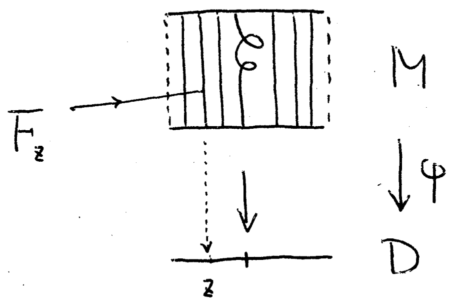
数理解析研究所講究録
第 720 巻 1990 年 46-66

種数の高い特異ファイバーの位相形と擬周期写像

東大理　松本幸夫 (Yukio Matsumoto)

以下は，J. M. Montesinos（コンプルテンセ大学）との共同研究の結果である。$D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ とし，D 上の Riemann 面の族を考える。すなわち，M を非コンパクトな複素曲面とし，$\varphi: M\to D$ を固有な正則全射 (proper, surjective holomorphic map) とし，$\forall z\in D$ につき，ファイバー $\varphi^{-1}(z)$ は連結であるようなものとする。更に，$F_z=\varphi^{-1}(z)$ とおくとき，$z\neq 0$ である限り，F_z は非特異ファイバーであると仮定する。すなわち，中心ファイバー F_0 のみが特異ファイバーの可能性がある。(下図)

