

渦度の対流・伸長による

乱流エネルギー輸送への影響

都立大・理 富山泰伸 (Yasunobu Tomiyama)

§ 1 はじめに

多くの研究者を納得させる論理と近似を駆使して、Navier-Stokes 方程式から閉じた乱流方程式系を導き出すことは困難であり、得られた方程式系に解析の簡便を求めることは一層困難であり、更に、その方程式にあらゆる状況下の乱流に対しても良好な結果を期待することは、絶望的に困難であろう。ここでは、閉じた方程式の導出に当って、用いる論理と近似の精密さは多少犠牲にして、得られる方程式の簡素さに重点を置いた。基となる方程式は渦度方程式の渦度の対流項と伸長項の効果の違いを強調した近似方程式で、Navier-Stokes 方程式から直接近似を行うことはしない。その近似方程式に、更に準正規分布近似を適用して閉じた方程式を導く。得られた方程式の数値計算に要する時間は $EDQNM$ と同程度で比較的簡単な方程式である。妥当性の検証のために定常乱流を適用した結果は良好である。渦度の対流項と伸長項がそれぞれ乱流エネルギー伝達に及ぼす影響を調べたので

その結果も合わせて報告する。

§2. 渦度のモデル方程式による乱流方程式

乱流は集合して渦の複雑なからみ合い運動と考えられる。

渦度 $\omega(\boldsymbol{x}) = \text{rot} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を支配する方程式は Navier-Stokes 方程式から、次のように導かれる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \boldsymbol{u} + \nu \Delta \omega \quad (2-1)$$

この渦度方程式の $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \omega$ は渦度の対流を、 $(\omega \cdot \nabla) \boldsymbol{u}$ は渦度の伸長を表わしている。

さて、 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $\omega(\boldsymbol{x})$ を Fourier mode により

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\boldsymbol{k}} u_\alpha(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}} \\ \omega_\alpha(\boldsymbol{x}) &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial u_\gamma(\boldsymbol{x})}{\partial x_\beta} = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{\boldsymbol{k}} k_\beta u_\gamma(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

のように表し、(2-1) にこれらを代入して、整理すると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) v_\alpha(\boldsymbol{k}) + i \sum D_{\alpha\beta\gamma}^a(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) v_\beta(\boldsymbol{p}) v_\gamma(\boldsymbol{q}) \\ &= -i \sum D_{\alpha\beta\gamma}^s(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) v_\beta(\boldsymbol{p}) v_\gamma(\boldsymbol{q}) \end{aligned} \quad (2-3)$$

ただし

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha\beta\gamma}^a(k, l, q) &= \frac{1}{2} \left[\frac{p}{k} z k_r \Delta_{\alpha\beta}(k) + \frac{q}{k} y k_\beta \Delta_{\alpha\gamma}(k) \right] \\
 D_{\alpha\beta\gamma}^s(k, l, q) &= \frac{1}{2} \left[\frac{q}{k} y k_r \Delta_{\alpha\beta}(k) + \frac{p}{k} z k_\beta \Delta_{\alpha\gamma}(k) \right] \\
 \Delta_{\alpha\beta}(k) &= \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2 \\
 x &= \cos(p_\alpha q_\alpha / pq), \quad y = \cos(k_\alpha p_\alpha / kp), \quad z = \cos(q_\alpha k_\alpha / qk)
 \end{aligned}
 \tag{2-4}$$

のように定義する。(2-3)の左辺が3項は対流項，右辺は伸長項である。

ここで，次のような性質を注意しておく。

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha\beta\gamma}^s(k, l, q) &\cong 0 \quad (k, p \ll q, \quad k, q \ll p \text{ のとき}) \\
 D_{\alpha\beta\gamma}^a(k, l, q) &\cong D_{\alpha\beta\gamma}^s(k, l, q) \quad (k \ll p, q \text{ のとき})
 \end{aligned}
 \tag{2-5}$$

したがって， $k, p \ll q, \quad k, q \ll p$ のとき，伸長項は充分小さくなる。

乱流粘性は渦間相互の対流による運動量の拡散が主要因と考えることができるだろう。したがって，対流項を $v(k)$ へ射影平均した：

$$\begin{aligned}
 i \sum D_{\alpha\beta\gamma}^a(k, l, q) \langle v_\alpha^*(k) v_\beta(l) v_\gamma(q) \rangle v_\alpha(k) / \langle v_\mu(k) v_\mu^*(k) \rangle \\
 \equiv \eta(k) v_\alpha(k)
 \end{aligned}
 \tag{2-6}$$

によって，対流項を乱流粘性項のように表現する。ただし， $\langle \rangle$ は平均を意味する。(2-6) に $v_\alpha^*(k)$ をかけて平均すると対応する対流項の平均に一致するので，その範囲で正しい表現である。この近似を対流渦粘性近似 (Advection eddy viscous approximation AEVA) と名づけておこう。

対流渦粘性近似により，渦度方程式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 + \gamma(k) \right] v_\alpha(k) = -i \sum D_{\alpha\beta\gamma}^s(k, p, q) v_\beta(p) v_\gamma(q) \\ \left[-2i D_{\alpha\beta\gamma}^s(k) v_\beta(\bar{p}) v_\gamma(\bar{q}) \right] \quad (2-7)$$

$$\gamma(k) = i \sum D_{\alpha\beta\gamma}^a(k, p, q) \langle v_\alpha^*(k) v_\beta(p) v_\gamma(q) \rangle / \langle w(k) \rangle \quad (2-8)$$

$$w(k) = v_\alpha(k) v_\alpha^*(k) \quad (2-9)$$

ただし

$$D_{\alpha\beta\gamma}^s(k) = D_{\alpha\beta\gamma}^s(k, p, q) + D_{\alpha\beta\gamma}^s(k, p, q) \\ = \frac{1}{2} [k_\alpha \Delta_{\beta\gamma}(k) + k_\beta \Delta_{\alpha\gamma}(k)] \quad (2-10)$$

となる。(2-7) の [] の項は $v_\mu^*(\bar{p}) v_\nu^*(\bar{q})$ をかけて平均するとき $p = \bar{p}$, $q = \bar{q}$ と $p = \bar{q}$, $q = \bar{p}$ の p, q の組はそれ以外の p, q の組とは扱いを異にすることを意味する。三重速度相関 $\langle v_\alpha(k) v_\mu^*(\bar{p}) v_\nu^*(\bar{q}) \rangle$ を求めるときに用いられる。 $\langle v_\alpha(k) v_\alpha^*(k) \rangle$ を求めるときは，右辺が1項と左辺が3項に含めてしまう。

(2-7) に $v_\mu^*(\bar{p}) v_\nu^*(\bar{q})$ をかけて，準正規分布近似を用いる

と $\langle v_x(k, t) v_\mu^*(p, t) v_\nu^*(q, t) \rangle$ が求まる。これを (2-8) に代入して $\eta(k, t)$ を求める。その結果、次の閉じた方程式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) W(k, t) = H(k, t), \quad (2-11)$$

$$H(k, t) = 2\pi k \int_0^\infty dp p^3 \int_{-1}^1 d\mu \beta(k, p, q) \int_{t_0}^t ds [W(p, s) - W(q, s)] W(q, s) \\ \times G(k; t, s) G(p; t, s) G(q; t, s), \quad (2-12)$$

$$G(k; t, t') = e^{-\int_{t'}^t \sigma(k, s) ds}, \quad (2-13)$$

$$\sigma(k, t) = \nu k^2 - Ha(k, t)/2W(k, t), \quad (2-14)$$

$$Ha(k, t) = 2\pi k \int_0^\infty dp p^3 \int_{-1}^1 d\mu \beta_a(k, p, q) \int_{t_0}^t ds [W(p, s) - W(q, s)] W(q, s) \\ \times G(k; t, s) G(p; t, s) G(q; t, s), \quad (2-15)$$

$$\beta(k, p, q) = z^3 + xy, \quad (2-16)$$

$$\beta_a(k, p, q) = \frac{1}{2} [z^3 + xy + z(z^2 - y^2)] \quad (2-17)$$

$W(k, t)$ はエネルギー・スペクトル密度, $H(k, t)$ はエネルギー・伝達密度, $Ha(k, t)$ は対流項によるエネルギー・伝達密度である。 $G(k; t, t')$ は応答関数に類似な関数である。渦度方程式の伸長項によるエネルギー・伝達密度部分は

$$H_s(k, t) = H(k, t) - H_a(k, t) \quad (2-18)$$

のように表わされることは明らかである。

この方程式系の数値計算に要する時間は EDQNM と同程度である。 $G(k; t, t')$ は $\sigma(k, t)$ 即ち $H_a(k, t)$, $W(k, t)$ を求めることによって簡単に求められる。それは、この方程式系が同時刻相関だけによる表現によるのである。

この方程式系は $W(k, t)$ の正值性を保証する。それは次のように示される。今、 $W(k, t) \rightarrow 0$ とする。(2-14) から $\sigma(k, t) \rightarrow \infty$ となり、任意の t' に対して $G(k; t, t') \rightarrow 0$ に近づき、従って (2-12) から $H(k, t) \rightarrow 0$ となり $W(k, t)$ の変化は抑制され、正值性が保たれる。

§ 3. 定常乱流への応用

方程式 (2-11) ~ (2-15) を定常乱流に適用して、その妥当性を調べて見る。今、波数 $k \cong 0$ の近傍に外からエネルギーを注入して、乱流の平均的定常状態が作り出されているものとする。その時、 $W(k, t) \rightarrow W(k)$, $\sigma(k, t) \rightarrow \sigma(k)$, $G(k; t, t') \rightarrow G(k, \tau)$ ($\tau = t - t'$) と表わされ、方程式は次のように表わされる。

$$2\nu k^2 W(k) = 2\pi k \int_0^\infty dp p^3 [W(p) - W(k)] \int_{-1}^1 d\mu \beta(k, p, q) W(q) \theta(k, p, q) + \frac{\epsilon}{2\pi k^2} f(k), \quad (3-1)$$

$$\sigma(k) = \nu k^2 + \pi k \int_0^\infty dp p^3 \left[1 - \frac{W(p)}{W(k)} \right] \int_{-1}^1 d\mu \beta_a(k, p, q) W(q) \theta(k, p, q), \quad (3-2)$$

$$\theta(k, p, q) = [\sigma(k) + \sigma(p) + \sigma(q)]^{-1}, \quad (3-3)$$

ただし

$$\int_0^\infty f(k) dk = 1 \quad (3-4)$$

$\epsilon f(k)$ は波数 k に単位時間当り注入されるエネルギーの割合を表わし、全体として、 ϵ の割合でエネルギーは注入されていることを示している。

先づ初めに、次の条件を満たす解を求める。

$$\left[\begin{array}{l} \text{条件 I.} \quad f(k) = \delta(k - k_0) \quad k_0 \rightarrow 0 \\ \text{条件 II.} \quad \nu \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (3-5)$$

上の条件を満たす (3-1), (3-2), (3-3) の解は

$$W(k) = \frac{K_0}{2\pi} \epsilon^{2/3} k^{-11/3} \quad (E(k) = K_0 \epsilon^{2/3} k^{-5/3}) \quad (3-6)$$

$$\sigma(k) = D \epsilon^{1/3} k^{2/3} \quad (3-7)$$

を代入することによって、これが解であることを確かめられる。

定数 K_0 , D を求めるには $2\pi k^2 \times (3-1)$ を k について 0 から慣性領域内のある波数 k_i まで積分することによって得られる

$$\epsilon = 4\pi^2 \int_0^{k_i} dk k^3 \int_{k_i}^{\infty} dp p^3 [W(k) - W(p)] \int_{-1}^1 d\mu \beta(k, p, \vartheta) W(\vartheta) \theta(k, p, \vartheta) \quad (3-8)$$

と (3-2) に (3-6) と (3-7) を代入して得られる式を数値積分する。それらの式から次のような結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= 1.56 \\ D &= 0.429 \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

これまでに報告されている K_0 の実験値は $1.2 \leq K_0 \leq 2.0$ の範囲にばらついていてるので、確定的な K_0 の値はわからないが (3-9) の K_0 は妥当な値と云えよう。このようにして、 $R \rightarrow \infty$ での (3-1) ~ (3-3) が与えるエネルギー・スペクトルは妥当な K_0 をもつ Kolmogorov スペクトルとなることが示された。

次に、条件をゆるめて、条件 I だけを課し、慣性、粘性両領域にまたがるスペクトルを逐次近似法を用いて計算を行った。TFM^{1), 2)}, EDQNM³⁾ についても同様な計算を行ったので、我々の理論と比較しよう。ただし、TFM と EDQNM については $K_0 = 1.5$ とし TFM の ϑ は $\vartheta = 1.18$ としている。実験値との比較の為、一次元スペクトラム $\phi(k)$:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(k) &= \int_k^\infty \left(1 - \frac{k^2}{p^2}\right) \frac{E(p)}{p} dp \\ E(k) &= 2\pi k^2 W(k) \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

を用いる。

§ 4. 結果の検討

図1~2 に示すように、我々の理論によるスペクトルは、実験値との良い一致を示している。実験値は Grant, Stewart and Moilliet⁴⁾ の data を引用している Kraichnan (or Leslie)⁵⁾ の文献からの引用によるものである。我々の理論の結果や実験値にくらべ TFM と EDQNM の結果は高波数で^{その違いが}顕著になる。

TFM と EDQNM のエネルギー・スペクトルは高波数で減少が大きく、EDQNM のそれは特に大きい。高波数における、 $\phi_1(k)$ が強調される $k^2\phi_1(k)$ や $k^4\phi_1(k)$ の結果は図2、図3に示されるが、これによって、その差が一層、はつきりする。これらの差異は“渦粘性”の表現の違いによるものであり、図4に示すように $\sigma(k)$ の増加の大きさが、 $\phi_1(k)$ の減少に係している。エネルギー方程式に $\sigma(k)$ が果たす役割を考えるとこのことは明らかである。

$\partial u / \partial x$ の skewness factor, $\therefore S = \langle (\partial u / \partial x)^3 \rangle / \langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle^{3/2}$ は

我々の理論では

$$S = -0.67 \quad (3-11)$$

となり、妥当な値を得た。なお、TFM, EDQNM では

$$\left. \begin{array}{ll} S_T = -0.59 & (TFM) \\ S_E = -0.52 & (EDQNM) \end{array} \right\} (3-12)$$

となった。大気乱流のような大きな Reynolds 数の乱流では、 S の値はおよそ $0.7 \sim 1.0$ の間の値になっていることから、我々の理論は比較的これらの実験値に近く、高波数の $\phi(k)$ は TFM や EDQNM より良い近似になっている。

渦度方程式の対流項と伸長項のエネルギー伝達関数への寄与をそれぞれ $T_a(k)$, $T_s(k)$ で表わす。

$$T(k) = T_a(k) + T_s(k) = 2\nu k^2 E(k) \quad (3-13)$$

図5, 6 に示されるように、低波数で $-T_a(k) \sim T_s(k) \ll 2\nu k^2 E(k)$, 高波数では $T_a(k), T_s(k) > 0$ $T_a(k) \rightarrow T_s(k)$ ($k \rightarrow \infty$) となる。従って、低波数では対流項は他の波数へエネルギーを渡し、伸長項はエネルギーを受け取る役割を担っている。

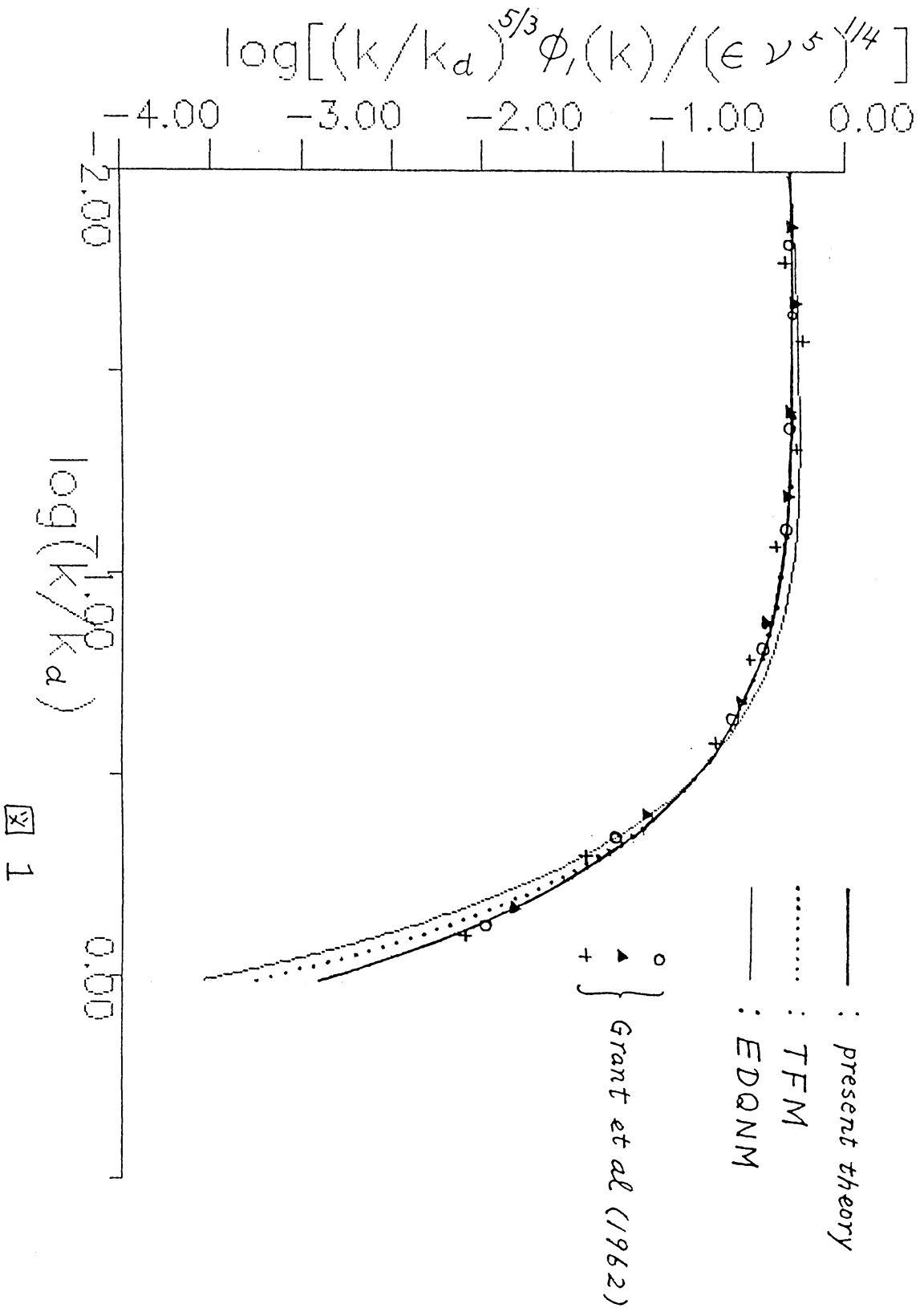
§ 5 結び

ここで導入した理論はシステムチックな近似理論ではなく

対流項と伸長項の取扱いを異にする多少粗い近似理論である。しかしながら、この理論はかなり良い結果を与えることがわかった。これは対流項を乱流粘性項とし、伸長項は他の被数モードからのエネルギー注入項と見なす扱いの妥当性を示すものと考えられる。 $T_s(\ell) > 0$, 低波数で $T_a(\ell) < 0$ となることから、その妥当性が示される。システムケックな取扱いによる乱流理論はこれまでに数多く展開されてきているが、仲々良い結果に結びつかない。それは、非線形項の一貫した取扱いの困難さを示す。その困難を避ける一つの方法を、我々の理論は示唆していると思う。

参考文献

- 1) R.H. Kraichnan, 1971 *J. Fluid Mech.* 47, 513.
- 2) R.H. Kraichnan, 1971 *J. Fluid Mech.* 47 525.
- 3) M. Lesieur, 1987 "Turbulence in fluids". Martinus Nijhoff Pub.
- 4) H.L. Grant, R.W. Stewart and A. Moilliet,
1962 *J. Fluid Mech.* 12, 241.
- 5) R.H. Kraichnan, 1966 *Phys Fluids.* 9, 1728
- 6) D.C. Leslie, 1973 "Developments in the theory of turbulence"
Clarendon Press



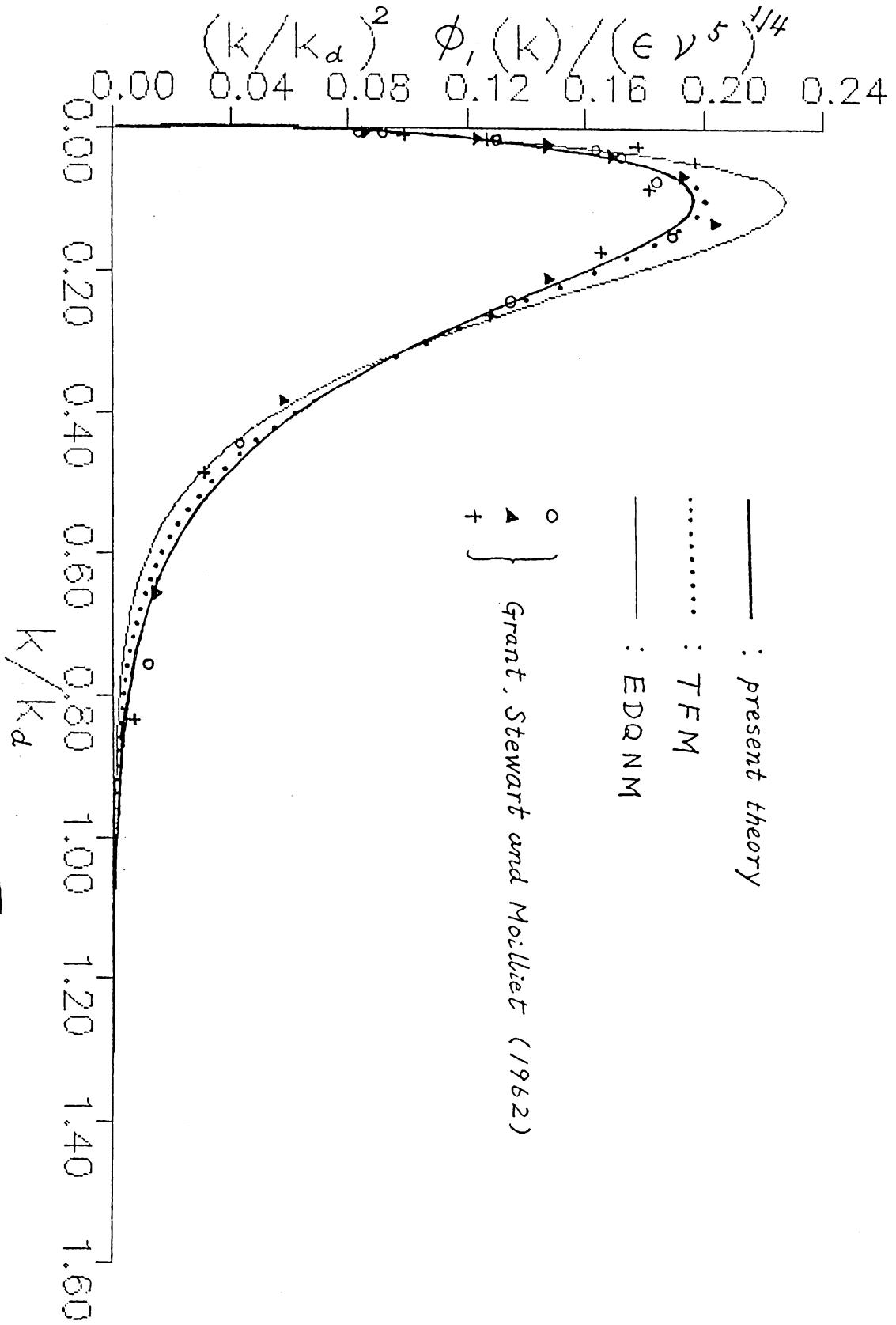


图 2

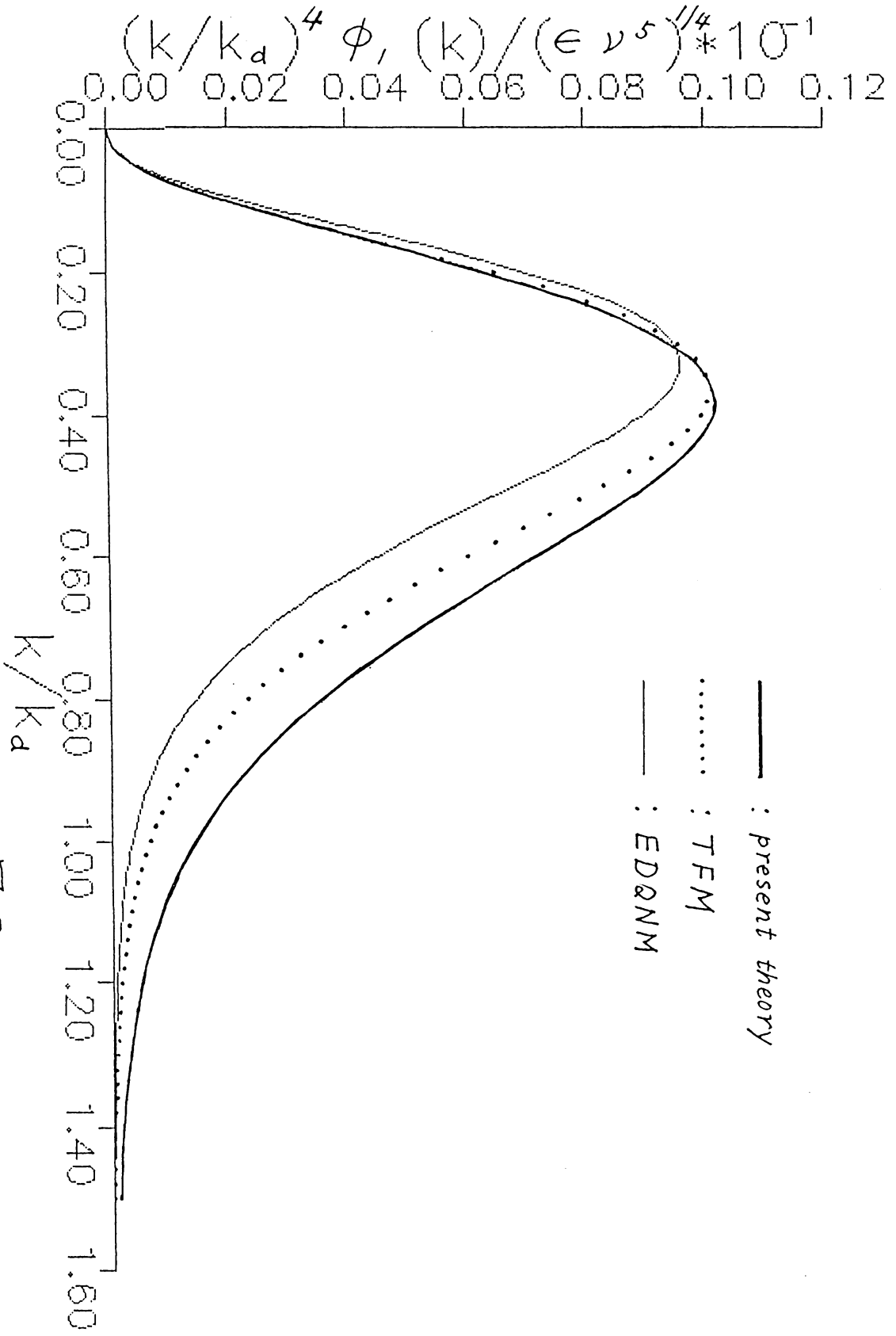
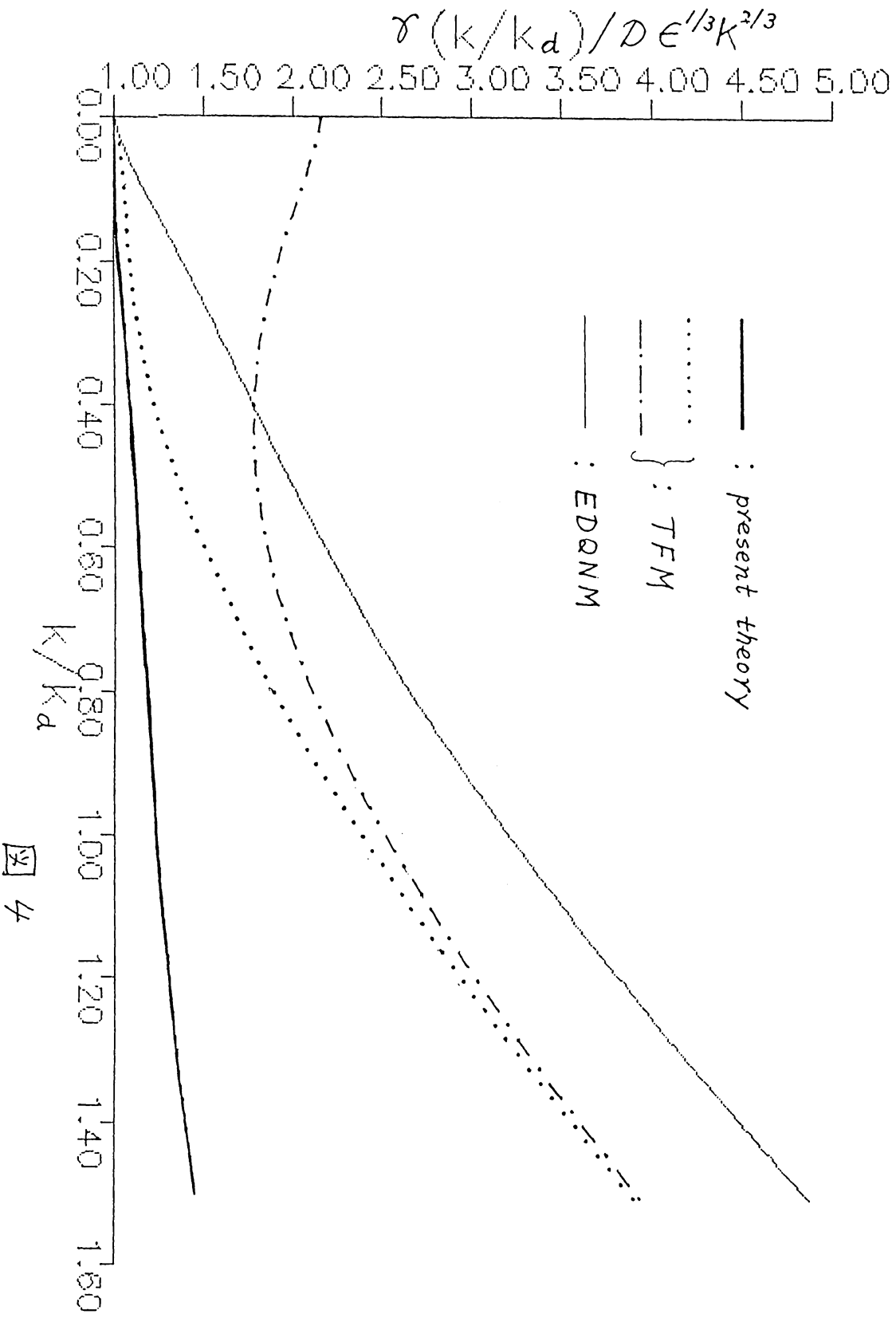
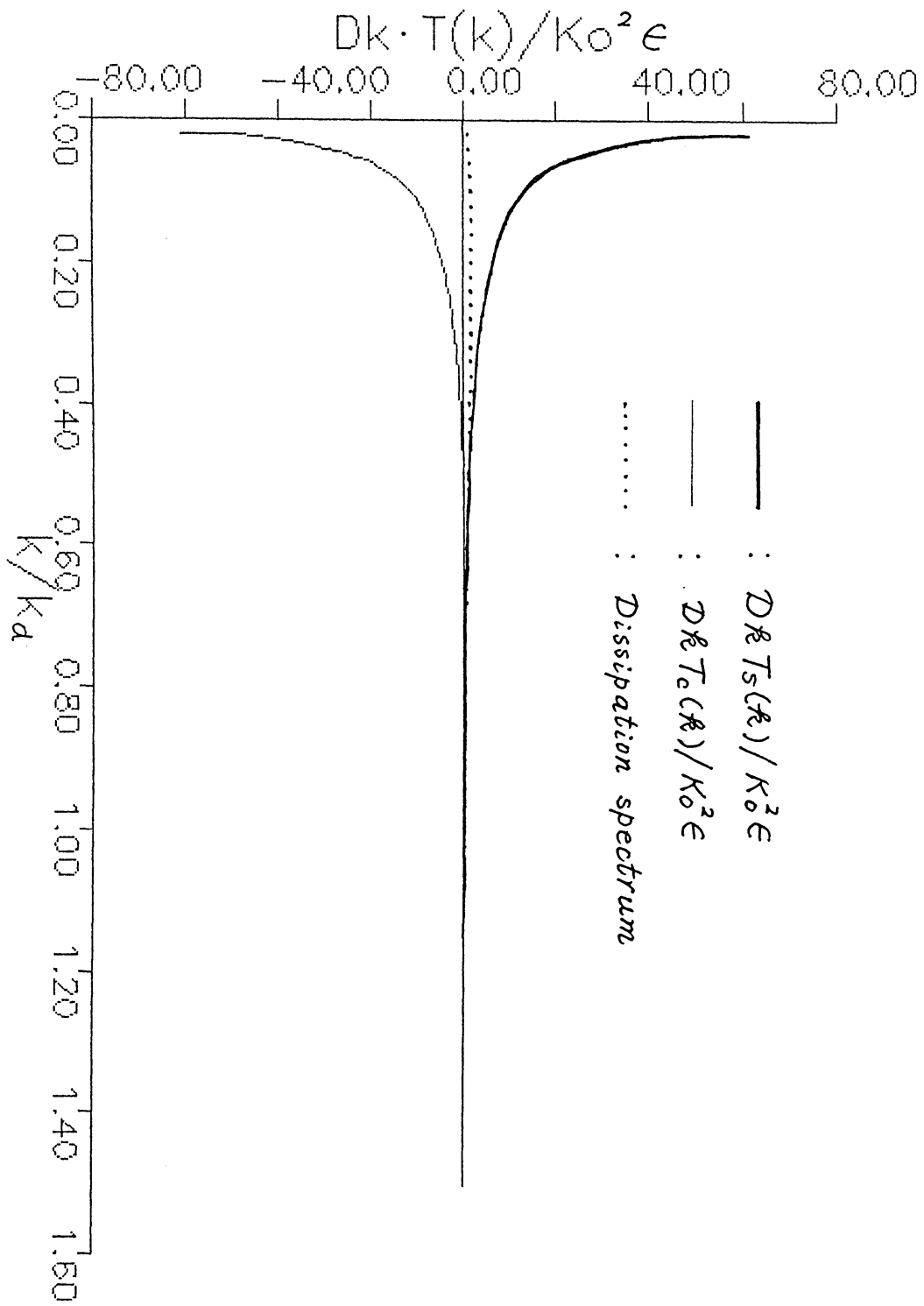


图 3





☒ 5

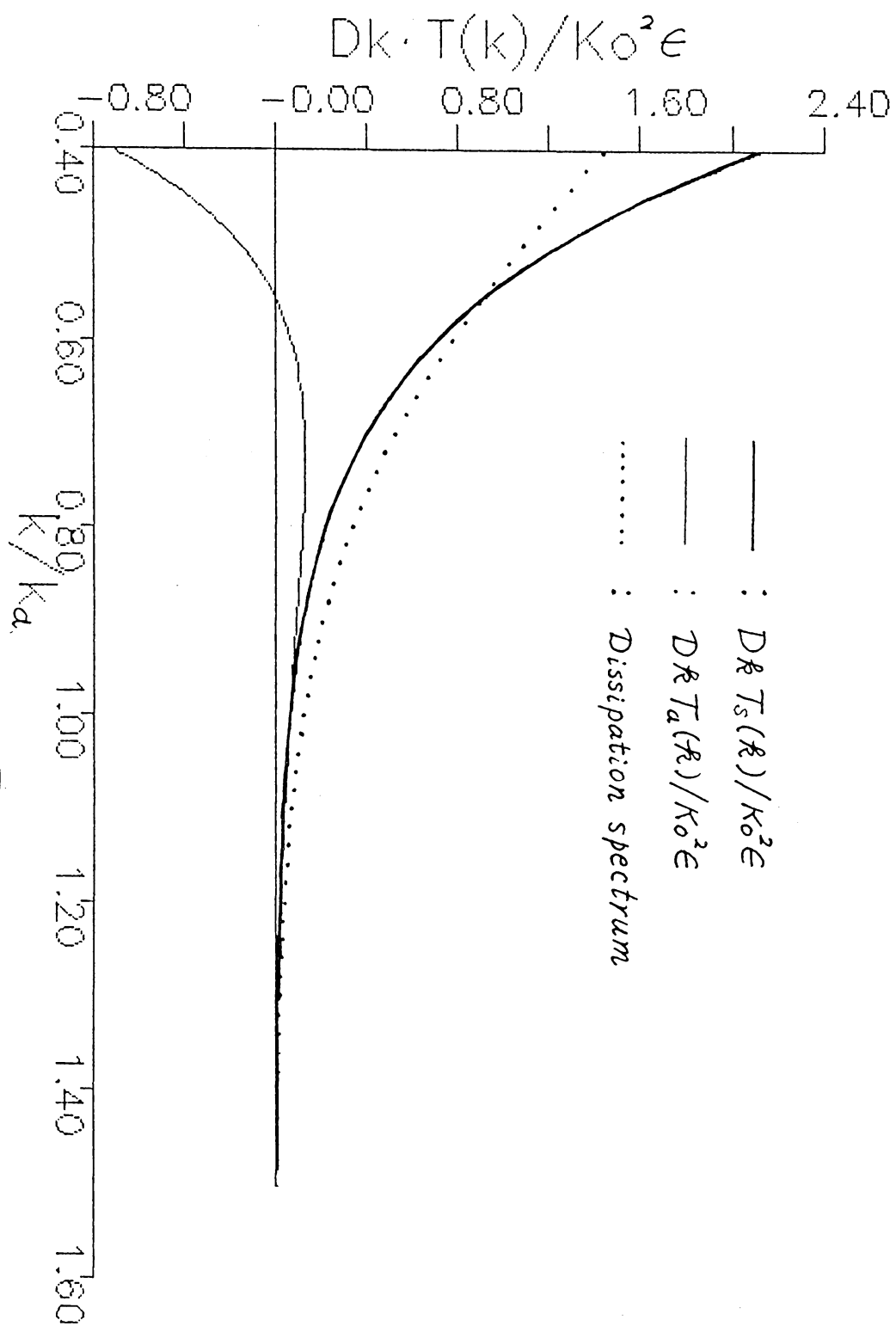


図 6