数理解析研究所講究録
第720巻 1990年 1-7

Lusternik-Schnirelmann category and ribbon knot complement

広島大学理学部 松本堯生
(Matumoto, Takao)

結び目の補空間の Lusternik-Schnirelmann カテゴリーが 1 であることと結び目が解けることが同値であることを論文[5]で示した。ここでは用語及び[5]の説明を述べた後，リボン結び目の補空間のカテゴリーが 2 であることを示す.

1. 位相空間 X のカテゴリー cat X は $(n+1)$ コの X の中で 1 点に可縮な開集合で X がおゝわれ n コではおゝわれないとき cat X = n と定義される. Lusternik-Schnirelmann, 位相空間に一般化した Borsuk, は閉集合を用いているが X が ANR のとき両者は一致する. 又, Fox が上の定義としたのであるが彼のは実は数が 1 だけ大きい.

cat X = 0 は X が可縮であることと同値であり, cat S^n = 1 も見易い. より重要なのは X と Y のホモトピー型が等し

ければ $\mathrm{cat}\, X = \mathrm{cat}\, Y$ であるというホモトピー不変性である。これから連結CW複体 X に関しては $\mathrm{cat}\, X \leqq \dim X$ となる。後のためにこれを簡単に証明しよう。$\dim X = n$ のとき $X \simeq X^{n-1} \cup (e^n \cup \cdots \cup e^n)$ であり，$X^0 = 1$ 点とすれば帰納法により X^{n-1} は n コのさような開集合でおゝわれているとしてよい。X^{n-1} を例えば大きな次元のユークリッド空間にうめ込んでその正則近傍をとるといったやり方でホモトピー型を変えないでふくらましてやると各 e^n は X にうめ込まれているとしてよい。X が弧状連結な ANR としてよいので $e^n \cup \cdots \cup e^n$ の近傍として X の中で1点に可縮な開集合がとれ証明が終る。

さて，$\mathrm{cat}\, X$ を下から評価するにはもう1つの定義というべき次の定理が有効である。

定理1 (Berstein-Ganea, G.W. Whitehead). X は弧状連結で基点 $*$ が X の中で1点に可縮な近傍をもつとき，$\mathrm{cat}\, X \leqq n$ という仮定の下に下図が可換になるような写像 j が存在する。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\Delta"'] & T^{n+1}X \arrow[d] \\
& X^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Δ (対角写像)

$$T^{n+1}X = \left\{ (x_0, \cdots, x_n) \in X^{n+1} ;\ \text{少なくとも1つの } k \text{ に対し } x_k = * \right\}$$

とくに，$u_k \in H^*(X, *)$ に対し $u_0 \cup \cdots \cup u_n = 0$.

これから直ちに $\mathrm{cat}(S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}) = k$ がでる。

命題Ⅰ．連結閉n次元多様体 M に対し $\mathrm{cat}\, M = 1$ と $M \simeq S^n$ は同値．

証明．Poincaré双対定理と定理1よりMはホモロジー球面であることがわかる．よって次の定理2に帰着する．

定理2（Fox）．Xが弧状連結かつ局所単連結なコンパクト距離空間のとき，$\mathrm{cat}\, X = 1$ ならば $\pi_1 X$ は自由群である．

結び目の補空間の場合に命題Ⅰに対応するのが論文[5]の主結果：

定理Ⅰ．結び目 $S^n \supset S^m$ が位相的に解けるための必要十分条件は $\mathrm{cat}(S^n - S^m) = 1$ である．ただし，結び目は局所平坦であるものとする．

幾何的トポロジーの結果から $\mathrm{cat}(S^n - S^{n-2}) = 1$ ならば $S^n - S^{n-2} \simeq S^1$ であることを示せばよいことがわかる．これを示すには被覆 $X_k \to X$ に対し $\mathrm{cat}\, X_k \leq \mathrm{cat}\, X$ であるという事実を結び目の無限巡回被覆の中間有限被覆に対して用いて定理1に帰着して証明するのだが詳細は論文[5]を参照してほしい．

2. 補空間のカテゴリーが2であるような結び目としては任意の自明でない古典結び目 $S^3 \supset S^1$ とかそのスパンとか数多く存在するが，以下ではリボン結び目といわれるものが全てその例であることを示す．

定理Ⅱ．自明でないリボン結び目 $S^n \supset S^{n-2}$ に対して $\mathrm{cat}\,(S^n - S^{n-2}) = 2$．

定義．m コの成分からなる自明な絡み目 $S^{n-2} \cup \dots \cup S^{n-2} \subset S^n$ を $m-1$ コの互いに交わらないバンドに沿って手術して得られる結び目をリボン結び目という．又，上の自明な絡み目を張る m コの球体 $D^{n-1} \cup \dots \cup D^{n-1}$ を内部は D^{n+1} の内部に含まれるように押し込みバンド $I \times D^{n-2}$ もかまぼこ型に D^{n+1} に押し込んでできるものをリボン球体対という．

補空間はコンパクトでないので結び目又は球体の正則近傍の内部を除いて得られるコンパクト多様体を外空間と呼び，これを用いる．とくに補空間と外空間のホモトピー型は等しい．