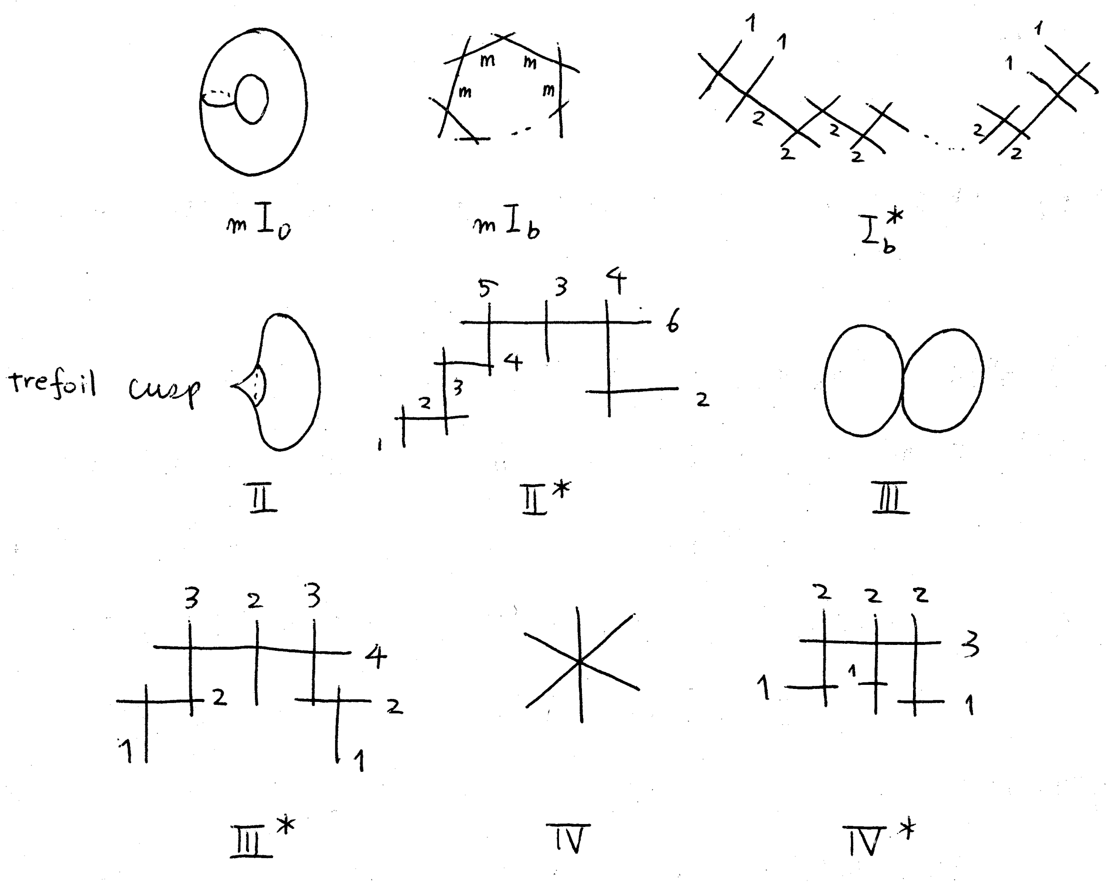


一般ファイバー F_z が種数 g の Riemann 面であるとき，

$\varphi : M \to D$ のことを<u>種数 g の Riemann 面の族</u>と呼ぼう。我々の問題は次のようなものである。

<u>問題</u>　種数 g の Riemann 面の族に現われる特異ファイバーの位相形を分類せよ。(但し "minimal" なもの)

<u>$g = 1$ の場合</u>：小平 [K] により分類されていて，結果は次の 9 種類：



これらの形は拡大 Dynkin 図式と関係する。

$g=2$ の場合: Ogg [O], 飯高 [I], 浪川・上野 [NU] により研究された。とくに, 浪川・上野 [NU] は種数2の特異ファイバーの完全なリストを与えた. それは約 120 種の特異ファイバーを含んでいる.

$g \geqq 3$ の場合: 組み合わせ論的には既に Artin-Winters [AW], Winters [W] により解決されている. しかし, 彼等の方法には, 特異ファイバーの形を"支配する"位相的原理が欠けている。我々の目指すのは単なる特異ファイバーの位相形の分類ではなく, むしろ,次の問題′である.

問題′ 特異ファイバーの形を決める位相的原理は何か?

F_0を種数 g の特異ファイバーとすると, F_0のまわりのモノドロミーは種数 g の Riemann 面 Σ_g の自己同相写像を定める. しかも, この自己同相写像は, Nielsen の導入した代数有限型 (algebraically finite type) の自己同相写像になっている. 我々の主結果は、特異ファイバーの位相形と, 代数有限型自己同相写像(正確にはプラス型のもの)のなす, 種数 g の写像類群 $\mathcal{M}_g$ の部分集合を conjugate で分類した集合が 1対1 に対応することを主張するものである.

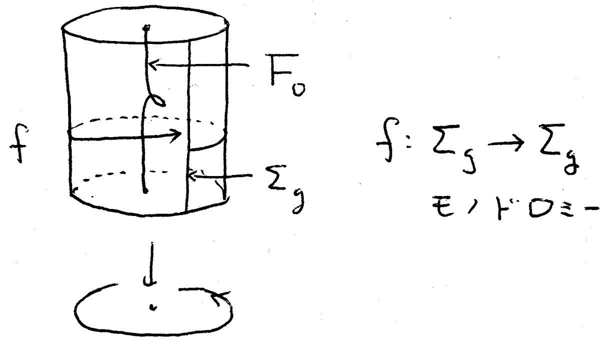
以下, 正確な定義を与える。

定義　族 $\varphi: M \to D$ と $\varphi': M' \to D'$ が位相的に同値であるとは，向きを保つ diffeomorphism $H: M \to M'$ と向きを保つ diffeomorphism $h: D \to D'$ が存在して，(i) $h(0)=0$ ，(ii) $\varphi' \circ H = h \circ \varphi$ がなりたつことである．このとき，中心のファイバー F_0, F_0' が位相的に同値であるということもある．

記号：　$\mathcal{S}_g :=$ {種数 g の（特異又は非特異）ファイバー}/$\sim$

$\sim$：位相的同値　　　但し"minimal"な物．

さて，F_0を種数gのファイバーとすると，そのまわりのモノドロミー同相写像 $f: \Sigma_g \to \Sigma_g$ が，isotopy と conjugation を除いて定まる．（下図）



Σ_gの，向きを保つ微分同相写像全体を $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)$ とし，

記号：　$\mathcal{M}_g := \mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)/\mathrm{isotopy}$，写像類群

とおく．モノドロミーの構成により

$$\text{monodromy} : \mathcal{S}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g / \text{conj.}$$

という対応が定まる．

この対応の image（像）を記述するため，Nielsen の導入した代数有限型 Self-diffeomorphism [Ni1] を定義しよう．これは，現在 Completely reducible と呼ばれる写像である（Gilman [G] を見よ．） ここでは，同じ写像を擬周期写像（pseudo-periodic map）と呼ぶことにする．

<u>定義</u> 向きを保つ diffeomorphism $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ が <u>擬周期的（pseudo-periodic）</u>であるとは，Σ_g の中に適当な単純閉曲線の disjoint union $\mathcal{C} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ が存在して，$f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ かつ $f|(\Sigma_g - \mathcal{C}) : \Sigma_g - \mathcal{C} \to \Sigma_g - \mathcal{C}$ が周期写像（periodic map）に isotopic なことである．

擬周期写像は，Thurston の分類 [T] に従えば，周期的であるかあるいは可約（reducible）である．そして，各成分写像は周期的である．

簡単な考察から次が示せる.

<u>補題</u>1. $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ を擬周期写像とする. このとき, $f|(\Sigma_g - C)$ が周期写像に isotopic であるような単純閉曲線の system $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ は次の(i)(ii) を満たすとしてよい:

(i) $C_i \not\simeq 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, r$

(ii) $C_i \not\simeq C_j$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, r$.

補題1の条件(i)(ii)を満たす system $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ を almost effective な system と呼ぼう.

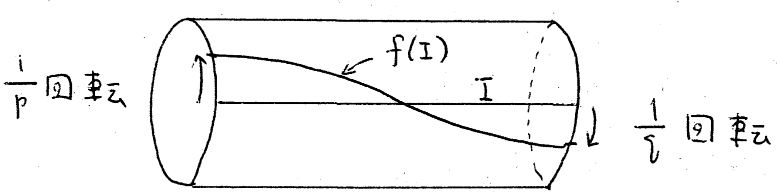
さて, $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ を擬周期写像, $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ を f に付随する almost effective system とする. Nielsen [N.1] は各 C_i $(i = 1, \cdots, r)$ の screw number $s(C_i)$ を次のように定義した.

$f(C) = C$ であるから, 各 C_i に注目する毎に, $f^\alpha(C_i) = C_i$ (C_i の向きもこめて) となるような $\alpha > 0$ が存在する. 注目した C_i に対する α のうち最小の正整数を α_i としよう. また, $\Sigma_g - C$ の連結成分で, C_i の "左隣り" のものを b, "右隣り" のものを b' とする. $f|(\Sigma_g - C)$ は周期写像であるから, $f^\beta(b) = b$ であるような $\beta > 0$ がある.

そのような$\beta>0$のうち最小のものを再びβと書く．同様に$f^{\beta'}(b')=b'$であるような最小の数を再びβ'と書く．更に，$f|(\Sigma_g-C)$が周期的であることを再び使って，$(f^{\beta})^{n_b}\simeq id_b$となる$n_b$と$(f^{\beta'})^{n_{b'}}\simeq id_{b'}$となる$n_{b'}$がある．$n_b$，$n_{b'}>0$はこのようなものの最小としておく．明らかに，$\alpha$は$n_b\beta$と$n_{b'}\beta'$の公約数である．$L$を$n_b\beta$と$n_{b'}\beta'$の最小公倍数とする．$f^L$は$C_i$の両隣で id に isotopic だから，$C_i$の近傍では$C_i$によるDehn twist を何回か（$e$回とする）続けて行なったものになっている．

<u>定義</u>　有理数 $s(C_i)=\dfrac{e\alpha_i}{L}$ を C_i の <u>screw number</u> とよぶ．

<u>例</u>　C_iの管状近傍（≈アニュラス）におけるfのふるまいが下図のようなとき，$L=pq$，$e=p+q$，$\alpha=1$ だから，screw number $=\dfrac{e\alpha}{L}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ である．すなわち screw number は，f^{α}のねじれ（= rational Dehn twist！）を表わすものである．



