)Q(r,t)+b(k,r,p)Q(p,t)]Q(k,t),\end{aligned} \tag{9}$$

$$2a(k,p,r)=b(k,p,r)+b(k,r,p)\geq 0\ ,$$

である。関数 $D(k,p,r,t)$ はその正の部分と負の部分に分けて

$$D(k,p,r,t)=D^{+}(k,p,r,t)+D^{-}(k,p,r,t),$$

と書くことができる。ここで

$$\begin{aligned}D^{+}(k,p,r,t)&\equiv D(k,p,r,t), &&\text{if } D(k,p,r,t)>0,\\ &\equiv 0, &&\text{if } D(k,p,r,t)\leq 0,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}D^{-}(k,p,r,t)&\equiv 0, &&\text{if } D(k,p,r,t)\geq 0,\\ &\equiv D(k,p,r,t), &&\text{if } D(k,p,r,t)<0,\end{aligned} \tag{11}$$

である。それ故、$D(k,t)$ は

$$\begin{aligned}D(k,t)&=D^{+}(k,t)+D^{-}(k,t)\\ &=D^{+}(k,t)-2C(k,t)Q(k,t),\end{aligned}$$

と書ける。ここで

$$D^{\pm}(k,t) \equiv 2\pi \iint_{\triangle} \theta(k,p,r,t) D^{\pm}(k,p,r,t) kpr\,dp\,dr,$$

$$-2C(k,t) \equiv D^{-}(k,t)/Q(k,t), \tag{12}$$

であり、$\theta(k,p,r,t) \geq 0$ であることと、定義（１０）、（１１）により

$$D^{+}(k,p,r,t) \geq 0, \qquad D^{-}(k,p,r,t) \leq 0\ ,$$

であることから、

$$D^{+}(k,t) \geq 0, \qquad D^{-}(k,t) \leq 0\ ,$$

となる。 $a(k,p,r) \geq 0$ であるから、（４）からもし $Q(k,t)$ $=0$ なら $D(k,p,r,t) \geq 0$ すなわち $D^{-}(k,p,r,t) = 0$ であることがわかる。それ故、（１２）で定義されたＣは $Q(k,t)$ が０であっても有限である。なぜなら、そのとき $D^{-}(k,p,r,t)$ と $D^{-}(k,t)$ は０であるからである。なお、$Q(k,t) \equiv \delta \ll 1$ のとき、$D^{-}(k) \leq O(\delta)$ である。また定義より $C(k,t) \geq 0$ であることは明かである。

$r \ll k$ に対して

$$Q(p,t) - Q(k,t) = O(r), \qquad b(k,r,p) = O(r),$$

であることなどに注意すれば $D^{\pm}(k,t)$ のｐ，ｒ積分が慣性小領域の形

$$E(r) \propto r^{-5/3}, \quad \theta(k,p,r,t)\ (\propto k^{-2/3} \quad \text{for} \quad r \ll k),$$

を代入したとき収束することが示される。このことは

$$C(k,t) = O(\varepsilon^{1/3}k^{2/3})$$

であることを意味する。

要するに、エネルギーの式（４）は次の形に書くことができることがわかる。

$$[\partial/\partial t + 2(\nu k^2 + C(k,t))]Q(k,t) = D^+(k,t),$$

ここで

$$D^+(k,t) \geq 0, \quad 0 \leq C(k,t) < \infty,$$

である。

文献

１） Kaneda,Y. 1981, J.Fluid Mech. 107,pp.131.