観察1．1次元高いリボン結び目の外空間 $=$ リボン球体対の外空間 $\bigcup_{\text{リボン結び目の外空間}}$ リボン球体対の外空間

観察2（浅野－丸本－柳川[1]）．球体 D_0^{n+1} に $m+1$ コの1－ハンドルとそれをキャンセルする標準的な $m+1$ コの2－ハンドル $h_0^2\cup\cdots\cup h_m^2$ でできる球体 D^{n+1} において，h_0^2 上を他の2－ハンドルがバンドのとり方に対応して次々とスライドしてできる m コの2－ハンドル $h_1'^2\cup\cdots\cup h_m'^2$ を1－ハンドルをつけた後につけると丁度リボン球体対の外空間ができる．更に h_0^2 に対応する2－ハンドルをつけると元に戻り D^{n+1} となりこの h_0^2 に相当する $D^2\times D^{n-1}$ の双対心棒 $0\times D^{n-1}$ がリボン球体対の球体である．とくに，リボン球体対の補空間はホモトピー型だけを考えるなら2次元CW複体 K^2 としてよい．

そて，観察1と2を合わせると，リボン結び目 $S^{n-1}\subset S^{n+1}$ の外空間は D_0^{n+1} に m コの1－ハンドル，m コの2－ハンドル m コの $(n-1)$-（双対2－）ハンドルと $m+1$ コの n-（双対1－）ハンドルがついてできている．$(n-1)$－ハンドルの心棒 D^{n-1} のつくところは h_0^2 とぶつからず対応する2－ハンドルの双対心棒の境界にダブルをつくる様にくっついているので，各 $(n-1)$－ハンドルは K^2 に S^{n-1} を1点でつけ（てできる）るものとホモトピー型の等しい範囲で考えてよく

$$(n-1)\text{-ハンドルまでつけたもの} \simeq K^2\vee S^{n-1}\vee\cdots\vee S^{n-1}$$

(ただし, $n \geq 3$) となる.

さて, nーハンドルはホモトピー型を考えるなら $\pi_{n-1}(K^2 \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1})$ の元ではりつくと考えてよく, ~~Hilton の定理によりこれは $\pi_{n-1}(K^2)$, $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ (複数), $[\pi_1(K^2), \pi_{n-1}(S^{n-1})]$ (複数) から生成される. よって~~ K^2 の 1-骨格 $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ をとると自然な写像

$$(*) \quad \pi_{n-1}(K^2) \oplus \pi_{n-1}(S^1 \vee \cdots \vee S^1 \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}) \to \pi_{n-1}(K^2 \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1})$$

は全射であることがわかる. ここでもし Whitehead 予想のいうように $\pi_{n-1}(K^2) = 0$ であれば簡単であるがそれが成り立たなくても今の場合は $\pi_{n-1}(K^2)$ からの像は関係しないことがわかる. 実際 m コの S^{n-1} を各々1点につぶして考えると $(n-1)$-ハンドルを全然つけずに n-ハンドルをつけることになり, その n-ハンドルの心棒のつくところはやはり対応する 1-ハンドルの双対心棒の境界となるのでホモトピック零. つまり α を問題の元とすると α の $\pi_{n-1}(K^2 \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}) \xrightarrow{p} \pi_{n-1}(K^2)$ による像は 0. (*) を $\pi_{n-1}(K^2)$ に制限して p を施すと恒等写像だから α は (*) を $\pi_{n-1}(S^1 \vee \cdots \vee S^1 \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1})$ に制限したものの像に含まれていることがわかる. 従って

$$X = \text{リボン結び目の補空間} \simeq (S^1 \vee \cdots \vee S^1 \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}) \cup (e^2 \cup \cdots \cup e^2 \cup e^n \cup \cdots \cup e^n)$$

となり, 前の議論と同様に適当に $S^1 \vee \cdots \vee S^1 \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}$ をふくらまして考えると $e^2 \cup \cdots \cup e^2 \cup e^n \cup \cdots \cup e^n$ は X にうめ込まれ

ているとかんがえてよく，X が ANR としてよいことから $\mathrm{cat}\,X \leqq 2$ がわかる．定理Iと合わせると定理IIの証明が終る．

3．最後に $\mathrm{cat}(S^{n-k+1} \times T^{k-1}) = k$ であるので 1 と n の任意の値をカテゴリーにもつ閉 n 次元多様体が存在する．これに対応して，1 と $n-1$ の間の任意の値を補空間のカテゴリーとしてもつ結び目 $S^n \supset S^{n-2}$ が存在するであろうという予想を述べておきます．

参考文献

1. K. Asano, Y. Marumoto & T. Yanagawa : Ribbon knots and ribbon disks, Osaka J. Math. 18 (1981), 161-174.
2. I. Berstein - T. Ganea : The category of a map and a cohomology class, Fund. Math. 50 (1962), 265-279.
3. R.H. Fox : On the Lusternik-Schnirelmann category, Ann. Math. 42 (1941), 333-370.
4. L. Lusternik - L. Schnirelmann : Méthods topologiques dans les problèmes variationnelles, Herman, Paris, 1934.
5. T. Matumoto : Lusternik-Schnirelmann category and knot complement, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo