数理解析研究所講究録
第720巻 1990年 29-34

Twisted Linear Actions について

山形大学　内田伏一(Fuichi Uchida)

§0 序

文献[1]において、"Twisted Linear Action"と命名した non-compact Lie 群の球面へのreal analytic actionについて、新しく得られた結果を報告したい。

[1],[2]においては、半単純 Lie群 SL(n,R)に関する研究であったが、ここで述べるのは、べき零 Lie群に関する結果である。本報告の内容の大半は[3]に詳述してある。

文献[3]は、服部晶夫先生の御還暦を祝って、同先生に捧げるものである。

§1 Twisted Linear Action として定まる円周上の1径数変換群

GL(2,R) の部分群Gを、次のように定める：

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} : x\in R\right\}$$

この群Gは加法群Rと同型である。以後、GとRを同一視する。 この§では、円周上のtwisted linear G-actionsについて考察しよう。

(u,v)-平面における線形常微分方程式

$$\dot{u}=u+av,\quad \dot{v}=v$$

の、(u,v) を通る解曲線は次式で与えられる：

$$e^{\theta}\begin{pmatrix}1 & a\theta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\qquad (\theta\in R)$$

$|a|<2$ のとき、この解曲線達は原点を中心とするすべての同心円とtransversal に交わる。このようなaに対して、

$$\xi^{a} : G\times S^{1}\to S^{1}$$

を、次式で定義する：

$$\xi^{a}\left(x,\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\right)=e^{\theta}\begin{pmatrix}1 & x+a\theta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

ここに、θ は右辺のノルム＝1となるように一意に定める。

このξ^aがS^1上のtwisted linear G-actionである。以後、twisted linear G-action ξ^aを持ったS^1を、単に$S^1(a)$で表そう。

G-多様体としての$S^1(a)$は、上半円と下半円を開軌道とし、残りの2点を不動点とする。この事実を使って、2点(0,1),(0,-1)を自分自身に写して、G-actionsと可換になる写像 $f_a : S^1(a) \to S^1(0)$ が一意に定まる。

作り方から、f_aは同相写像になっているが、更に計算によって、f_aはC^1級の微分同相写像であることが確かめられる。

更に、$a \neq b$のとき、$f_b^{-1} f_a$は不動点においてC^2級でないことが、計算によって分かる。以上の考察の下に、次の定理を示すことができる：

定理　実数a，b　($|a|<2, |b|<2$) について、

① $S^1(a)$から$S^1(b)$への、G同変なC^1級の微分同相写像が存在する。

② もし$a \neq b$ならば、$S^1(a)$から$S^1(b)$へのG同変なC^2級の微分同相写像は存在しない。

証明は[3]を参照してほしい。

32

実数 a $(a \neq 0, |a| < 2)$ に対して、写像

$$g_a : S^1(a) \to S^1(1)$$

を、次式で定義する：

$$g_a \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{\theta} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

この g_a は C^{ω} 級の微分同相写像であり、更に次の図式を可換にすることが分かる：

$$\begin{tikzcd} G \times S^1(a) \arrow[r, "\mu_a \times g_a"] \arrow[d, "\xi_a"] & G \times S^1(1) \arrow[d, "\xi_1"] \\ S^1(a) \arrow[r, "g_a"] & S^1(1) \end{tikzcd}$$

ここに、$\mu_a : G \to G$ は $\mu_a(x) = a^{-1}x$ で与えられる同型対応である。

この結果、g_a は $S^1(a)$ から $S^1(1)$ への弱 G 同変な C^{ω} 級の微分同相写像であることが分かる。

更に、計算によって、$S^1(0)$ と $S^1(1)$ の間には弱 G 同変な C^2 級の微分同相写像は存在しないことが分かる。

§２　補足

一般に、Lie群Ｇが２つの多様体Ｘ，Ｙに作用ξ^X，ξ^Yによって、働いているものとし、微分同相写像$f: X \to Y$と同型写像$\alpha: G \to G$が与えられていて、次の図式が可換であるものとしよう：

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\alpha \times f"] \arrow[d, "\xi^X"] & G \times Y \arrow[d, "\xi^Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

もし、αが$\alpha(g) = h^{-1} g h \ (h \in G)$によって定義される内部自己同型写像ならば、$f^h = \xi^Y(h, -) \cdot f$によって、新しい微分同相写像$f^h: X \to Y$を定義すると次の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "1 \times f^h"] \arrow[d, "\xi^X"] & G \times Y \arrow[d, "\xi^Y"] \\ X \arrow[r, "f^h"] & Y \end{tikzcd}$$

即ち、f^hはＧ同変な微分同相写像である。

この考察によって、G同変な微分同相による分類と、弱G同変な微分同相による分類の違いは、Gの外部自己同型群 Out G = Aut G／Inn G の大きさに現れることが分かる。

例えば、

$$\mathrm{Out}\ SL(n,R) = \begin{cases} Z_2 & (n : \mathrm{odd} \geqq 3) \\ Z_2 \oplus Z_2 & (n : \mathrm{even} \geqq 4) \end{cases}$$

であり（cf. 村上信吾：J.Math.Soc.Japan 4(1952))、従って、G = SL(n,R) の場合には、G同変な微分同相による分類と、弱G同変な微分同相による分類とは、あまり違わないことが分かる。

[1] Tohoku Math.J.39(1987)

[2] Osaka J.Math.25(1988)

[3] Tohoku Math.J.41(1989)