$(p,q)=1$

定義 $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ を，擬周期写像 $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ に付随した almost effective system of s.c. curves とする．もし，$s(C_i) \neq 0$ ($\forall i = 1, 2, \cdots, r$) であれば，$C$ のことを，effective な system という．

擬周期写像 f に付随する almost effective system $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ において，もし，ある i について $s(C_i) = 0$ であれば，$C' = C - C_i$ も，f に付随する almost effective system であることが示せる (Nielsen)．従がって，擬周期写像 f に付随する effective system は必ず存在する．

さて，モノドロミーの話に戻る．次の補題は容易である．

補題 2 $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ を，種数 g のファイバー F_0 のまわりのモノドロミー微分同相写像とすると，f はすべての screw number が正であるような擬周期写像に isotopic である．

証明 resolution により，F_0 は正規交叉型 (normal crossing) であるとしてよい．F_0 を既約成分に分けて，$F_0 = m_1\Theta_1 + m_2\Theta_2 + \cdots + m_s\Theta_s$ とする．m_i は Θ_i の重複度である．既約成分の自己交点および互いの交点のまわりの消滅

サイクルの全てを$C_1, C_2, \cdots, C_r$とし，$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$とおけば，$f(C) = C$であるとしてよい．更に，$l$を，$m_1, m_2, \cdots, m_s$の最小公倍数であるとすると，$f|(\Sigma_g - C)$は order lの周期写像$(\Sigma_g - C) \to (\Sigma_g - C)$にisotopicである．よって$f$は擬周期的である．$C_i\ (1 \leq i \leq r)$が，既約成分Ⓗとⓗ′の交点$p$のまわりの消滅サイクルであるとする．(Ⓗ=Ⓗ′も可．) そしてⒽ，Ⓗ′の重複度をm, nとすると，C_iのscrew numberは$\frac{1}{mn}\ (>0)$に等しい．なぜなら，それは$z_1^m z_2^n = 0$のモノドロミーと思えるからである．(Clemens [C]を見よ．)　(証明終)

<u>注意</u>　上の証明中の$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$は必ずしもalmost effectiveではない．

screw numberが全て正であるような擬周期写像の属する写像類の全体から成る$\mathcal{M}_g$の部分集合を$\mathcal{P}_g^+$とすると，補題2によって，次のような写像が定まる．

$$\text{monodromy} : \mathcal{S}_g \longrightarrow \mathcal{P}_g^+ / \text{conjugate}$$

我々の主定理を述べよう．

<u>主定理</u>. monodromy : $\mathcal{S}_g \longrightarrow \mathcal{P}_g^+/\text{conjugate}$ は全単射である。（ただし $g \geqq 2$）

この定理からいろいろな系が得られる.

<u>系1</u> 向きを保つ diffeomorphism $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ があるファイバー F_0 の monodromy であるための必要十分条件は，f が<u>全ての screw number が正の擬周期的写像</u>であることである.

<u>定義</u>（Deligne - Mumford [DM], see also Artin - Winters [AW]）ファイバー F_0 が <u>semi-stable</u> であるとは，F_0 が正規交叉型（normal crossing）であり，minimal であり，しかも，F_0 の既約成分の重複度 m_i が全て 1 に等しいことを言う：$F_0 = \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_s$, $\Theta_i \pitchfork \Theta_j$ ($\forall i, j = 1, \cdots, s$)

<u>系2</u> F_0 が semi-stable であるための必要十分条件は，F_0 が minimal であって，かつ，そのモノドロミー f が，<u>disjoint な</u> simple closed curves に関する Dehn twist の積になっていることである.

$\mathcal{P}_g^+$ に属する写像 $f:\Sigma_g\to\Sigma_g$ を何乗かすれば、確かに、系2のような性質を持つから、次の系が得られる.

系3　Riemann 面の族 $\varphi:M\to D$ を, D の中心 O で分岐する巡回分岐被覆 $D\to D$ によって引き戻したものを, $\varphi':M'\to D$ とする. 巡回分岐被覆の次数を適当にとると, $\varphi':M'\to D$ の中心ファイバー F_0' は semi-stable になる. (但し M' は巡回分岐被覆をとったあと特異点の解消を行い, 更に F_0' を minimal にするため, 適当な回数の blow down を行ったもの.)

上の系3は semi-stable reduction theorem [DM] [Na] として知られている. 次の系も良く知られている (cf. 浪川 [Na])

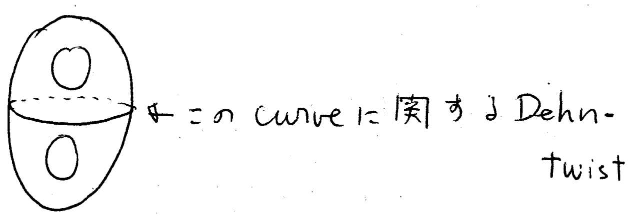
系4　Monodromy $f:\Sigma_g\to\Sigma_g$ のひきおこす写像 $f_*:H_1(\Sigma_g:\mathbb{Z})\to H_1(\Sigma_g:\mathbb{Z})$ は quasi-unipotent である. 正確にいえば, 適当な整数 $m>0$ があって $(f_*^m-1)^2=0$ がなりたつ.

次の系は, 主定理のごく特別の場合である.

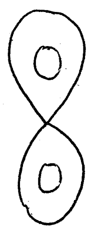
系5　F_0がnon-singularであるための必要十分条件は、そのモノドロミー $f:\Sigma_g\to\Sigma_g$ が id. にホモトピックなことである.（cf. Epstein [E]）

なお $f_*=id: H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})\to H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ であっても F_0 が singular であり得ることは、浪川・上野 [NU] により指摘されている.

例（浪川上野 [NU]）



対応する singular fiber は



定義　F_0が純多重ファイバー（重複度 m）とは、$F_0 = m\Theta$ であって、Θが smooth であることである.

重複度mの純多重ファイバーF_0のモノドロミー $f:\Sigma_g\to\Sigma_g$ は、位数mの自由巡回作用 $\mathbb{Z}/m \curvearrowright \Sigma_g$ の生成元になっている. Nielsen [Ni2] によれば、任意の自由巡回作用 $\mathbb{Z}/m \curvearrowright$

Σ_g は皆 conjugate である．従がって，主定理から次の系を得る．

<u>系 6</u>　重複度 m の純多重ファイバーは，存在するとしても位相的同値を除いて，高々ひとつである．（重複度 m の純多重ファイバーは $m \mid (1-g)$ の時，かつ，その時に限って存在する．）

<u>主定理の証明</u>

以下，主定理の証明を述べる．monodromy : $\mathcal{S}_g \longrightarrow \mathcal{P}_g^+/\mathrm{Conj}.$ という写像が全単射であることを示せばよい．そのために，"generalized quotient" : $\mathcal{P}_g^+/\mathrm{Conj}. \longrightarrow \mathcal{S}_g$ という逆写像を構成しよう．この写像の構成には，擬周期的写像に関する Nielsen の定理 [Ni1, §15] が基本になる．

<u>Nielsen の定理</u>　$\tau \in \mathcal{P}^+(\Sigma_g)$，$\tau' \in \mathcal{P}^+(\Sigma_g')$ とする．τ と τ' が，orientation を保つ diffeomorphism $g : \Sigma_g \to \Sigma_g'$ によって conjugate であるための必要十分条件は次の (1)～(4) が同時になりたつことである．

(1) effective systems of s.c. curves C, C' が g で互いにうつりあう．

(2) C, C' でそれぞれ Σ_g, Σ_g' を分割して得られたひとつひとつの領域 b を考えると, b と $g(b)$ に関する β_b, η_b という数が一致する: $\beta_b = \beta_{g(b)}$, $\eta_b = \eta_{g(b)}$ (screw number の定義を見よ.)

(3) $C_i \in C$ と $g(C_i) \in C'$ の screw number および, α という数が一致する. 更に "amphidrome" かどうかが一致する. (下の注意を見よ.)

(4) $\tau|b$, $\tau'|b'$ は位相的に同値な周期写像である.

<u>注意</u> $C_i \in C$ が <u>amphidrome</u> であるとは, 対応する α が偶数であって, $\tau^{\frac{\alpha}{2}}(C_i) = -C_i$ となることである.

周期写像 $f, f' : \Sigma_g \to \Sigma_g$ が, 向きを保つ diffeomorphism $g : \Sigma_g \to \Sigma_g$ によって conjugate ($f' = gfg^{-1}$) になるための必要十分条件は, やはり Nielsen [Ni2] によって求められている. (Nielsen の statement [Ni2, §11] は, あたかも向きを考慮しない分類であるかのように書いてあるが, §10 までの議論を見ると, 向きを保つ diffeom による conjugation による分類が得られていることがわかる.)

次に彼の定理 (周期写像に関する) を述べよう. そのために, Σ_g の周期写像 $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ が与えられた時, f の<u>多</u>

重点，およびその"valency"の概念が必要である．更に，一般にΣ_gが境界を持つコンパクトな曲面のとき，その境界線のvalencyの概念が要る．

$f:\Sigma_g\to\Sigma_g$を，周期nの orientation pres. diffeom とする．点$x\in\Sigma_g$について，$x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$が全て相異るとき，$x$を単純点，そうでないとき，$x$を多重点とよぶ．$x$が多重点のとき，$x, f(x), \dots, f^{m-1}(x)$は全て異なるが$x=f^m(x)$であるような$m$ $(1\leq m<n)$がある．mはnの約数であり，$\lambda=\frac{n}{m}$を点xの重複度という．

商空間$M=\Sigma_g/\langle f\rangle$を考える．$\tilde{k}$を$\Sigma_g$の単純閉曲線で多重点を通らないものとすると，$\tilde{k}, f(\tilde{k}), \dots, f^{m-1}(\tilde{k})$はdisjointだが，$f^m(\tilde{k})=\tilde{k}$となる$m$がある．$m$は$n$の約数である．$\lambda=\frac{n}{m}$を$\tilde{k}$の重複度という．$k\subset M$を$\tilde{k}$の像とするとき，$\lambda$を$k$の重複度ということもある．これはwell-definedである．

$p\in k$を任意の点とすると，$\tilde{k}$上にはpの持ち上げがλ個あり，それらは，$\tilde{p}, f^{\sigma m}(\tilde{p}), \dots, f^{(\lambda-1)\sigma m}(\tilde{p})$の順に並んでいるものとする．ここに$(\sigma,\lambda)=1$である．$\delta\sigma\equiv 1 \pmod{\lambda}$なる$\delta$を考え$\delta/\lambda$を回転数という．$(m,\lambda,\sigma)$を曲線$k$のvalencyという．重複点$x$の（$x$はそのMへの像の）valencyとは，$x$を中心とする円板の周囲の線の

valency のこととする.

Nielsen の定理′ [Ni 2]　f, f' を曲面 Σ_g 上の周期 n の周期写像とする. f と f' が向きを保つ diffeom $\theta: \Sigma_g \to \Sigma_g$ によって conjugate であるための必要十分条件は, それぞれの重複点同志が1対1に対応し, 境界の曲線同志も適当に1対1に対応し, しかも, その対応を通じて valency が保存されることである. ($M = \Sigma_g/f$, $M' = \Sigma_g/f'$ の言葉で述べた方が簡明だった!)

系　f, f' を曲面 Σ_g 上の周期 n の周期写像とする. もしオイラー数 $\chi(\Sigma_g) < 0$ であって, $f \simeq f'$ なら, f と f' は向きを保つ diffeom によって conjugate である. (Σ_g の univ. cov. $\tilde{\Sigma}_g$ に, f と f' を lift することによって示される.)

さて, "generalized quotient" : $\mathcal{P}_g^+/\text{conj.} \longrightarrow \mathcal{S}_g$ という写像を構成しよう.

$f: \Sigma_g \to \Sigma_g$ を pseudo-periodic map とし, $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ をその effective system of s.c. curves とする.

周期的部分の処理: b を $\Sigma_g - C$ のひとつの連結成分とする. $b, f(b), \dots, f^{\beta-1}(b)$ は全て異なるが, $f^\beta(b) = b$ であるとしよう. $f^\beta|b : b \to b$ は (pseudo-periodic の仮定から) 周期写像としてよい. その周期を n_b とする. 前頁の系により, $f^\beta|b$ の conjugate class は unique である. しかも, b に適当に複素構造を入れれば, $f^\beta|b : b \to b$ は complex analytic であると仮定することが出来る ([ ]).

$\varphi_b' : M_b' \to D$ を次のように構成する. $M_b' := D \times b/\sim$, $(z, x) \sim (\exp(2\pi\sqrt{-1}/n_b)z, f^\beta(x))$. $\varphi_b'(z, x) = [z]$. ただし, φ_b' の値域としての D は, $D/(z \sim \exp(2\pi\sqrt{-1}/n_b)z)$ と D を便宜的に同一視した. M_b' は有限個の quotient singularity ($\approx$ lens space の cone) を持つが, これは canonical な仕方で resolution できる. 結果に, もし (-1)-curve が (fiber 中に) でれば, それをつぶす. こうして得られた複素曲面を M_b とする. $\varphi_b'' : M_b \to D$ が自然に定義される.

M_b' の特異点の様子は f^β の多重点の valency により決まる. 前頁の系により, $\varphi_b'' : M_b \to D$ の位相形は, $f^\beta|b$ の isotopy class によって決まる. 最後に $\varphi_b := (\varphi_b'')^\beta : M_b \to D$ とおく.

amphidromeでないアニュラス部分の処理. $C_i \in \mathcal{C}$ をひとつ固定する. C_i, $f(C_i)$, …, $f^{\alpha-1}(C_i)$ は全て異なるが, $f^{\alpha}(C_i) = C_i$ となる $\alpha > 0$ がある. C_i の管状近傍($\approx$ アニュラス)をAとしよう. C_i の"左隣り"にある $\Sigma_g - \mathcal{C}$ の連結成分を b, "右隣り"のものを b' とし, 対応する数 β, n_b, β', $n_{b'}$ を考える.(補題1のあとの説明参照.)
α は β と β' の公倍数であり, かつ α は $n_b\beta$ と $n_{b'}\beta'$ の公約数である. $\lambda = n_b\beta/\alpha$, $\lambda' = n_{b'}\beta'/\alpha$ とおく.
Aの b 側の境界における f^{α} の"回転数"は δ/λ $(0 \leqq \delta \leqq \lambda - 1)$, b' 側の境界における f^{α} の"回転数"は δ'/λ' $(0 \leqq \delta' \leqq \lambda' - 1)$ であるとしよう. $(\delta, \lambda) = 1 = (\delta', \lambda')$ である.($\delta \neq 0$, $\delta' \neq 0$ なら.)
容易にわかるように, C_i の screw number は

$$\frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta'}{\lambda'} + (\text{integer } I)$$

の形である. 仮定により screw number > 0 であって, しかも $0 \leqq \dfrac{\delta}{\lambda} < 1$, $0 \leqq \dfrac{\delta'}{\lambda'} < 1$ であるから, $I \geqq -1$ でなければならない.

本質的にユークリッド互除法により, 次の補題が示せる.

補題3 $s = \dfrac{\delta}{\lambda} + \dfrac{\delta'}{\lambda'} + I\ (>0)$ に対し, 1以上の整数の有限列 $a_1, a_2, \cdots, a_p$, b_q, $b_{q-1}, \cdots, b_1$ が存在して次の条件

が成立つ.

(i) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_p \leqq b_q \leqq b_{q-1} \leqq \cdots \leqq b_1$

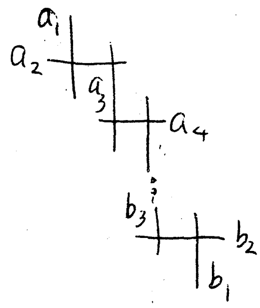
(ii) $a_1 = \lambda, \quad b_1 = \lambda'$

(iii) $\delta a_2 \equiv 1 \mod a_1$, $\quad \delta' b_2 \equiv 1 \mod b_1$.

(iv) $a_2, \cdots, a_p, b_q, \cdots, b_2$ については,そのどのひとつの数についても,両側の数の和がその数で割り切れる. たとえば $a_2 \mid (a_1 + a_3)$. (しかも,その商は2以上である.)

(v) $$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{p-1} a_p} + \frac{1}{a_p b_q} + \frac{1}{b_q b_{q-1}} + \cdots + \frac{1}{b_2 b_1} = s$$

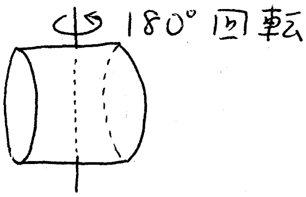
しかも,(i)~(v)を満たす自然数列は unique である.」

さて M_{C_i} を diagram 

という(線形な)図式にそって"holomorphic plumbing"で構成する. 自然な projection $\varphi'_{C_i} : M_{C_i} \to D$ が構成できて,その中心 fiber は上の plumbing の中心,一般ファイバーはアニュラス, monodromy は $f^\alpha | A$ (= screw number s のネジレ) となることがわかる. (cf. Clemens [C])

最後に $\varphi_{C_i} := (\varphi'_{C_i})^\alpha : M_{C_i} \to D$ とおく.

<u>amphidrome なアニュラス部分の処理</u>　$C_i \in C$ を amphidrome とすると，α は偶数で，$f^{\frac{\alpha}{2}}$ はアニュラス A に



として作用する．このことと前頁の部分を組みあわせて，φ_{C_i} : $M_{C_i} \to D$ が構成される．

以上の M_b, M_{C_i} 達をつなぎ合わせて $f \in \mathcal{P}^+(\Sigma_g)$ に対応する "generalized quotient" とよばれる族 $\varphi : M \to D$ が構成される．この中心ファイバー $F_0 = \varphi^{-1}(0)$ が，いわば，f の "generalized quotient" なのである．F_0 が f から，(位相同値を除いて) unique に構成されることは，Nielsen の定理により保証される．

($\varphi : M \to D$ という <u>holomorphic map</u> が実際に構成できることは Winters [W] により証明されているが，我々の場合，elementary に示せる．)

また，構成から，"monodromy" : $\mathcal{S}_g \to \mathcal{P}_g^+/\mathrm{conj.}$ と，"generalized quotient" : $\mathcal{P}_g^+/\mathrm{conj.} \to \mathcal{S}_g$ が互いに逆写像であることが，(ひどく困難でなく) わかる．以上で，主定理の証明(の概略)を終る．　　(1990年2月)

文献

[AW] M. Artin - G. Winters, Topology 10 (1971) 373-383.

[C] C.H. Clemens Jr. Trans. AMS 136 (1969) 93-108.

[DM] P. Deligne - D. Mumford, Publ. IHES 36 (1969) 75-109.

[E] D.B.A. Epstein, Curves on 2-manifolds and isotopies.

[G] J. Gilman, Bull AMS. 21 (1989), 125-129.

[I] S. Iitaka, 修士論文 東京大学 (1967)

[K] K. Kodaira, Ann. of Math. 77 (1963) 563-626

[Na] Y. Namikawa, Lecture Notes in Math. Springer. 412 ('74)

[NU] Y. Namikawa - K. Ueno, Manuscripta Math. 9 (1973) 163-

[Ni-1] J. Nielsen, Surface transf. classes of alg. finite type, 1944 (全集 第2巻)

[Ni-2] J. Nielsen. The structure of Periodic Surface Transf. 1937 (全集 第2巻)

[O] A. Ogg, Topology 5 (1966) 355-362

[T] W. Thurston, Bull. AMS. Vol. 19 no 2. (1988) 417-431

[W] G.B. Winters, Amer. J. of Math. 96 (1972) 215-228.